JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

JEAN BELLISSARD

États localisés du rotateur pulsé

Journées Équations aux dérivées partielles (1990), p. 1-14

<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1990____A13_0>

Etats Localisés du Rotateur Pulsé

J. BELLISSARD *

Centre de Physique Théorique **

CNRS-Luminy, Case 907

F-13288, MARSEILLE, CEDEX 09 (FRANCE)

Contribution à la Conférence "Equations aux Dérivées Partielles",

St Jean-de-Monts, 28 Mai-1° Juin 1990.

Juin 1990

* Université de Provence, Marseille

** Laboratoire Propre, Centre National de la Recherche Scientifique

Etats Localisés du Rotateur Pulsé.

J. Bellissard

Université de Provence &
Centre de Physique Théorique , CNRS-Luminy , Case 907
F-13288 Marseille Cedex 09 , France

1. Introduction

Considérons un opérateur autoadjoint H_0 défini sur un domaine $\mathcal{D}$ de l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Soit $t\in \mathbf{R} \to V(t) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ une fonction continue en norme, périodique de période T à valeurs dans l'espace $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ des opérateurs linéaires bornés de $\mathcal{H}$. Considérons l'équation de Schrödinger dépendant du temps:

$$i\partial\psi/\partial t = H(t)\psi \qquad\qquad H(t) = H_0 + V(t) . \tag{1}$$

Pour étudier le comportement asymptotique sur le long terme des solutions, nous disposons de deux types d'outils. Tout d'abord, l'opérateur de Floquet U_t, c'est-à-dire l'opérateur unitaire décrivant l'évolution entre les instants t et t+T . Si $\psi(t)$ est une solution quelconque de (1), il est défini par :

$$U_t\, \psi(t) = \psi(t+T). \tag{2}$$

Il satisfait à la relation de causalité et de plus $U_{t+T} = U_t$, si bien que :

$$\psi(t+nT) = U_t^{\,n}\psi\,(t). \tag{3}$$

Ainsi le comportement à long terme des solutions sera entièrement décrit par les propriétés spectrales de cet opérateur. Par exemple, si λ est une valeur propre de U_t, de vecteur propre ψ_0, il existera une unique solution de (1) telle que $\psi(t+nT) = \lambda^n\psi_0$ quel que soit $n\in \mathbf{Z}$. Comme l'opérateur de Floquet est unitaire nous en tirons $|\lambda| = 1$, si bien que cette solution est quasi-périodique par rapport au temps. Au contraire, si ψ_0 appartient à l'espace spectral

absolument continu de U_t, $\psi(t+nT)$ s'éloignera de toute condition initiale en un temps court. Remarquons que U_t et $U_{t'}$ sont unitairement équivalents, quels que soient t et t'.
Le deuxième outil est constitué de l'opérateur de "quasi-énergie" introduit par J.Howlands [1] par analogie avec le cas des systèmes hamiltoniens classiques non autonomes, et étudié par K.Yajima [2]. Il est défini comme l'opérateur

$$K = -i\partial/\partial t + H(t) = K_0+V(t), \tag{4}$$

agissant sur l'espace $\mathcal{K}= \mathcal{L}^2(\mathcal{R}/T\mathcal{Z})\otimes\mathcal{H}$ avec les conditions aux bords périodiques par rapport à t.
Ces deux outils sont reliés au moyen du théorème de K.Yajima [2] :

Théorème 1 Les opérateurs e^{iTK} est $1\otimes U_t$ sont unitairement équivalents pour tout t.

◊

2. Les modèles de rotateurs

Nous allons désormais nous restreindre au cas pour lequel $\mathcal{H}$ est l'espace $\mathcal{L}^2(\mathcal{T})$ où **T** est le tore $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$, et $H_0 = -\alpha\partial^2/\partial x^2$, les conditions aux bords étant prises périodiques. Soit v(x,t) une fonction à valeurs réelles périodique de période 2π dans chacune des variables x et t, le modèle du rotateur est fourni par l'hamiltonien

$$H(t) = -\alpha\partial^2/\partial x^2 + v(x,t), \tag{5}$$

Deux cas ont été considérés pour leur intérêt physique et/ou mathématique :

(i) Le rotateur "pulsé" pour lequel v(x,t) est une fonction régulière des deux variables (x,t). En pratique v est soit holomorphe dans une bande au voisinage des réels [3], soit de classe $\mathcal{C}^k$ pour k assez grand [4].

