

ALAIN GRIGIS

Estimations asymptotiques des valeurs propres de l'équation de Hill polynomiale

Journées Équations aux dérivées partielles (1986), p. 1-7

http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1986___A7_0

© Journées Équations aux dérivées partielles, 1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journées Équations aux dérivées partielles » (<http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/edpa/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ESTIMATIONS ASYMPTOTIQUES DES VALEURS PROPRES
DE L'EQUATION DE HILL POLYNOMIALE

par A. GRIGIS

Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique
Plateau de Palaiseau - 91128 Palaiseau Cedex

"Unité Associée au C.N.R.S. n° 169"

1. INTRODUCTION.

L'équation de Hill s'écrit

$$(1) \quad -u''(x) + (V(x)-E)u(x) = 0$$

où la fonction $V : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (appelée potentiel) est périodique. Nous supposons la période égale à π . Les valeurs propres sont par définition les valeurs du paramètre E pour lesquelles l'équation (1) admet une solution 2π -périodique non nulle, en fait soit une solution π -périodique soit une solution π -antipériodique non nulles.

L'équation de Hill est dite finie ou polynomiale si la fonction V est un polynôme trigonométrique, ce que nous supposons.

$$(2) \quad V(x) = \mu \cos 2Nx + \sum_{n=-N+1}^{N-1} c_n e^{2inx}$$

$$\mu > 0, \quad c_{-n} = \overline{c_n}, \quad c_0 = 0.$$

Tout polynôme trigonométrique de période π de degré $N, W(x)$, peut s'écrire sous la forme $W(x) = V(x-a)+b$ et on déduit aussitôt les valeurs propres de l'équation de Hill associée à W de celles de l'équation (1).

Il est facile de voir, et c'est classique, qu'il y a deux valeurs propres proches de n^2 correspondant à des fonctions propres proches de $\cos nx$ et $\sin nx$, pour n assez grand. On les appelle E_n^- et E_n^+ , ce sont bien les $2n$ -ièmes et $(2n+1)$ -ièmes valeurs propres elles bordent le n -ième gap et il est connu qu'on a avec $\varepsilon > 0$

$$(3) \quad 0 < \gamma_n = E_n^+ - E_n^- < e^{-\varepsilon n}, n > n_0$$

Pour $N = 1$, $V(x) = \mu \cos 2x$ l'équation (1) est l'équation de Mathieu pour laquelle Harrel [7] et Avron-Simon [1] ont donné

$$(4) \quad \gamma_n = \frac{\mu^n}{8^{n-1}} \frac{1}{((n-1)!)^2} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

Nous avons retrouvé ce résultat dans [1] où pour un potentiel V réel

analytique nous précisons le taux de décroissance exponentiel de γ_n .
Ici nous obtenons

Théorème : Soit V de la forme (2). Pour $n > n_0$ on a

$$(5) \quad \gamma_n = \frac{4n}{\pi} \left(\left| \sum_{k=1}^N e^{2\tilde{z}_k(n)} \right| \right) (1+O(\frac{1}{n})) (1+O(\frac{1}{n}))$$

avec

$$(6) \quad \tilde{z}_k(n) = -\frac{n}{2N} \text{Log}(\frac{2n^2}{\mu}) + i n \frac{k\pi}{N} - \frac{n}{N} (\text{Log}2-1) + O(n^{1-\frac{2}{N}})$$

En fait dans ces expressions chacun des O a un développements en puissances de n . On a aussi le corollaire qui montre qu'en général les gaps ne se referment pas, comme pour $N = 1$.

Corollaire : Si la condition générique suivante est réalisée pour $N \geq 2$,

$$(7) \quad (C_{N-1})^N \notin \mathbb{R}^-$$

alors il existe k_0 tel que

$$(8) \quad \gamma_n = \frac{4n}{\pi} e^{2\text{Re}\tilde{z}_{k_0}(n)} (1+O(n^{-2}))$$

(Pour $N = 2$ on a seulement $c+O(n^{-1})$ au lieu de $1+O(n^{-2})$).

