

# JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

ALAIN BACHELOT

## **Opérateur de diffraction pour le système de Maxwell en métrique de Schwarzschild**

*Journées Équations aux dérivées partielles* (1990), p. 1-11

[http://www.numdam.org/item?id=JEDP\\_1990\\_\\_\\_A3\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1990___A3_0)

© Journées Équations aux dérivées partielles, 1990, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journées Équations aux dérivées partielles » (<http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/edpa/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# Opérateur de diffraction pour le système de Maxwell en métrique de Schwarzschild

Alain BACHELOT

**Abstract** - We study the electromagnetic scattering by spherical black-hole. Maxwell's equations are written in Schwarzschild coordinates : electromagnetic tensor is replaced with electric and magnetic fields in three dimensional absolute space. We introduce a set of wave operators,  $W_o^\pm, W_1^\pm$ , yielding an electromagnetic field given an asymptotic behavior far from the black-hole,  $W_o^\pm$ , and near the Schwarzschild radius,  $W_1^\pm$ , as universal time  $t \rightarrow \pm \infty$ . The long range interactions are eliminated by identifying the radial coordinate in asymptotic Minkowski space with Regge-Wheeler parameter. After a variables separation thanks to generalised vector spherical harmonics of Gel'fand and Šapiro, the existence of scattering operator is proved by using a Birman-Kato method, in particular, asymptotic completeness of  $W_1^\pm$  implies Damour-Znajek condition : near the horizon, the fields of finite redshifted energy are described by ingoing plane waves. The Membrane Paradigm is justified : scattering operator can be approximated by putting impedance condition on stretched horizon. We interpret these results on Kruskal universe : existence of  $W_{o,1}^-$  assures the characteristic Cauchy problem with data on past horizons is well posed in Schwarzschild submanifold, and asymptotic completeness of  $W_{o,1}^+$  allows to define the trace of the solution on future horizons.

## I - Equations de Maxwell dans l'espace-temps de Schwarzschild

On étudie le champ électromagnétique hors d'un trou noir sphérique de rayon  $r_o > 0$ , décrit par la métrique de Schwarzschild

$$(1) \quad ds^2 = \alpha^2 dt^2 - \alpha^{-2} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad , \quad \alpha = (1 - r_o r^{-1})^{1/2}, \quad r_o < r,$$

Cette métrique présente une singularité fictive à "l'horizon"  $\Gamma = \mathbb{R}_t \times \{r = r_o\} \times S^2$  et aucune géodésique nulle n'atteint  $\Gamma$  en un temps fini  $t$ . En coordonnée de Wheeler  $r_*$ , l'équation d'une géodésique radiale nulle est

$$(2) \quad t = \pm r_* + C \quad , \quad r_* = r + r_o \ln(r - r_o).$$

Dans le vide de Schwarzschild le tenseur de Maxwell  $F$  vérifie les équations :

$$(3) \quad dF = 0 \quad , \quad d \star F = 0,$$

où  $\star$  est l'opérateur de Hodge associé à la métrique (1). On décompose  $F$  en champs électrique et magnétique relativement au champ de vecteur  $u = \alpha^{-1} \partial_t$

$$E_\mu = F_{\mu,\nu} u^\nu, \quad B_\mu = -(\bullet F)_{\mu,\nu} u^\nu.$$

En posant

$${}^tU = (E^{\hat{r}}, E^{\hat{\theta}}, E^{\hat{\phi}}, B^{\hat{r}}, B^{\hat{\theta}}, B^{\hat{\phi}}) = (E, B),$$

où

$$X = X^{\hat{r}} \alpha \partial_r + X^{\hat{\theta}} r^{-1} \partial_\theta + X^{\hat{\phi}} (r \sin \theta)^{-1} \partial_\phi, \quad X = E, B,$$

les équations de Maxwell (3) prennent la forme familière

$$(4) \quad \partial_t U = -i H U, \quad \nabla_{\mathcal{G}} \cdot E = \nabla_{\mathcal{G}} \cdot B = 0,$$

avec

$$H = i \begin{pmatrix} 0 & \nabla_{\mathcal{G}} \times \alpha \\ -\nabla_{\mathcal{G}} \times \alpha & 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla_{\mathcal{G}} \times \alpha = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\alpha}{r \sin \theta} \partial_\phi & \frac{\alpha}{r \sin \theta} \partial_\theta \sin \theta \\ \frac{\alpha}{r \sin \theta} \partial_\phi & 0 & -\frac{\alpha}{r} \partial_r r \alpha \\ -\frac{\alpha}{r} \partial_\theta & \frac{\alpha}{r} \partial_r r \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

$$\nabla_{\mathcal{G}} \cdot X = \alpha r^{-2} \partial_r (r^2 X^{\hat{r}}) + (r \sin \theta)^{-1} [\partial_\theta (\sin \theta X^{\hat{\theta}}) + \partial_\phi X^{\hat{\phi}}]$$