(ii) Le cas discret ou "rotateur frappé" pour lequel $v(x,t) = V(x) \sum_{n\in Z} \delta(t-2\pi n)$, où V est une fonction régulière de x. Ce cas est plus difficile à traiter mathématiquement, mais il est beaucoup plus simple à étudier par les méthodes numériques. De plus il présente beaucoup plus de richesse de comportement si bien qu'il constitue l'un des modèles les plus connus des physiciens [5].

Remarquons que le paramètre α représente le rapport entre la période du potentiel v à celle du rotateur quantique libre représenté par H_0. C'est donc un paramètre intrinsèque du problème. Nous dirons qu'il y a résonance si ce rapport est un nombre rationnel. Nous dirons qu'il y a résonance faible si ce rapport est un nombre de Liouville, c'est-à-dire s'il existe une suite p_n/q_n de rationels pour laquelle $|\alpha-p_n/q_n| < q_n^{-n}$. Sinon, nous dirons que le modèle est non résonnant.

Par ailleurs, la limite $\alpha \to 0$ correspond à la limite semi-classique, pour laquelle l'évolution présente toutes les caractéristiques des mouvements hamiltoniens classiques : orbites périodiques, théorème KAM et tores invariants, ilôts de stabilité, régions chaotiques. Cette situation est trop compliquée à étudier dans l'état actuel de la situation et nous l'ignorerons dans la suite.

Si v=0, les cas résonnant et non résonnant se distinguent déjà. En effet le spectre de $K_0=-i\partial/\partial t-\alpha\partial^2/\partial x^2$ s'obtient au moyen des monômes trigonométriques à savoir les fonctions $e_{m,n}(t,x) = e^{i(mt+nx)}$, qui constituent une base de vecteurs propres de K_0 pour les valeurs propres $m+\alpha n^2$. De même, la famille $e_n = e^{inx}$, est une base de vecteurs propres de l'opérateur de Floquet libre U_0, pour les valeurs propres $\exp\{2i\pi\alpha n^2\}$. Nous remarquons que si $\alpha=p/q$ (p et q sont des entiers premiers entre eux) , le spectre de K_0 est formé d'une famille discrète de valeurs propres de multiplicité infinie, tandis que celui de U_0 est constitué d'une famille finie de valeurs propres de multiplicité infinie. Au contraire, si α est irrationnel, le spectre de K_0 est purement ponctuel mais dense dans **R** (théorème de H.Weyl [6]), tandis que celui de U_0 est purement ponctuel et dense dans le cercle unité.

Question : ces propriétés sont-elles stables par perturbation de la dynamique?

Dans le cas du rotateur frappé, on calcule l'opérateur de Floquet comme suit :

$$U_V = U_0\, e^{iV} \qquad\qquad U_0= \exp\{-2i\pi\alpha\partial^2/\partial x^2\}. \tag{6}$$

Comme e^{iV} est un opérateur de multiplication dans l'espace des positions, et que U_0 est aussi un opérateur de multiplication, mais dans l'espace des impulsions (transformée de Fourier), on calcule aisément l'évolution d'un état initial sur ordinateur, grâce à un algorithme de transformée de Fourier rapide [7].

3. Quelques résultats

Dans le cas résonnant le premier résultat est dû à F.M.Izrailev et D.L.Shepelyanski [8]

Théorème 2 Si $\alpha=p/q$, alors génériquement pour V dans l'espace $\mathcal{C}(\mathcal{T})$ des fonctions continues sur le tore, le spectre de l'opérateur de Floquet U_V du rotateur frappé, est absolument continu. Si V est assez petit en norme, ce spectre est formé d'un nombre fini de bandes. De plus, l'énergie cinétique moyenne $\mathcal{E}_\phi(t) = \langle\phi \mid {U_V}^t H_0 {U_V}^{-t} \phi\rangle$ (où $t\in \mathbf{Z}$, et $\phi\in \mathcal{H}$, $\|\phi\|=1$), se comporte à long terme comme

$$\mathcal{E}_\phi(t) \approx \eta\, t^2 + O(t), \tag{7}$$

où η est une constante numérique positive qui dépend de p et de q.