Notre méthode est tout à fait inspirée de l'étude que Voros et Ecalle (voir [3], [10] et [8]) ont faite de l'équation de Schrödinger semi-classique

$$(9) \quad -h^2 u''(x) + V(x)u(x) = 0$$

avec un potentiel V polynomial en x . En posant $E = h^{-2}$ on transforme l'équation (1) en

$$(10) \quad -h^2 u''(x) + (h^2 V(x)-1)u(x) = 0$$

et l'étude de (1) quand E tend vers l'infini est ramenée à un problème du type semi-classique avec toutefois un potentiel dépendant de h ce qui complique quelque peu l'étude. La méthode de Voros-Ecalle est bien adaptée

aux problèmes semi-classiques en dimension un dans l'analytique (voir [8]). Les preuves détaillées du résultat exposé ici paraîtront ailleurs.

Enfin nous tenons à remercier Ecalle, Helffer et Sjöstrand pour de motivantes discussions.

2. RESOLUTION DE L'EQUATION.

Nous résolvons l'équation (1) dans des domaines bien précis de \mathbb{C} à l'aide de séries de fonctions convergentes. L'introduction de ces domaines est naturelle, voir par exemple Sibuya [9]. Pour E assez grand, la fonction

$$(11) \quad z(x) = \int_0^x (V(t)-E)^{1/2} dt ,$$

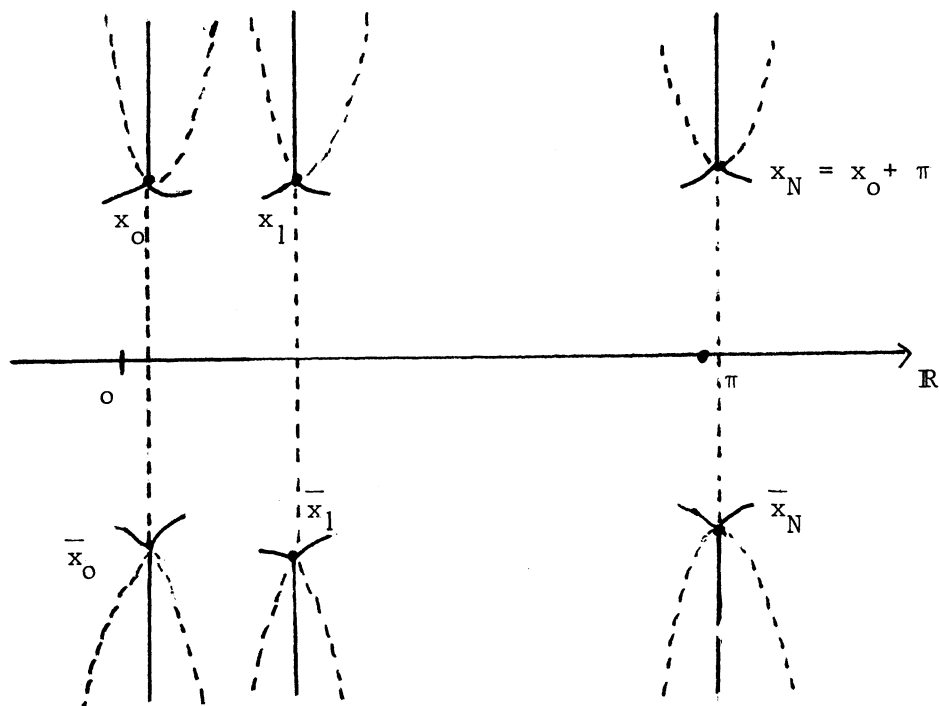
en fixant $\text{Im} z'(0) > 0$, est définie sur l'axe réel et s'étend holomorphiquement sur la surface de Riemann de la fonction $(V-E)^{1/2}$. On introduit les notions de points tournants (par définition les zéros de $V-E$) et de lignes (respectivement antilignes) de Stokes. Celles-ci sont les courbes sur lesquelles $\text{Re} z(x)$ (respectivement $\text{Im} z(x)$) est constante et qui aboutissent à un point tournant.

Si x_0 est un point tournant simple, on a

$$(12) \quad z(x)-z(x_0) = a(x-x_0)^{3/2} + o((x-x_0)^{5/2}), a \neq 0, a = \frac{2}{3}(V'(x_0))^{1/2} \neq 0$$

ce qui donne l'allure des lignes et antilignes de Stokes près de x_0 .

Pour les potentiels de la forme (2) on obtient les résultats suivants.



