JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

PATRICK GÉRARD

Régularité de moyennes de solutions d'équations aux dérivées partielles

Journées Équations aux dérivées partielles (1987), p. 1-8

<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1987____A9_0>

REGULARITE DE MOYENNES DE SOLUTIONS D'EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

Patrick GERARD

0. Position du problème.

Dans l'espace $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d$, on considère un opérateur différentiel (ou pseudodifférentiel classique) $P = P(x,y,D_x,D_y)$, d'ordre m.

Si $u=u(x,y)$ est une solution de l'équation

(1) $$Pu=f,$$

on s'intéresse à la régularité de $v(x) = \int u(x,y)dy$, lorsque cette intégrale est bien définie (par exemple: u est à support compact en y). On s'attend à ce que l'information microlocale apportée par (1), jointe à l'opération d'intégration dans la fibre, permette de gagner de la régularité sur v, par rapport à ce que l'on sait a priori sur u.

De façon précise: existe-t-il $\delta > 0$ tel que l'hypothèse :

$u \in H^{m-1}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d)$ et $Pu \in L^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d)$, u à support compact en y,

entraîne : $v = \int u dy \in H^{m-1+\delta}(\mathbb{R}^n)$?

Notons que, sous cette forme, le problème est de nature complètement microlocale, et P n'y intervient que par son symbole principal $p=p(x,y,\xi,\eta)$, fonction homogène de degré m sur $T^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d)$.

On peut bien sûr donner une version plus intrinsèque du problème en considérant un espace fibré F au-dessus d'une variété X, u étant une distribution-densité sur F, solution d'une équation aux dérivées partielles; la quantité étudiée est alors $v=\pi_* u$, image directe de u par la projection canonique $\pi: F \to X$.

Nous présentons ici (au §2) une condition suffisante (générique) sur le symbole p pour que le gain δ soit optimal (pour des opérateurs de type principal du moins) et égal à 1/2. Pour motiver les hypothèses et orienter éventuellement vers des résultats plus complets, nous rappelons au §1 le cas simple où $P=P(y,D_x)$ est une famille d'opérateurs à coefficients constants en x, le problème ci-dessus étant alors complètement résolu par F.Golse, P.L.Lions, B.Perthame et R.Sentis dans [5] (cf. aussi [3]). Enfin, au §3, nous montrons sur un exemple simple (équation de Vlasov-Poisson en dimension 1 d'espace) comment ce type de résultat, convenablement généralisé, peut être appliqué à l'étude des solutions faibles de certaines équations de la cinétique physique.

Remarque: puisque l'on se permet de considérer des opérateurs pseudo-différentiels, on peut évidemment supposer m=1, ce que nous ferons désormais.

1.Cas d'une famille d'opérateurs à coefficients constants.

Dans le problème ci-dessus, il semble assez raisonnable de négliger en première approximation la présence de D_y dans l'opérateur P; en effet, la quantité $\int u dy$ ne dépend (du point de vue des singularités) que du comportement de u près de $\eta=0$. On est ainsi ramené à une famille d'opérateurs $P=P(x,D_x,y)$ dépendant du paramètre y; le théorème ci-dessous résout complètement le problème lorsque les coefficients de P ne dépendent pas de x.

Théorème.(Golse-Lions-Perthame-Sentis [5]). On désigne par λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$. Les conditions suivantes sont équivalentes:

(i) On a l'implication:

$$(u \in L^2,\ P(y,D_x)u \in L^2,\ u \text{ à support compact en } y) \Rightarrow \int u dy \in H^\delta.$$

(ii) $\delta \leqslant 1$ et, pour tout R>0, il existe une constante C(R)>0 telle que:

$$\lambda\,\{y,\ |y| \leqslant R,\ |p(y,\xi)| \leqslant \varepsilon\} \leqslant C(R)\,\varepsilon^{2\delta}, \text{ lorsque } \varepsilon \to 0, \text{ uniformément en } \xi \in S^{n-1}$$

On renvoie à [5] ou à [3] pour la démonstration.

Remarques.

1. Le gain de régularité δ est donc d'autant plus grand que les tubes autour de $\{p=0\}$ sont petits relativement à λ. Lorsque p est de type principal réel (non elliptique!), on s'attend donc à ce que la situation la plus favorable soit celle où la variété caractéristique est lisse par rapport à y, auquel cas (ii) est vérifié pour $\delta=1/2$.