◊

Le second résultat concerne le cas faiblement résonnant. Il a été démontré par G.Casati et I.Guarneri [9]:

Théorème 3 Il existe un sous ensemble $\mathcal{L}$ de $\mathbf{R}$ qui est un G_δ dense, tel que génériquement pour V dans l'espace $\mathcal{C}(\mathcal{T})$ et si $\alpha\in \mathcal{L}$, le spectre de l'opérateur de Floquet U_V du rotateur frappé soit purement continu. L'énergie cinétique moyenne, $\mathcal{E}_\phi(t)$ est alors non bornée par rapport à t.

◊

En pratique, $\mathcal{L}$ est défini par la donnée de deux constantes positives C_1 et C_2, comme l'ensemble des nombres α pour lesquels il existe une suite p_n/q_n de rationnels telle que $|\alpha-p_n/q_n| < C_1\, e^{-C_2 q_n}$. Par ailleurs, G.Casati et al. [10] ont calculé numériquement le comportement de l'énergie cinétique moyenne au cours du temps. De leur étude on déduit qu'à long terme, $\mathcal{E}_\phi(t)\approx$cst. t^σ où σ est un exposant compris entre 1 et 2 qui dépend de façon cruciale des propriétés arithmétiques du nombre α.

En réalité, l'ensemble $\mathcal{L}$ est de mesure de Lebesgue nulle. Rappelons que α est un nombre diophantien, s'il existe deux constantes $C>0$ et $\sigma>1$ telles que

$$|\alpha-p/q| \geq C\, q^{-\sigma} \qquad \forall\, p/q \in \mathbf{Q}. \tag{8}$$

La question principale qui nous préoccupe ici est de résoudre la conjecture suivante :

Conjecture Si α est diophantien, et si V est une fonction régulière de la variable x (par exemple holomorphe dans une bande autour des réels), le spectre de l'opérateur de Floquet U_V du rotateur frappé est purement ponctuel.

◊

Cette conjecture s'appuie sur un très grand nombre de résultats numériques ainsi qu'un certain nombre d'arguments théoriques convaincants mais non rigoureusement démontrés. Le premier de ces arguments est dû à D.R.Grempel, S.Fishman et R.E.Prange [7], qui ont établi une analogie entre le cas du rotateur frappé et le problème de la localisation d'Anderson pour les chaînes unidimensionelles désordonnées en Physique du Solide. Cette idée fut complétée par un argument de B.V.Chirikov, F.M.Izrailev et D.L.Shepelyansky [11] au terme duquel, la longueur de localisation est proportionnelle à la constante de diffusion du modèle classique associé. Bien que cette relation ne soit pas établie sur des arguments théoriques très fermes, elle est très largement confirmée par les résultats numériques [12]. Nous allons voir que la solution de ce problème est difficile à établir, et c'est pourquoi il est utile de se restreindre à un problème plus accessible, à savoir celui du rotateur frappé, pour lequel nous possédons le résultat suivant dû à J.Bellissard [3] :

Théorème 4 Considérons l'opérateur de quasi-énergie du rotateur pulsé $K=K_0+\mu V$, où $K_0=-i\partial/\partial t-\alpha\partial^2/\partial x^2$, et V est l'opérateur de multiplication par la fonction $v(x,t)$. Nous supposons que v est une fonction périodique de période 2π par rapport aux deux variables (x,t), prolongeable en une fonction holomorphe dans la bande $B(r)=\{|\mathrm{Im}(x)|<r,\ |\mathrm{Im}(t)|<r\}$.

Alors, $\forall\varepsilon>0$, et $\forall\rho\in\,]0,r[$, nous pouvons trouver un sous ensemble fermé Ω de $[1,\infty[$, dont le complémentaire est de mesure de Lebesgue inférieure ou égale à ε, ainsi qu'une constante $\mu_c>0$ tels que si $\alpha\in\Omega$ et si $|\mu|<\mu_c$, alors :

1°)- le spectre de K est purement ponctuel.

2°)- les valeurs propres de K sont de la forme

$$E_{m,n}= m+\alpha n^2+g(\alpha,\mu;n) \qquad (m,n)\in \mathbb{Z}^2, \tag{9}$$

où g est une fonction Lipschitzienne de α, analytique par rapport à μ dans le disque $|\mu|<\mu_c$, et uniformément bornée par rapport à n.

3°)- les états propres correspondants $\psi_{m,n}$ satisfont à la propriété de localisation exponentielle dans l'espace des impulsions à savoir :

$$|<\psi_{m,n} \mid e_{m',n'}>-\delta_{m,m'}\delta_{n,n'}| \leq O(\mu)\ e^{-(r-\rho)\{||n|-|n'||+|m-m'|\}}. \tag{10}$$

Ils sont de plus, pour la topologie forte, Lipschitziens par rapport à α, analytiques par rapport à μ dans le disque $|\mu|<\mu_c$, uniformément en m,n.