S'il n'y a pas de trou noir  $\alpha = 1$  et on retrouve la dynamique libre exprimée en coordonnées sphériques dans l'espace-temps de Minkowski. On introduit l'espace de Hilbert d'énergie "décalée vers le rouge" finie:

$$\tilde{\mathcal{H}} = [L^2(r_\circ, +\infty[; r \times S_\omega^2, r^2 dr d\omega)]^6$$

et le sous espace des champs de divergence nulle :

$$\tilde{\mathcal{H}}^{(0)} = \{U \in \tilde{\mathcal{H}}, \nabla_{\mathcal{G}} \cdot E = \nabla_{\mathcal{G}} \cdot B = 0\}.$$

Comme dans le cas d'un obstacle dans l'espace euclidien le second espace de cohomologie est non trivial:

$$\mathbb{H}^2 = \{U \in \tilde{\mathcal{H}}^{(0)}, H U = 0\} = \{U = {}^t(a r^{-2}, 0, 0, b r^{-2}, 0, 0), a, b \in \mathbb{C}\}.$$

La théorie de la diffraction conduit naturellement à introduire l'orthogonal  $\mathcal{H}$  de  $\mathbb{H}^2$  dans  $\tilde{\mathcal{H}}^{(0)}$ :

$$\tilde{\mathcal{H}}^{(0)} = \mathcal{H} \oplus \mathbb{H}^2, \quad \mathcal{H} = \{U \in \tilde{\mathcal{H}}^{(0)}, \int E^{\hat{r}} dr d\omega = \int B^{\hat{r}} dr d\omega = 0\}.$$

On considère l'opérateur  $H$  comme un opérateur différentiel défini au sens des distributions

THEOREME 1 - Pour  $\mathcal{E} = \tilde{\mathcal{H}}, \tilde{\mathcal{H}}^{(0)}$  ou  $\mathcal{H}$ ,  $H$  est autoadjoint sur  $\mathcal{E}$ , de domaine dense  $D(H|_{\mathcal{E}}) = \{U \in \mathcal{E}, HU \in \mathcal{E}\}$ .

Le problème de Cauchy associé à (4) est ainsi résolu par le théorème de Stone.

La métrique de Schwarzschild admet des géodésiques fermées: tous les grands cercles de la sphère de rayon  $3r_g/2$  appelée sphère des photons. Il existe aussi des géodésiques nulles asymptotes à cette sphère. Les singularités des champs peuvent ainsi rester piégées; néanmoins il n'existe pas de solution périodique:

THEOREME 2 - Le spectre ponctuel de  $H$  sur  $\mathcal{H}$  est vide.

On en déduit la décroissance l'énergie locale et l'existence des opérateurs d'onde. L'étude du cas scalaire a été menée par Dimock [3].

## II - Opérateurs d'onde à l'infini

L'univers de Schwarzschild est asymptotiquement plat et loin du trou noir on compare l'hamiltonien  $H$  avec l'hamiltonien de l'électromagnétisme classique  $H_0$ :

$$H_0 = i \begin{pmatrix} 0 & rot \\ -rot & 0 \end{pmatrix},$$

dans l'espace de Minkowski muni de la métrique

$$ds^2 = dt^2 - d\rho^2 - \rho^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad 0 \leq \rho.$$

Le fait que les géodésiques radiales nulles dans l'espace de Schwarzschild admettent la même équation (2) que dans l'espace plat invite à identifier  $\rho$  et  $r_*$ . On évite ainsi les interactions de longue portée entre les champs gravitationnel et électromagnétique en choisissant

$$(5) \quad \rho = r_* \geq 0.$$

Plus précisément,  $H - H_0$  contient encore une perturbation de longue portée, mais par ce choix, celle-ci affecte seulement les composantes *radiales* qui décroissent plus vite que le champ total; cette conséquence fondamentale de l'invariance par rotation du système de Maxwell, compense l'effet longue portée et permet de construire les opérateurs d'ondes classiques sans les

modifications nécessaires dans le cas scalaire. On introduit les espaces usuels d'énergie finie:

$$\tilde{\mathcal{H}}_0 = \{U_0 = {}^t(E_0^{\hat{r}}, E_0^{\hat{\theta}}, E_0^{\hat{\phi}}, B_0^{\hat{r}}, B_0^{\hat{\theta}}, B_0^{\hat{\phi}}) \in [L^2(\mathbb{R}_{r_*}^+ \times S_\omega^2, r_*^2 dr_* d\omega)]^6\},$$

$$\mathcal{H}_0 = \{U_0 = {}^t(E_0, B_0) \in \tilde{\mathcal{H}}_0 ; \operatorname{div} E_0 = \operatorname{div} B_0 = 0\}.$$