Les points tournants sont de la forme $x_k + k'\pi$ et $\bar{x}_k + k'\pi$ $k' \in \mathbb{Z}$,
 $k = 1, 2, \dots, N$, avec

$$(13) \quad x_k(E) = \frac{i}{2N} \operatorname{Log} \frac{2E}{\mu} + \frac{k\pi}{N} - \frac{i}{N} \frac{c_{N-1}}{\mu} e^{2ik \frac{\pi}{N}} \left(\frac{2E}{\mu}\right)^{-1/N} + O(E^{-2/N})$$

Les lignes de Stokes sont en traits pleins, en général elles ne se raccordent pas car les $\operatorname{Re}(z(x_j))$ sont distinctes. Les antilignes de Stokes sont en pointillé et on a

$$(14) \quad z(\bar{x}) = -\overline{z(x)}$$

On introduit alors les actions fondamentales :

$$(15) \quad z(\pi) = iT(E) = i\pi E^{1/2} (1+g(E^{-1}))$$

où g est une fonction analytique, avec $g(0) = 0$, et d'autre part

$$(16) \quad z_k = z(x_k(E)) = -\frac{1}{2N} E^{1/2} \operatorname{Log} \frac{2E}{\mu} + E^{1/2} \left(i \frac{k\pi}{N} - \frac{1}{N} (\operatorname{Log} 2 - 1) \right) + O(E^{1/2-1/N})$$

L'action sur un lacet quelconque de \mathbb{C} s'exprime à l'aide de ces quantités.

Si Ω est un ouvert simplement connexe de \mathbb{C} ne contenant pas de points tournants, les fonctions $z(x)$ et $-z(x)$ sont définies sans ambiguïté sur Ω et on construit sous la forme (due à Ecalle [3])

$$(17) \quad u_{\pm}(x) = (V(x)-E)^{-1/4} e^{\pm z(x)} \left(\sum_0^{\infty} W_n^{\pm}(z(x)) \right)$$

avec

$$(18) \quad \begin{cases} W_0^{\pm} = 1 \\ (\partial z \pm 2) W_{2n+1}^{\pm} = -H W_{2n}^{\pm} \\ \partial z W_{2n}^{\pm} = -H W_{2n-1}^{\pm} \end{cases}$$

$$(19) \quad H(z(x)) = -\frac{1}{4} V'(x) (V-E)^{-3/2}$$

On prend bien soin de choisir toujours la même détermination de $(V-E)^{1/4}$ sur Ω et on obtient les W_n^+ en intégrant à partir d'un point de base $z_+ = z(x_+)$ et les W_n^- à partir d'un point $z_- = z(x_-)$. Les séries $\sum_0^{\infty} W_n^{\pm}(z(x))$ sont convergentes uniformément sur tout compact et si il existe un chemin joignant z_+ à $z(x)$ le long duquel $\operatorname{Re} z$ est croissante on peut développer les

W_n^+ en puissance de $E^{-1/2}$ et montrer que ce sont des symboles analytiques.

D'autre part on a facilement

$$(20) \quad W(u_+, u_-) = -2\psi(z_+, z_-) = -2 \sum_0^{\infty} W_{2n}^+(z_-)$$

et ce wronskien est un symbole d'ordre 0 en $E^{-1/2}$ si z_1 et z_2 sont bien choisis.

Remarquons que la solution $u_+(x)$ s'étend globalement sur \mathbb{C} puisque l'équation (1) est seulement singulière à l'infini et que u_+ est déterminée par $u_+(x_+)$ et $u_+'(x_+)$. Il en est de même de la fonction u_- .

3. PREUVE DU RESULTAT.

On introduit les solutions u_0, u_1, \dots, u_N qui sont de la forme u_+ ,

le point de base pour u_j étant $z_j^+ = z((j - \frac{1}{2}) \frac{\pi}{N} + i\infty)$. Autrement dit u_j est la solution sous-dominante à la Sibuya dans la bande comprise entre les lignes de Stokes partant des points tournants x_{j-1} et x_j et qui tendent vers $+i\infty$.