4°)- la constante critique μ_c est majorée par :

$$\mu_c \leq \text{const.}\ \rho^{2\sigma+1}\varepsilon^2\ . \tag{11}$$

◊

Ce résultat, fondé sur la stratégie du théorème KAM, a été complété par M.Combescure [4] dans le cas où la fonction v(x,t) est de classe C^k, pour k assez grand, par l'utilisation de la méthode de Nash et Moser .

4. Stratégie pour une preuve de la conjecture à petit couplage

L'idée principale de la preuve remonte à Jacobi, qui avait proposé de calculer en mécanique classique, non pas directement les solutions de l'équation du mouvement, mais un changement de coordonnées canoniques rendant élémentaire l'équation du mouvement à résoudre. En mécanique quantique, un changement de coordonnées canoniques n'est autre qu'un changement de base effectué au moyen d'un opérateur unitaire [13].

Dans le cas du rotateur frappé, si nous nous bornons à examiner le cas d'un petit couplage, l'opérateur de Floquet est proche de celui obtenu dans le cas libre. Il est donc naturel de choisir comme base de référence la base de Fourier qui diagonalise le cas libre. Nous nous proposons donc de construire un opérateur unitaire R tel que

$$RU_VR^{-1} = U_\infty \qquad \text{soit diagonal dans la base de Fourier.} \tag{12}$$

La deuxième idée consiste à effectuer un développement de R et de U_V en série formelle de V, et de résoudre le problème au premier ordre tout d'abord. En remarquant que $U_V=U_0e^{iV}$ nous chercherons U_∞ sous la forme $U_\infty=U_0e^{iu}$ dans laquelle u sera un opérateur diagonal en représentation de Fourier, et R sous la forme $R=e^{iw}$, de sorte que l'équation au premier ordre en V sera "l'équation linéarisée" suivante dans laquelle w et u sont les inconnues :

$$U_0^{-1}w\, U_0 - w + V = u \tag{13}$$

La solution de cette équation conduit alors à l'apparition de "petits diviseurs", qui constitue la difficulté majeure dans ce type de problème et sur laquelle nous reviendrons plus loin.
Remarquons que l'hypothèse d'analyticité de V dans une bande $B(r)=\{x\in \mathbf{T}+i\mathbf{R};\ |\mathrm{Im}(x)|<r\}$, implique un développement de Fourier de V décroissant exponentiellement vite avec un taux de décroissance égal à r. On est donc amené à définir sur l'espace des opérateurs que nous regarderons, un norme $\|\,.\,\|_r$ tenant compte de cette décroissance. Nous préciserons la nature de cette norme ultérieurement.
Dans les cas déjà résolus, comme par exemple celui du rotateur pulsé, la solution de l'équation linéarisée définit un opérateur w dont la matrice en représentation de Fourier décroît moins vite que celle de V et satisfait une estimation du type

$$\| w \|_{r-\rho} < C\,\rho^{-\sigma}\, \| V \|_r\,, \qquad \forall\rho\,,\ 0<\rho<r, \tag{14}$$

dans laquelle σ est un exposant positif qui dépend du problème étudié et qui exprime l'apparition du petit diviseur. En d'autres termes il y a "perte d'analyticité" de w par rapport à V. Si l'on veut garder le plus de régularité possible, il faudra choisir ρ aussi petit que possible, rendant l'estimation (14) moins opérante. Si nous poursuivions la résolution de (12) perturbativement, nous pourrions alors montrer que l'accumulation des petits diviseurs conduirait à une divergence de la série de perturbation dont le terme d'ordre N croîtrait comme $(N!)^\tau$ pour un exposant $\tau>0$. Il faut donc trouver une autre méthode.