Etant donnée une fonction de troncature  $\chi_0 \in C^\infty(\mathbb{R}_{r_*}^+)$  satisfaisant,  $\chi_0(r_*) = 0$  pour  $0 \leq r_* < a$ , et  $\chi_0(r_*) = 1$  pour  $r_* > b$ , avec  $0 < a < b$ , on construit un opérateur d'identification  $\mathcal{I}_0: \tilde{\mathcal{H}}_0 \rightarrow \tilde{\mathcal{H}}$  en posant :

$$\mathcal{I}_0 U_0 = \chi_0 U_0 \text{ for } r_* \geq 0, \quad \mathcal{I}_0 U_0 = 0 \text{ for } r_* \leq 0.$$

On définit les opérateurs d'onde classiques :

$$W_0^\pm U_0 = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{itH} \mathcal{I}_0 e^{-itH_0} U_0 \text{ dans } \tilde{\mathcal{H}}.$$

**THEOREME 3** - Les opérateurs  $W_0^\pm$  sont définis de  $\mathcal{H}_0$  dans  $\mathcal{H}$ , sont indépendants de  $\chi_0$  et  $\|W_0^\pm\| \leq 1$ .

### III - Opérateurs d'onde à l'horizon du trou noir

$H$  dégénère quand  $r \rightarrow r_0$ , mais  $r\alpha H(r\alpha)^{-1}$  admet une limite formelle  $H_1$

$$H_1 = i \begin{pmatrix} 0 & h_1 \\ -h_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad h_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\partial_{r_*} \\ 0 & \partial_{r_*} & 0 \end{pmatrix}.$$

$H_1$  est essentiellement l'hamiltonien de Maxwell dans la métrique de Rindler qui approche la métrique de Schwarzschild près de l'horizon. On introduit les espaces de Hilbert:

$$\tilde{\mathcal{H}}_1 = \{U_1 = {}^t(E_1^{\hat{r}}, E_1^{\hat{\theta}}, E_1^{\hat{\phi}}, B_1^{\hat{r}}, B_1^{\hat{\theta}}, B_1^{\hat{\phi}}) \in [L^2(\mathbb{R}_{r_*} \times S_\omega^2, dr_* d\omega)]^6\},$$

$$\mathcal{H}_1^\pm = \{U_1 \in \tilde{\mathcal{H}}_1 ; E_1^{\hat{r}} = B_1^{\hat{r}} = \pm E_1^{\hat{\theta}} + B_1^{\hat{\phi}} = \pm E_1^{\hat{\phi}} - B_1^{\hat{\theta}} = 0\}.$$

Les champs de  $\mathcal{H}_1^{+(-)}$  ont une polarisation gauche (droite) et se comportent comme des ondes planes tombant à travers l'horizon futur (émergeant de l'horizon passé) du trou noir:

$$U_1 \in \mathcal{H}_1^\pm \Rightarrow [e^{-itH_1} U_1](r_*, \omega) = U_1(\pm t + r_*, \omega).$$

Etant donnée une fonction de troncature  $\chi_1 \in C^\infty(\mathbb{R}_{r_*})$  satisfaisant  $\chi_1(r_*) = 1$  pour  $r_* < c$ ,  $\chi_1(r_*) = 0$  pour  $r_* > d$ , avec  $c < d < 0$ , on construit un opérateur d'identification  $\mathcal{I}_1: \tilde{\mathcal{H}}_1 \rightarrow \tilde{\mathcal{H}}$  en posant

$$\mathcal{I}_1 U_1 = (r\alpha)^{-1} \chi_1 U_1,$$

et on définit les opérateurs d'onde classiques:

$$W_1^\pm U_1 = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{itH} \mathcal{I}_1 e^{-itH_1} U_1 \text{ dans } \tilde{\mathcal{H}}.$$

Le potentiel de Schwarzschild étant exponentiellement décroissant quand  $r_* \rightarrow -\infty$ , on prouve par la méthode de Cook le:

**THEOREME 4** - Les opérateurs  $W_1^\pm$  sont définis de  $\mathcal{H}_1^\pm$  dans  $\mathcal{H}$ , sont indépendants de  $\chi_1$  et  $\|W_1^\pm\| \leq 1$ .