2. Une façon rigoureuse de constater que $\delta=1/2$ est le gain optimal dans ce cas est de raisonner comme suit:
par hypothèse, on peut supposer que $\partial_{\xi_n} p\neq 0$ microlocalement, donc que l'opérateur P est (microlocalement) hyperbolique par rapport à $x_n=0$; on peut alors résoudre (microlocalement) le problème de Cauchy $Pu=0$, $u_{|x_n=0}=u_0$, avec $u_0(x',y)=v(x')\psi(y)$, où $\psi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, d'intégrale égale à 1, v étant donnée arbitrairement dans $L^2(\mathbb{R}^{n-1})$. Alors $u\in L^2$, et donc, si p donne lieu à un gain de δ dérivées par moyennisation, on a $\int u dy\in H^\delta$, de trace v sur $x_n=0$, et le théorème de trace pour les espaces de Sobolev impose $\delta\leqslant 1/2$.

3. Le théorème ci-dessus a été initialement motivé par le cas de l'opérateur de transport $P=\partial_t+y.\partial_x$, qui vérifie (ii) avec $\delta=1/2$. En appliquant la construction ci-dessus à cet opérateur, on retrouve la formule classique de relèvement de la trace de H^s à $H^{s+1/2}$:

$$w(t,x)=\int v(x-ty)\psi(y)dy.$$

4. Si l'on s'intéresse à un résultat analogue dans les autres espaces L^p, on constate qu' il n'y a de régularisation ni dans L^1 ni dans L^∞(cf. [5]). Les autres cas s'en déduisent par interpolation, et L^2 est donc l'espace où la moyennisation "régularise le mieux".

5. Le théorème ci-dessus admet un certain nombre de généralisations à des familles générales d'opérateurs $P=P(x,y,D_x)$. (cf. [3])

2. Le cas général sous une hypothèse de transversalité.

L'hypothèse de transversalité citée dans la remarque 1 ci-dessus admet une version invariante qui conduit au théorème suivant:

Théorème. Soit $p=p(x,y,\xi,\eta)$ un symbole réel homogène de degré 1 sur $T^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p)$. On suppose que, sur la variété caractéristique $\{p=0\}$, le champ hamiltonien de p est transversal à la variété $\{\eta=0\}$ des covecteurs horizontaux. Alors, si P est un opérateur pseudodifférentiel de symbole principal p, on a l'implication:

$(u \in L^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d)$, $Pu \in L^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d)$, u à support compact en y$) \Rightarrow \int u dy \in H^{1/2}(\mathbb{R}^n)$.

<u>Esquisse de la preuve:</u>

a)Réduction microlocale.

Il suffit évidemment d'étudier u près de chaque point $(x_0,y_0,\xi_0,0)$ caractéristique pour p. On peut donc par exemple supposer que $\partial p/\partial y_1 \neq 0$. Alors $p=e(y_1+a)$, où $e=e(x,y,\xi,\eta)$ est elliptique d'ordre 1, et $a=a(x,y',\xi,\eta)$ est réel d'ordre 0. On est alors ramené à $u \in L^2$, $(y_1+a(x,y',D_x,D_y))u \in H^1$.

b)Réduction à un problème d'évolution.

Par transformation de Fourier en y_1, on a:

$\hat{u} \in L^2$, $(D_{\eta_1}+A(\eta_1))\hat{u} \in L^2(H^1)$, où $\hat{u}(x,y',\eta_1)=\int e^{-iy_1\eta_1}u(x,y)dy_1$, et $A(\eta_1)=a(x,y',D_x,D_{y'},\eta_1)$ est une famille régulière et bornée d'opérateurs pseudodifférentiels d'ordre 0, à symbole principal réel. Alors $\int u dy_1$ n'est autre que $\hat{u}_{|\eta_1=0}=\hat{u}_0$. On procède alors suivant la méthode d'énergie classique:

$$\|\hat{u}_0\|^2 = 2\mathrm{Im}\int_0 (\Lambda^{1/2}D_{\eta_1}\hat{u},\Lambda^{1/2}\hat{u})d\eta_1$$
$$= 2\mathrm{Im}\int_0 (\Lambda(D_{\eta_1}+A)\hat{u},\hat{u})d\eta_1 - 2\mathrm{Im}\int_0 (\Lambda^{1/2}A\hat{u},\Lambda^{1/2}\hat{u})d\eta_1,$$

et on conclut en utilisant le fait que A est à symbole principal réel.

c)Conclusion.