La troisième idée est due à Kolmogorov [14], qui a proposé d'utiliser une adaptation de la méthode de Newton pour poursuivre au delà du premier ordre. Dans notre cas, désignons par w_1, u_1 la solution de l'équation (13), et définissons V_1 comme l'opérateur tel que :

$$R_1 U_V R_1^{-1} = U_1 e^{iV_1}, \quad \text{avec} \qquad R_1 = e^{iw_1},\; U_1 = U_0 e^{iu_1}, \tag{15}$$

L'idée consiste à remplacer U_0 par U_1, V par V_1, et de recommencer la procédure. Par ce biais, nous obtenons par récurrence des opérateurs U_n, V_n, R_n, u_n, w_n, tels que u_n soit diagonal en base de Fourier et que :

$$\begin{aligned} &U_{n-1}^{-1} w_n U_{n-1} - w_n + V_n = u_n, \\ &R_n U_{n-1} R_n^{-1} = U_n e^{iV_n}. \end{aligned} \qquad R_n = e^{iw_n},\; U_n = U_{n-1} e^{iu_n}, \tag{16}$$

Nous espérons que la procédure converge c'est-à-dire que V_n converge vers zéro, tandis que U_n converge vers U_∞ et que le produit $R_n R_{n-1} \ldots R_1$ converge vers une limite R qui satisfasse (12) . A cet effet, nous poserons $\varepsilon_n = \| V_n \|_{r(n)}$, avec $0<\rho(n)=r(n-1)-r(n)<r(n-1)$. L'estimation (14) fournit alors :

$$\varepsilon_n < C\, \rho(n)^{-\sigma} \varepsilon_{n-1}^2. \tag{17}$$

Elevant les deux membres de cette équation à la puissance 2^{-n}, la suite ε_n vers zéro pourvu que (si $0<r_\infty<r$) :

$$\varepsilon_0 < C^{-1} \mathrm{Sup}\{\textstyle\prod_{n=1}^{\infty} \exp[\sigma 2^{-n} \mathrm{Ln}\rho(n)];\ \rho(n)>0,\ \sum_{n=1}^{\infty} \rho(n) = r - r_\infty\} \tag{18}$$

Il est alors aisé de se convaincre que la suite qui maximise le membre de droite de (18) est de la forme $\rho(n)=(r-r_\infty)2^{-n}$, conduisant à la convergence du procédé si

$$\varepsilon_0 < (1/4) C^{-1} (r-r_\infty)^\sigma . \tag{19}$$

L'avantage de cette méthode, si elle réussit, est de fournir des estimations puissantes sur les valeurs propres et sur les fonctions propres. En effet, puisque les opérateurs u_n sont diagonaux les valeurs propres de U_V ne sont autres que les éléments diagonaux de U_∞ qui se construit comme un produit infini convergeant. Par ailleurs, l'opérateur R fournit le changement de base qui permet de construire les vecteurs propres. C'est par ce biais que le théorème 4 permet d'obtenir autant de renseignements concernant les propriétés des valeurs propres et des états propres.

5. Un formalisme algébrique

Comme nous l'avons déjà indiqué, la grande difficulté concerne le traitement des petits diviseurs. A cet effet, il sera commode d'introduire un formalisme algébrique, à la fois pour décrire les opérateurs précédents et pour effectuer les estimations indispensables. Dans le problème du rotateur frappé, l'espace des états $\mathcal{L}^2(\mathcal{T})$ peut être identifié au moyen de la transformation de Fourier avec l'espace $\ell^2(\mathbf{Z})$ des suites de carré sommable sur le réseau unidimensionnel **Z**. Par ce biais, le problème est analogue à un problème de physique du solide. L'opérateur de Floquet libre est alors l'opérateur $\exp\{2i\pi\alpha N^2\}$ où N est l'opérateur de multiplication par n. Ici bien sûr, nous supposerons que α est diophantien. L'opérateur perturbé contient en outre un opérateur de convolution par la suite transformée de Fourier de e^{iV}, laquelle décroît exponentiellement vite si V est holomorphe dans une bande.
Comme dans un problème de physique du solide, nous sommes amenés à nous poser la question de savoir si l'opérateur ainsi défini est invariant par les translations le long du réseau. Désignons par T l'opérateur de translation d'un pas du réseau dans $\ell^2(\mathbf{Z})$. Clairement l'opérateur libre ne commute pas à T, tandis que V commute à T. Cependant, nous obtenons $T^a U_0 T^{-a} = \exp\{2i\pi\alpha(N+a)^2\}$. Introduisons les angles $x=\alpha a$ (mod.1) et $y=\alpha a^2$ (mod.1), de sorte à pouvoir écrire l'opérateur libre translaté sous la forme "générique"

