JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

FRANÇOIS TRÈVES

Formules d'homotopie locales pour le système de Cauchy-Riemann tangentiel

Journées Équations aux dérivées partielles (1987), p. 1-9

<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1987____A18_0>

FORMULES D'HOMOTOPIE LOCALES POUR LE SYSTEME DE CAUCHY-RIEMANN TANGENTIEL

François Treves, Université Rutgers

On considère une hypersurface réelle S dans $\mathbb{C}^{n+1}$ (où les coordonnées complexes seront notées $z_1,\dots,z_n, w = s + it$). On supposera que l'origine appartient à S et qu'une équation de S près de l'origine est $t = \varphi(z,s)$, où φ est une fonction C^∞ à valeurs réelles, dans un voisinage ouvert U de O dans $\mathbb{R}^{2n+1}$. On supposera que $\varphi(0,0) = 0$ et que grad $\varphi(0,0) = 0$. Dans le système de coordonéees locales x_i, y_i ($1 \leq i \leq n$), s, les champs vectoriels de Cauchy-Riemann tangents à S sont des combinaisons linéaires des champs

$$L_j = \partial/\partial \bar{z}_j + \gamma_j(z,s)\partial/\partial s,$$

où $\gamma_j = -i\varphi_{\bar{z}_j}/(1 + i\varphi_s)$ et $j = 1,\dots,n$. Soit une fonction u de classe C^∞ dans U ; on a

$$du = \Sigma_{j=1,\dots,n} L_j u \, d\bar{z}_j \bmod(dz_1,\dots,dz_n,dw).$$

Soit maintenant une forme différentielle f de bidegré (n+1,q) avec $0 \leq q \leq n$, c'est-à-dire

$$f = \Sigma_{|J|=q} f_J(z,s) \, d\bar{z}_J \wedge \omega,$$

où J est une suite croissante d'entiers $j_1 < \dots < j_q$, $d\bar{z}_J = d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_q}$ et $\omega = dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n \wedge dw$. On supposera que les coefficients sont de classe C^∞ dans la fermeture $\bar{\mathcal{O}}$ d'un ouvert $\mathcal{O} \subset\subset U$; on écrit $f \in C^\infty(\bar{\mathcal{O}};\Lambda^{n+1,q})$. On a alors

$$df = \Sigma_{|J|=q}\, \Sigma_{k=1,\dots,n}\, L_k f_J\, d\bar{z}_k \wedge d\bar{z}_J \wedge \omega .$$

On peut dire qu'au niveau des formes de bidegré $(n+1,q)$ le système de Cauchy-Riemann tangentiel à S est "réalisé" par la dérivée extérieure. Les formules d'homotopie auxquelles il est fait allusion dans le titre seront du genre

$$(1) \qquad f = dK^q f + K^{q+1} df + R^q f ,$$

où

$$K^q : C^\infty(\bar{\mathcal{O}};\Lambda^{n+1,q}) \to C^\infty(\mathcal{O};\Lambda^{n+1,q-1})$$

et où

$$R^q : C^\infty(\bar{\mathcal{O}};\Lambda^{n+1,q}) \to C^\infty(\bar{\mathcal{O}};\Lambda^{n+1,q})$$

représente une obstruction à l' *exactitude* du complexe différentiel

$$d : C^\infty(\mathcal{O};\Lambda^{n+1,q}) \to C^\infty(\mathcal{O};\Lambda^{n+1,q+1}) .$$

On va construire l'opérateur K^q sous la forme suivante: $K^q = (-1)^q K$, où K a une expression qui est indépendante du degré q. On définit d'abord

$$\mathcal{K}_{\sigma} f(z,s,\sigma) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathcal{O}} e^{i\sigma[s + i\varphi(z,s) - s' - i\varphi(z',s') - i\alpha\cdot(z-z')]}$$