Par b) $\int u dy_1 \in H^{1/2}(dxdy')$, et est par hypothèse à support compact en y',
donc $\int u dy \in H^{1/2}$, q.e.d.

Remarques.

1) Le fait que p soit réel joue un rôle crucial dans la preuve ci-dessus; l'exemple suivant montre que le théorème précédent est faux pour un symbole complexe:

Notons $P= y\partial_x+i\partial_y$ dans $\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y$. Soit $u(x,y)=2\int a(x-x')/(y^2-2ix')dx'$. Alors $Pu=0$, et $\hat{u}(\xi,y)= e^{-y^2\xi/2}\hat{a}(\xi)\ 1_{\{\xi>0\}}$, d'où l'on déduit que $u \in L^2$ dès que $a \in H^{-1/4}$. Mais $\int \hat{u}(\xi,y)dy = c1_{\{\xi>0\}}\hat{a}(\xi)/\xi^{1/2}$ donc $\int u dy \in H^{1/4}$ et pas mieux en général. (tronquer éventuellement u en y si l'on désire que le support en y soit compact).

2) Dans le cas d=1 (une seule variable de fibre), l'hypothèse de support compact en y n'est plus nécessaire (moyennant des hypothèses convenables sur le comportement de p à l'infini): on obtient alors un théorème d'existence et de régularité pour la moyenne $\int u dy$, tout-à-fait comparable au théorème de trace pour les solutions d'opérateurs strictement hyperboliques.

3) Le théorème ci-dessus et sa preuve s'étendent immédiatement au cas où P est un opérateur paradifférentiel à régularité lipschitzienne au sens de [1], [4] , sous réserves que la factorisation microlocale faite en a) ait lieu avec des symboles e et a qui soient eux-mêmes à régularité lipschitzienne.

3. Un exemple d'application aux équations cinétiques.

Nous allons appliquer les méthodes ci-dessus à l'équation de Vlasov-Poisson en dimension 1 d'espace:

Dans $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_v$ on cherche $f=f(t,x,v)$ et $E=E(t,x)$ vérifiant:

(1) $(\partial_t+v\partial_x+E\partial_v)f=0$; (2) $\partial_x E=\int f dv$, avec des données de Cauchy f_0 et E_0

Pour une présentation des équations de Vlasov, on renvoie à [2] et à sa bibliographie.

Pour une telle équation, on montre sans difficulté l'existence de solutions faibles avec $f_0 \in L^1$. Le champ E est alors naturellement absolument continu en x. Nous nous proposons ici d'étudier les solutions faibles dans le cadre L^2, et tout particulièrement la régularité du champ E.

<u>Notations:</u> on pose $H^{s-0}=\bigcap_{\varepsilon>0} H^{s-\varepsilon}$; $H^s_{ul}(\mathbb{R})=\{u \in H^s_{loc}(\mathbb{R}),\ \sup_{n\in\mathbb{Z}} \|u\|_{H^s(n,n+1)} <+\infty\}$

Théorème. Si $f_0 \in L^1 \cap L^2$, alors il existe une solution faible (f,E) vérifiant $f \in C_w(\mathbb{R}_t, L^1\cap L^2)$, $E \in L^2_{loc}(\mathbb{R}_t, H^{3/2-0}_{ul}(\mathbb{R}_x))$.

De plus, si $vf_0 \in L^1\cap L^2$, alors $\partial_t E \in L^2_{loc}(\mathbb{R}_t, H^{1/2-0}_{ul}(\mathbb{R}_x))$.