$$U(x,y) = \exp\{2i\pi(\alpha N^2+2xN+y)\} \tag{20}$$

Si nous désignons par F_0 la fonction $F_0(x,y)=e^{2i\pi y}$ et si f est le difféomorphisme de $\mathbf{T}^2$ défini par :

$$f(x,y)= (x-\alpha,y-2x+\alpha), \tag{21}$$

U(x,y) n'est autre que l'opérateur de multiplication par $F_0 o f^n(x,y)$ dans $\ell^2(\mathcal{Z})$. Nous sommes donc amenés à introduire l'algèbre engendrée par les opérateurs de multiplication par $F o f^n(x,y)$ dans $\ell^2(\mathcal{Z})$, lorsque F est une fonction régulière des variables (x,y), et par l'opérateur de translation T. Sachant que la relation de commutation entre ces deux types d'opérateurs est donnée par :

$$TFT^{-1} = F o f , \tag{22}$$

l'algèbre obtenue n'est autre que le "produit croisé" [15] de l'algèbre abélienne $\mathcal{C}(\mathcal{T}^2)$ par l'action de **Z** définie par le difféomorphisme f. Cette algèbre est appelée "algèbre de Furstenberg", en hommage à l'étude du flot f effectuée par Furstenberg [16] en relation avec le problème des approximations diophantiennes. Clairement tous les opérateurs que nous avons introduits dans le paragraphe précédent sont des éléments de cette algèbre.
En réalité, l'équation linéarisée nous montre que nous n'avons pas besoin de tout cette algèbre dans le cas du rotateur frappé. En effet, il suffit de résoudre formellement l'équation (13) pour se convaincre que les opérateurs V, w, u, ne dépendent jamais de la variable y. Or l'équation (21), nous montre que f peut se restreindre à la seule variable x, auquel cas elle n'est autre que la rotation irrationnelle d'angle α. Il suffira donc de considérer l'algèbre produit croisé de $\mathcal{C}(\mathcal{T})$ par la rotation en question. Cette algèbre, appelée algèbre de la rotation irrationnelle et désignée par $\mathcal{A}_\alpha$ a été introduite et étudiée en 1979 par M.Rieffel [17]. C'est elle que nous allons décrire et exploiter.
Désignons par $\mathcal{C}_c^\infty(\mathcal{T}\times\mathcal{Z})$ l'espace des fonctions indéfiniment différentiables à support compact sur **TxZ**. Munissons cet espace de la structure de *-algèbre définie par

$$FG(x,n) = \sum_{m\in \mathbf{Z}} F(x,m)G(x-m\alpha,n-m) , \qquad F^*(x,n)=F(x-n\alpha,-n)^*. \tag{23}$$

Cette algèbre sera représentée sur l'espace $\ell^2(\mathcal{Z})$ au moyen de la famille π_x de représentations définies par

$$\pi_x(F)\psi (n) = \sum_{m\in \mathbf{Z}} F(x-n\alpha,m-n) \psi(n) , \tag{24}$$

Un opérateur de cette algèbre est diagonal si $F(x,n)=0$ si $n\neq 0$. Remarquons que $T\pi_x(F)T^* = \pi_{x-\alpha}(F)$, si bien que puisque α est irrationnel, le spectre de $\pi_x(F)$ ne dépend pas de x. La complétion de cette *-algèbre par rapport à la topologie définie par la norme de C*-algèbre suivante :

$$\| F \| = \sup_{x\in \mathbf{T}} \| \pi_x(F) \| , \tag{25}$$

définit la C*-algèbre $\mathcal{A}_\alpha$.

Pour ce qui nous concerne ici, nous avons en fait besoin d'une famille de sous *-algèbres denses reproduisant les propriétés de régularité des opérateurs considérés. Introduisons à cet effet les normes suivantes sur $C_c^\infty(\mathcal{T}\times\mathcal{Z})$ les normes suivantes, qui tiennent compte à la fois de la décroissance exponentielle en n, et de la régularité locale en x :

$$\| F \|_{r,\eta,K} = \sup_{x\in \mathbf{T}} \Sigma_{0\leq k\leq K}\, \eta^k/k!\, \Sigma_{n\in \mathbf{Z}}\, \mathrm{Max}\{|\partial^k F(x,n)|, |\partial^k F(x-n\alpha,-n)|\}\, e^{r|n|} \tag{26}$$

où ∂ représente la dérivation par rapport à x dans le tore $\mathbf{T}$. Il est facile de se convaincre qu'il s'agit d'une famille de normes de *-algèbres i.e. satisfaisant :

$$\| FG \|_{r,\eta,K} \leq \| F \|_{r,\eta,K} \| G \|_{r,\eta,K} , \qquad \| F^* \|_{r,\eta,K} = \| F \|_{r,\eta,K} , \tag{27}$$

Nous désignerons par $\mathcal{A}(r,\eta,K)$ l'algèbre obtenue par complétion, et par $\mathcal{D}(\eta,K)$ la sous-algèbre des éléments diagonaux , c'est-à-dire des éléments F tels que $F(x,n)=0$ si $n\neq 0$.