$$f(z',s') \wedge E_\alpha(z,s,z',s',\sigma) \wedge dw .$$

Posons $\Gamma_\gamma = \{ \sigma \in \mathbb{C} ; |\mathrm{Im}\, \sigma| < \gamma |\mathrm{Re}\, \sigma| \}$ $(0 < \gamma < 1)$. Ici $\alpha = \alpha(z,s,z',s',\sigma)$ est une application C^∞ de $U \times U \times \Gamma_\gamma$ dans $\mathbb{C}^n$ qui est holomorphe par rapport à σ. Nous supposerons que toutes les dérivées de α sont bornées dans $U \times U \times \times \Gamma_\gamma$. Quant à $E_\alpha(z,s,z',s',\sigma)$ c'est une forme différentielle dans $U \times U$ dont les coefficients dépendent de σ, de façon holomorphe dans Γ_γ. Nous la décrivons de façon plus détaillée ci-dessous. Mais disons tout de suite que $\mathcal{K} f$ est l'intégrale d'une forme différentielle dans l'espace de (z',s'), dont les coefficients sont des formes différentielles en (z,s) (qui dépendent en plus de σ), sur la $(2n+1)$-chaine $\mathcal{O}$. Il n'y a que la partie homogène de degré $2n+1$, par rapport à $(z',\bar{z}',s')$, de l'intégrand qui puisse fournir une contribution non nulle; tous les autres termes donnent lieu à des intégrales nulles.

Venons-en maintenant à l'expression de E_α. On introduit tout d'abord les distributions suivantes dans $\mathbb{C}^n$ où la variable complexe sera notée $\lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_n)$:

$$E_j^{(\nu)}(\lambda) = (-1)^\nu (n-\nu-1)!\, \bar{\lambda}_j / |\lambda|^{2(n-\nu)} \quad (\nu = 0,1,\dots,n-1).$$

Notons que

(2) $\pi^{-n}\Sigma_{j=1,\dots,n}(\partial/\partial\bar{\lambda}_j)\,\mathcal{E}_j^{(0)} = \delta(\lambda)$ (mesure de Dirac en 0).

On forme les courants suivants:

(3) $E_\alpha^{(\nu)} = \Sigma_{|J|=\nu+1}\,\Sigma_{j\in J}\,\varepsilon(j(J\backslash j))\,\mathcal{E}_j^{(\nu)}(\lambda)\,(D\alpha)_{J\backslash j}\wedge D\bar{\lambda}_{(J)}\wedge D\lambda$.

Nous devons expliquer les notations dans (3): $\varepsilon(j(J\backslash j))$ est le signe de la permutation qui ordonne l'ensemble $\{j\}\cup(J\backslash j)$. Si $\omega_1,\dots,\omega_n$ sont des 1-formes différentielles et si $K = \{k_1<\dots<k_p\}$, $K^* = \{1,\dots,n\}\backslash K$, nous écrivons

(4) $\omega_K = \omega_{k_1}\wedge\dots\wedge\omega_{k_p}$;

(5) $\omega_{(K)} = (-1)^{k_1+\dots+k_p-p}\,\omega_{K^*}$.

D'autre part, $\mathcal{E}_j^{(\nu)}(\lambda)\,D\bar{\lambda}_{(J)}\wedge D\lambda$ est le pull-back à $\mathbb{R}^{2n}\times\mathbb{R}^{2n}$ de la forme $\mathcal{E}_j^{(\nu)}(\lambda)\,d\bar{\lambda}_{(J)}\wedge d\lambda$ sur $\mathbb{R}^{2n}$, sous l'application $(z,z') \to \lambda = z - z'$. Ainsi D $= d_{z,s} + d_{z',s'}$. On continuera à donner le même sens à cette notation dans ce qui suit. On pose enfin:

(5) $E_\alpha = \Sigma_{\nu=0,\dots,n-1}\,(-1)^{\nu(\nu+1)/2}\,\sigma^\nu\,E_\alpha^{(\nu)}$.

La formule suivante vaut dans $U\times U\times\Gamma_\gamma$:

(6) $$e^{\alpha\lambda} D(e^{\alpha\lambda} E_{\alpha}) = \{\pi^n \delta(\lambda) D\lambda - (-1)^{n(n+1)/2} \sigma^n D\alpha\} \wedge D\lambda .$$

On rappelle que $\lambda = z - z'$. Posons

$$\mathcal{P} f(z,s,\sigma) = \int_{-b}^{a} e^{\,i\sigma[s+ i\varphi(z,s) - s' - i\varphi(z,s')]} f(z,s')\wedge dw ,$$

où l'intégration s'effectue par rapport à s' seulement :

$$f(z,s') = \Sigma_{|J|=q} f_J(z,s') \, dz_J \wedge dz \wedge [1 + i\varphi_s(z,s')] ds' .$$