<u>Esquisse de la preuve:</u> nous montrons comment obtenir les estimations a priori souhaitées de f et de E.

a) La divergence du champ de transport étant nulle, toutes les normes L^p $(1\leqslant p\leqslant\infty)$ de f sont conservées au cours du temps. En particulier $\|f(t)\|_{L^1}=\text{cste}$ et $\|f(t)\|_{L^2}=\text{cste}$.

b) Pour étudier E, on paralinéarise en x l'équation (1) dans l'esprit de [1] : $(\partial_t+v\partial_x+T_E\partial_v)f=g \in L^2_{loc}(\mathbb{R}_t, H^{1-\varepsilon}(\mathbb{R}_x,H^{-1}(\mathbb{R}_v)))$ pour tout $\varepsilon>0$, la norme de g dans $L^2(0,T;H^{1-\varepsilon}(\mathbb{R}_x,H^{-1}(\mathbb{R}_v)))$ étant contrôlée par celle de E dans $L^2(0,T;H^{3/2-\varepsilon}_{ul}(\mathbb{R}_x))$ (que nous noterons $\|E\|$). Une fois microlocalisé en (x,v) près de $\eta=0$ (où η est la variable duale de v), on peut écrire: $f \in L^2([0,T]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ et $(v+D_x^{-1}D_t+D_x^{-1}T_ED_v)f \in L^2([0,T]\times\mathbb{R}_v; H^{1-\varepsilon}(\mathbb{R}_x))$.

c) En considérant t comme un paramètre, on peut alors employer la méthode d'énergie en η décrite au §2.b, en utilisant le calcul paradifférentiel de régularité $C^{1-\varepsilon}$ de [1]. On obtient:

$$\left\| \int f dv \right\|_{L^2(0,T;H^{1/2-\varepsilon/2})} \leqslant C\,(1+\|E\|)^{1/2}$$

d) De l'équation de Poisson (2), on déduit: $\|E\| \leqslant C\,(1+\|E\|)^{1/2}$, ce qui achève la démonstration.

e) Pour estimer $\partial_t E$, il suffit de dériver (2) par rapport au temps et d'utiliser (1): $\partial_x \partial_t E = -\partial_x \int vf dv$. Par ailleurs (1) donne: $(\partial_t + v\partial_x + E\partial_v) vf = Ef \in L^1 \cap L^2$ d'après ci-dessus; si donc $vf_0 \in L^1 \cap L^2$, il suffit de reprendre les étapes a, b, c, d avec vf au lieu de f. q.e.d.

Remarque:

La nécessité d'introduire ε dans la preuve précédente est technique: elle est à rapprocher du fait classique que le paraproduit par une fonction de $H^{n/2}(\mathbb{R}^n)$ n'opère pas sur $L^2(\mathbb{R}^n)$, mais envoie cet espace dans H^{-0}. Cela a par exemple pour conséquence que $H^{n/2}(\mathbb{R}^n)$ n'est pas une algèbre, mais que $H^{n/2-0}(\mathbb{R}^n)$ en est une. Hormis ce détail, le résultat de régularité de E obtenu ci-dessus est optimal: si en effet on a $E \in L^2_{loc}(\mathbb{R}_t, H^{3/2+\delta}_{ul}(\mathbb{R}_x))$ et $\partial_t E \in L^2_{loc}(\mathbb{R}_t, H^{1/2+\delta}_{ul}(\mathbb{R}_x))$ avec $\delta \geq 0$, on en déduit $E_0 \in H^{1+\delta}_{ul}(\mathbb{R}_x)$, donc $\int f_0 dv \in H^{\delta}(\mathbb{R}_x)$, ce qui nécessite $\delta = 0$.

Bibliographie.

[1] J.-M.BONY: Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations non linéaires. Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure, 14, 1981, pp.209-246.

[2] P.DEGOND: Régularité de la solution des équations cinétiques en Physique des plasmas. Séminaire Equations aux dérivées partielles 1985-1986, Exposé n°18, Ecole Polytechnique, Paris.

[3] P.GERARD: Moyennes de solutions d'équations aux dérivées partielles. Séminaire Equations aux dérivées partielles 1986-1987, Exposé n°11, Ecole Polytechnique, Paris (à paraître).

[4] P.GERARD-J.RAUCH: Propagation de la régularité locale de soluitons d'équations hyperboliques non linéaires. A paraître aux Annales de

l'Institut Fourier.

[5] F.GOLSE-P.L.LIONS-B.PERTHAME-R.SENTIS: Regularity of the moments of the solution of a transport equation. A paraître au Journal of Functional Analysis.

Patrick GERARD

Département de Mathématiques

Ecole Normale Supérieure

45, rue d'Ulm

75 230 PARIS cedex 05