6. L'équation linéarisée

L'équation linéarisée (13) se traite alors en supposant que la solution cherchée w soit dans $\mathcal{A}(r,\eta,K)$, et u dans $\mathcal{D}(\eta,K)$. Nous remarquerons alors que l'action de la transformation unitaire U_0 revient à l'automorphisme suivant :

$$U_0^{-1}wU_0 = \beta(w), \qquad \beta(w)(x,n) = w(x,n)\exp\{2i\pi(2xn-\alpha n^2\} . \tag{28}$$

Si bien que l'équation linéarisée devient :

$$\beta(w) - w + V=u \in \mathcal{D}(\eta,K) . \tag{29}$$

La solution de cette equation s'écrit donc :

$$u(x) = V(x,0) , \qquad w(x,n) = V(x,n)\{1- \exp(2i\pi(2xn-\alpha n^2))\}^{-1}, \text{ si } n\neq 0 \tag{30}$$

Cette dernière expression est divergente aux points x tels que $2xn-\alpha n^2\approx 0$. Revenant au problème original, nous trouvons en ces points des valeurs propres quasi dégénérées du problème non perturbé. Après perturbation, ces valeurs propres vont donner lieu à un effet tunnel qui délocalisera la fonction d'onde entre les sites où étaient localisées les fonctions propres non perturbées correspondantes. Pour traiter cet effet, nous sommes amenés à effectuer une théorie de perturbation avec dégénérescence. Ceci revient à considérer comme opérateur non perturbé non plus un opérateur diagonal, mais un opérateur diagonal par blocs, chaque bloc étant relatif aux valeurs propres quasi dégénérées. Une telle construction a déjà été utilisée dans le cas du rotateur pulsé [3] pour tenir compte de la dégénérescence des valeurs propres $m+n^2\alpha$ liée à la symétrie n–>-n. Il convient donc de généraliser cette construction ici.

La difficulté est cependant plus grande ici, pour trois raisons :

1°)- à chaque étape des itérations KAM décrites au chapitre précédent, l'opérateur non perturbé change. Si bien que l'équation linéarisée n'est plus donnée par (29) mais devient :

$$U'^{-1}\beta(w)U' - w + V=u, \tag{31}$$

où U' est la modification apportée à U_0, et sera un opérateur diagonal par blocs.
2°)- La taille des blocs est liée au degré de précision requis à chaque itération KAM. Elle varie donc et croît à chaque étape, nécessitant un contrôle de cette croissance. En fait, cette croissance correspond à l'existence d'états localisés dans des régions de plus en plus grandes, ces états étant de plus en plus rares. On peut donc espérer ici contrôler l'asymptotique de la distribution des longueurs de localisation.
3°)- Même si nous parvenons à effectuer chaque récurrence, à contrôler les normes des opérateurs ainsi construits, l'opérateur U_∞ est le produit infini d'opérateurs diagonaux par blocs, les tailles des blocs étant non bornées. Ainsi, nous ne pouvons pas conclure quant au caractère ponctuel du spectre de cet opérateur. En fait, les grands blocs sont "rares", ce qui permet de montrer que "la plupart" du spectre est ponctuel. Cependant nous ne sommes pas encore parvenus à démontrer que tout le spectre est ponctuel.

7. Conclusion

Nous pensons que tous les ingrédients pour une preuve de la localisation dans le cas du rotateur frappé, similaire au théorème 4 ci-dessus, sont désormais réunis, avec cependant une réserve concernant le contrôle de la totalité du spectre. Nous espérons pouvoir fournir dans un temps raisonnable le détail des estimations qui sont trop longues à décrire ici.

Remerciements. Je voudrais remercier ici Michel Vittot, et Uzy Smilansky avec lesquels j'ai eu l'occasion d'éclaircir certaines questions délicates liées à ce problème.