On définit aussi

$$\mathcal{R}_{\mathcal{O}}f(z,s,\sigma) =$$

$$(-1)^{n(n+1)/2} \sigma^n \int_{\mathcal{O}} e^{\,i\sigma[s+ i\varphi(z,s) - s' - i\varphi(z',s')]}$$

$$f(z',s') \wedge D\alpha \wedge D\lambda \wedge dw/(2i)^n .$$

On déduit de (6) :

(7) $$d[(-1)^q \mathcal{K}_{\mathcal{O}} f] + (-1)^{q+1} \mathcal{K}_{\mathcal{O}} df = \mathcal{P} f - \mathcal{R}_{\mathcal{O}} f - (-1)^q \mathcal{K}_{\partial\mathcal{O}}\mathcal{O} ,$$

où $\mathcal{K}_{\partial\mathcal{O}} f$ a la meme signification que $\mathcal{K}_{\mathcal{O}} f$ sauf que l'intégration par rapport à (z',s') s'effectue sur le bord $\partial\mathcal{O}$ de l'ouvert $\mathcal{O}$.

L'étape suivante consiste à intégrer par rapport à σ sur $\mathbb{R}_+$, plus précisément à former

$$^{\varepsilon}\mathbf{K}_{\mathcal{O}+}f(z,s) = (2\pi)^{-1}\int_{\sigma>0} e^{-\varepsilon\sigma^2}\ \mathcal{K}f(z,s,\sigma)d\sigma\,,$$

$$^{\varepsilon}\mathbf{R}_{\mathcal{O}+}f(z,s) = (2\pi)^{-1}\int_{\sigma>0} e^{-\varepsilon\sigma^2}\ \mathcal{R}f(z,s,\sigma)d\sigma\,,$$

$$^{\varepsilon}\mathbf{P}_{+}f(z,s) = (2\pi)^{-1}\int_{\sigma>0} e^{-\varepsilon\sigma^2}\ \mathcal{P}f(z,s,\sigma)d\sigma\,.$$

On tire de (7) la formule évidente qui lie ces opérateurs. La question est de savoir si l'on peut choisir l'application α de manière à ce qu'on puisse faire tendre $\varepsilon > 0$ vers 0. En réalité cela est toujours possible si on ignore les autres contraintes. Ce que nous recherchons c'est aussi d'avoir

(8) $\qquad \mathcal{R}f = 0\,,$

quelle que soit $f \in C^\infty(\mathcal{O};\Lambda^{n+1,q})$. La condition (8) est vérifiée sous l'une ou l'autre des deux hypothèses suivantes:

(9) $\qquad \text{dét}(L_j\alpha_k)_{j\in J,k\in K} = 0$ *dans* U, *pour tous* J, K, $|J| = |K| = q$;

(10) $\qquad \text{dét}(L_j'\alpha_k)_{j\in J,k\in K} = 0$ *dans* U, *pour tous* J, K, $|J| = |K| = n - q$,

où L_j' est le champ de vecteur L_j agissant en les variables (z',s'). Lorsque (9) est vérifiée on a

(11) $d_{z,s}\alpha_{i_1}\wedge\ldots\wedge d_{z,s}\alpha_{i_r}\wedge dz\wedge dw = 0$ *dès que* $r \geqslant q$.

Lorsque (10) est vérifiée on a

(12) $d_{z',s'}\alpha_{i_1}\wedge\ldots\wedge d_{z',s'}\alpha_{i_r}\wedge dz'\wedge dw' = 0$ *dès que* $r \geqslant n - q$.

Dans les deux cas l'intégrale de $f(z',s')\wedge D\alpha\wedge D\lambda\wedge dw$ sur $\mho$ est nulle.