#### IV - Complétude asymptotique

Pour décrire le comportement du champ loin du trou noir on introduit l'opérateur

$$W_0 U = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{itH_0} \mathcal{I}_0^* e^{-itH} U \text{ dans } \tilde{\mathcal{H}}_0.$$

A l'infini de l'univers de Schwarzschild, le champ électromagnétique est asymptote à un champ libre dans l'espace de Minkowski:

**THEOREME 5** - L'opérateur  $W_0$  est défini de  $\mathcal{H}$  dans  $\mathcal{H}_0$ , est indépendant de  $\chi_0$  et  $\|W_0\| \leq 1$ .

Pour décrire le champ près du trou noir quand  $t \rightarrow +\infty$  on introduit l'opérateur

$$W_1 U = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{itH_1} \mathcal{I}_1^* e^{-itH} U \text{ dans } \tilde{\mathcal{H}}_1.$$

**THEOREME 6** - L'opérateur  $W_1$  est défini de  $\mathcal{H}$  dans  $\mathcal{H}_1^+$ , est indépendant de  $\chi_1$  et  $\|W_1\| \leq 1$ .

L'interprétation physique de ce résultat est la célèbre condition d'impédance de T.Damour [2]. Plus précisément le profil asymptotique des champs satisfait la condition dissipative de polarisation gauche rentrante:

THEOREME 7 - Soit  $U$  dans  $\mathcal{H}$  vérifiant

$$(6) \quad U = Hf, \quad f \in [C^\infty([r_0, +\infty[ \times S^2)]^6.$$

On note  $e^{-itH} U = {}^t(E^{\hat{r}}, \dots, B^{\hat{\phi}})$ . Alors pour tout  $s \in \mathbb{R}$ , il existe  $e^{\hat{r}}, \dots, b^{\hat{\phi}}$  dans  $C^\infty(S^2)$  tels qu'on ait les limites suivantes dans  $C^\infty(S^2)$  quand  $r \rightarrow r_0$ ,  $t + r_* = s$  :

$$E^{\hat{r}} \rightarrow e^{\hat{r}}, B^{\hat{r}} \rightarrow b^{\hat{r}}, \alpha r E^{\hat{\theta}} \rightarrow e^{\hat{\theta}}, \alpha r E^{\hat{\phi}} \rightarrow e^{\hat{\phi}}, \alpha r B^{\hat{\theta}} \rightarrow b^{\hat{\theta}}, \alpha r B^{\hat{\phi}} \rightarrow b^{\hat{\phi}}.$$

De plus on a:

$$(7) \quad e^{\hat{\theta}} = -b^{\hat{\phi}}, \quad e^{\hat{\phi}} = b^{\hat{\theta}},$$

$$(8) \quad \partial_s e^{\hat{r}} + (\sin\theta)^{-1} [\partial_\theta(\sin\theta e^{\hat{\theta}}) + \partial_\phi e^{\hat{\phi}}] = 0.$$

Remarquons que le théorème 2 assure que l'espace des données vérifiant (6) est dense dans  $\mathcal{H}$ . Ainsi l'horizon du trou noir est analogue à une sphère de résistivité 377 ohms (impédance du vide) dans l'espace euclidien: (7) correspond à la condition d'impédance et (8) à la conservation de la charge. On a un résultat analogue quand  $r \rightarrow \infty$ : il existe  $e^{\hat{r}}, \dots, b^{\hat{\phi}}$  dans  $C^\infty(S^2)$  tels qu'on ait les limites suivantes dans  $C^\infty(S^2)$  quand  $r \rightarrow \infty$ ,  $t - r_* = s$  :

$$r^2 E^{\hat{r}} \rightarrow e^{\hat{r}}, r^2 B^{\hat{r}} \rightarrow b^{\hat{r}}, r E^{\hat{\theta}} \rightarrow e^{\hat{\theta}}, r E^{\hat{\phi}} \rightarrow e^{\hat{\phi}}, r B^{\hat{\theta}} \rightarrow b^{\hat{\theta}}, r B^{\hat{\phi}} \rightarrow b^{\hat{\phi}}.$$

De plus le profil asymptotique du champ satisfait la condition de radiation sortante de Sommerfeld :

$$e^{\hat{\theta}} = b^{\hat{\phi}}, \quad e^{\hat{\phi}} = -b^{\hat{\theta}}.$$

La preuve de ces résultats repose sur le découplage du système par séparation de variables à l'aide des harmoniques sphériques vectorielles généralisées de Gelfand et Sapiro qui ramène le problème à l'étude d'équations d'ondes avec des potentiels à courte portée; on emploie alors les méthodes de Birman et Kato.