On a les formules de connexion

$$(21) \quad u_j = a_j u_{j-1} + b_j \bar{u}_0 \quad j = 1, \dots, N$$

$$a_j = \frac{W(u_j, \bar{u}_0)}{W(u_{j-1}, \bar{u}_0)} \quad b_j = \frac{W(u_{j-1}, u_j)}{W(u_{j-1}, \bar{u}_0)}$$

d'où on déduit aussitôt pour $u_N = e^{iT(E)} u_0(x-\pi)$

$$(22) \quad u_N = \tilde{a} u_0 + \tilde{b} \bar{u}_0$$

$$\tilde{a} = \frac{W(u_N, \bar{u}_0)}{W(u_0, \bar{u}_0)}$$

$$\tilde{b} = W(u_N, \bar{u}_0) \left(\sum_{j=1}^N \frac{W(u_{j-1}, u_j)}{W(u_j, \bar{u}_0) W(u_{j-1}, \bar{u}_0)} \right).$$

D'autre part on sait ([5]) que E est valeur propre de l'équation de Hill si et seulement si ± 1 est valeur propre de la matrice de la translation τ définie par $\tau u(x) = u(x+\pi)$ dans [5] ce qui montre que E_n^\pm est solution de

$$(23) \quad a = (-1)^n \pm i|b| \quad \text{avec } a = e^{iT(E)\tilde{a}} \quad b = -e^{-iT(E)\tilde{b}}$$

soit

$$(24) \quad T(E) - \arg \tilde{a}(E) = n\pi \pm \text{Arctg}|\tilde{b}(E)|$$

Tous les wronskiens se calculent en se ramenant à la formule (20). On voit facilement que $\tilde{a}(E) = \frac{\psi_N(E)}{\psi_0(E)}$ est un symbole analytique d'ordre 0 en $E^{-\frac{1}{2}}$ de symbole principal égal à 1. D'autre part

$$(25) \quad \tilde{b}(E) = -\psi_N(E) \sum_1^N \frac{e^{2z_{j-1}(E)}}{\psi_{j-1}(E)\psi_j(E)}$$

où les $\psi_j(E)$ sont aussi des symboles du même type. On en déduit que $\tilde{b}(E)$ est exponentiellement petit et le fait bien connu que E_n^+ et E_n^- ont le même développement asymptotique en puissances de n^{-1} , à savoir la solution $E(n)$ de

$$(26) \quad \tilde{T}(E) = T(E) - \arg \tilde{a}(E) = n\pi$$

D'autre part on a l'expression du splitting.

$$(27) \quad \gamma_n = \frac{2|\tilde{b}(E)|}{\tilde{T}'(E)} \text{ mod } O(E^{-\infty}|\tilde{b}(E)|)$$

ce qui donne le théorème, en posant $\tilde{z}(n) = z(E(n))$.

Le corollaire découle d'un lemme technique sur les actions $z_k(E)$. On montre que si la condition (7) est vérifiée, l'une des exponentielles dans (5) l'emporte sur les autres.

Pour $N = 1$, l'équation de Mathieu a la propriété bien connue que tous les gaps s'ouvrent. Cette question est beaucoup plus difficile à étudier pour $N \geq 2$ (voir [6]). Il est bien certain que $\tilde{b}(E)$ peut être nul et le gap se refermer pour certains potentiels V . Par exemple si V a une période π/M , on a $\gamma_n = 0$ si n n'est pas multiple de M .

Références.

- [1] J. Avron, B. Simon : The asymptotics of the Gap in the Mathieu equation, Annals of Physics 134, (1981) 76-84.
- [2] M.S.P. Eastham : The spectral theory of periodic differential equation, Scottish Academic Press (1973).

- [3] J. Ecalle : Cinq applications des fonctions réurgentes, Prépublications d'Orsay (1984).

- [4] C. Gérard, A. Grigis : Precise estimation of tunneling and eigenvalues near a potential barrier, en préparation.

- [5] A. Grigis : Sur l'équation de Hill analytique, Séminaire Bony-Meyer-Sjöstrand, Ecole Polytechnique 1984-85 exposé n°16 .

- [6] A. Grigis : A paraître.

- [7] Harrel : Américan J. of Maths, à paraître.

- [8] F. Pham : Introduction à la resurgence quantique. Séminaire Bourbaki 85-86 exposé n°656.

- [9] Y. Sibuya : Global theory of a second order linear ordinary differential equation with a polynomial coefficient, North Holland (1975).

- [10] A. Voros : The return of the quartic oscillator. The complex WKB method Ann. Inst. Henri Poincaré vol 29 n°3 (1983) 211-338.

*
* *
*