Example 1.- Prenons $\varphi(z,s) = \varphi(z) = |z_*|^2 - |z_{**}|^2$, où $z_* = (z_1,\ldots,z_\nu)$, $z_{**} = (z_{\nu+1},\ldots,z_{\nu+\nu'})$, $z_\otimes = (z_{\nu+\nu'+1},\ldots,z_n)$, avec $\nu, \nu' \geqslant 0$, $\nu + \nu' \leqslant n$. Si l'on prend $\alpha = (-2\bar{z}_*', 2\bar{z}_{**}, \bar{z}_\otimes - \bar{z}_\otimes')$ on aura

$$\varphi(z) - \varphi(z') + \mathrm{Ré}[\alpha\cdot(z - z')] = |z - z'|^2$$

et donc on pourra faire tendre ε vers zéro. On voit que la condition (9) est satisfaite si $q > n - \nu$ tandis que la condition (10) l'est si $q < \nu'$. ∎

En fait on aussi le droit de déformer le domaine d'intégration par rapport à σ, de $\mathbb{R}_+$ à l'image de $\mathbb{R}_+$ sous une application $\sigma \to \mu(z,s,z',s',\sigma)\sigma$ avec μ lipschitzienne dans $U\times U\times\mathbb{R}_+$. En profitant de cette possibilité le résultat de l'example 1 se généralize aisément : on peut choisir l'application α chaque fois qu'il y a suffisamment de valeurs propres > 0 de la forme de Levi de la structure CR à l'étude (c'est-à-dire de la fonction φ), ou bien lorsqu'il y a assez de valeurs propres < 0. Pour un bon choix de α on pourra faire tendre ε vers zéro, et l'on aboutira à une formule

(13) $\mathbf{P}_+ f = d[(-1)^q \mathbf{K}_{\mathcal{O}+} f] + (-1)^{q+1} \mathbf{K}_{\mathcal{O}+} df - (-1)^q \mathbf{K}_{\partial\mathcal{O}+} f$.

L'opérateur $\mathbf{P}_+$ est une sorte de projecteur associé à la partie $\sigma > 0$ de l'ensemble charactéristique . On a, bien entendu, une formule analogue à (13) avec l'indice - au lieu de + : il suffit d'intégrer par rapport à σ sur $\mathbb{R}_-$ au lieu de $\mathbb{R}_+$. On vérifie immédiatement que

(14) $\mathbf{P}_+ + \mathbf{P}_- = \mathbf{Id}$,

de sorte que lorsque les deux formules (13), avec les indices + et - , sont valables on obtient des formules d'homotopie (avec erreur!)

(15) $f = d[(-1)^q \mathbf{K}_{\mathcal{O}} f] + (-1)^{q+1} \mathbf{K}_{\mathcal{O}} df - (-1)^q \mathbf{K}_{\partial\mathcal{O}} f$.

Il reste à éliminer les termes $-(-1)^q \mathbf{K}_{\partial\mathcal{O}+} f$ et $-(-1)^q \mathbf{K}_{\partial\mathcal{O}-} f$. On y parvient en se basant sur une formule du genre de (6) et sur une transformation CR de l'ouvert $\mathcal{O}$. Ceci, ainsi que ce qui précède, sera exposé, avec démonstrations à l'appui, dans un article à paraitre.

REFERENCES

Les formules d'homotopie décrites ci-dessus (ainsi que celles obtenues en éliminant les termes provenant de l'intégration sur le bord de $\mathcal{O}$) sont inspirées de celles, classiques, de Bochner-Martinelli et de Coleman-Leray . Parmi les résultats récents de résolubilité pour les equations de CR tangentielles il faut citer ceux de l'article

G. M. Henkin, *The H. Lewy equation and analysis on pseudoconvex manifolds*, Uspehi Mat. Nauk. **32** (1977), No 3 ; English transl. in Russian Math. Surveys **32** (1977).

Voir aussi

R. Harvey - J. Polking, *Fundamental solutions in complex analysis*, II, Duke Math. J. **46** (1979), 301-340,

où l'on trouvera une bonne bibliographie. Les résultats précédents sont globaux - sur le bord d'un ouvert pseudoconvexe de $\mathbb{C}^n$. On trouvera des résultats de résolubilité microlocale (dans un cadre bien plus général que celui traité ici) dans

M. Kashiwara - P. Schapira, *A vanishing theorem for a class of systems with simple characteristics*, Inventiones Math. **82** (1985), 579-592.

En ce qui concerne des résultats *locaux* il convient de citer des résultats de J. - P. Rosay valables pour des calottes sphériques et des résultats complets pour des régions géométriquements régulières de l'hyperquadrique $\mathrm{Im}\, w = |z_1|^2 + \dots + |z_\nu|^2 - |z_{\nu+1}|^2 - \dots - |z_n|^2$ de P. Cordaro (thèse 1984).