Nous pouvons maintenant introduire l'opérateur de diffraction  $S$  en posant

$$W^- : \mathcal{H}_1^- \times \mathcal{H}_0 \rightarrow \mathcal{H}, \quad W^-(U_1, U_0) = W_1^- U_1 + W_0^- U_0,$$

$$W : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_1^+ \times \mathcal{H}_0, \quad W(U) = (W_1 U, W_0 U), \quad S = W W^- : \mathcal{H}_1^- \times \mathcal{H}_0 \rightarrow \mathcal{H}_1^+ \times \mathcal{H}_0.$$

THEOREME 8 -  $W^-$  est une isometrie de  $\mathcal{H}_1^- \times \mathcal{H}_0$  sur  $\mathcal{H}$ ;  $W$  est une isometrie de  $\mathcal{H}$  sur  $\mathcal{H}_1^+ \times \mathcal{H}_0$ ;  $S$  est une isometrie de  $\mathcal{H}_1^- \times \mathcal{H}_0$  sur  $\mathcal{H}_1^+ \times \mathcal{H}_0$ .

## V - Paradigme de la membrane

Le *paradigme de la membrane* [4] assure que l'on peut décrire de façon approchée la diffraction par un trou noir, en remplaçant celui-ci par une sphère dissipative de rayon  $r_0 + \varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon$ , appelée "horizon élargi".

Considérons le problème mixte pour les équations de Maxwell (4) dans  $]r_0 + \varepsilon, +\infty[ \times S^2$  en imposant sur l'horizon élargi  $\Gamma_\varepsilon = \mathbb{R}_t \times \{r = r_0 + \varepsilon\} \times S^2$  qui est de genre temps, la condition d'impédance

$$(9) \quad E^{\hat{\theta}} = -B^{\hat{\phi}}, \quad E^{\hat{\phi}} = B^{\hat{\theta}}.$$

C'est un problème hyperbolique dissipatif classique dont la solution est donnée par un semi-groupe  $V_\varepsilon(t)$  opérant sur l'espace de Hilbert  $\tilde{\mathcal{H}}_\varepsilon = [L^2(r_0 + \varepsilon, +\infty[ \times S^2, r^2 dr d\omega)]^6$ . Pour  $0 < \varepsilon < a$  on définit l'opérateur de diffraction

$$S_\varepsilon U_0 = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{itH_0} \mathcal{J}_0^* V_\varepsilon(2t) \mathcal{J}_0 e^{itH_0} U_0 \text{ dans } \tilde{\mathcal{H}}_0.$$

THEOREME 9 -  $S_\varepsilon$  est défini de  $\mathcal{H}_0$  dans  $\mathcal{H}_0$ , est indépendant de  $\chi_0$  et  $\|S_\varepsilon\| \leq 1$ .

La diffraction à l'infini par le trou noir réel est décrite par l'opérateur  $S_{00}$  donné par:

$$\forall U_0 \in \mathcal{H}_0, \quad S_{00} U_0 = \Pi_0 S(0, U_0)$$

où  $\Pi_0$  est le projecteur de  $\mathcal{H}_1^+ \times \mathcal{H}_0$  sur  $\mathcal{H}_0$ . Le résultat suivant est la justification mathématique de ce paradigme:

THEOREME 10 - Pour tout  $U_0$  dans  $\mathcal{H}_0$ ,  $S_\varepsilon U_0$  tend vers  $S_{00} U_0$  dans  $\mathcal{H}_0$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Du point de vue de l'approximation numérique, la condition d'impédance (9) est une condition transparente sur la frontière artificielle  $\Gamma_\varepsilon$ , appelée condition de radiation de Silver-Müller dans le cas euclidien. Ainsi ce théorème fournit une méthode de calcul déjà utilisée dans [4].



## VI - Problème de Cauchy caractéristique

Tous les résultats précédents peuvent être interprétés en termes de problèmes de Cauchy caractéristiques sur la variété de Kruskal [1]. Par le changement de coordonnées

$$u = -2r_o e^{-(t-r_*)/2r_o}, \quad v = 2r_o e^{(t+r_*)/2r_o}, \quad \xi_- = 2 \operatorname{Arctg} u, \quad \xi_+ = 2 \operatorname{Arctg} v$$

la métrique de Schwarzschild devient

$$ds_{\mathcal{F}}^2 = \frac{1}{4} \frac{1}{\cos^2 \xi_+/2 \cos^2 \xi_-/2} \frac{r_o}{r} e^{-r/r_o} ds_K^2$$

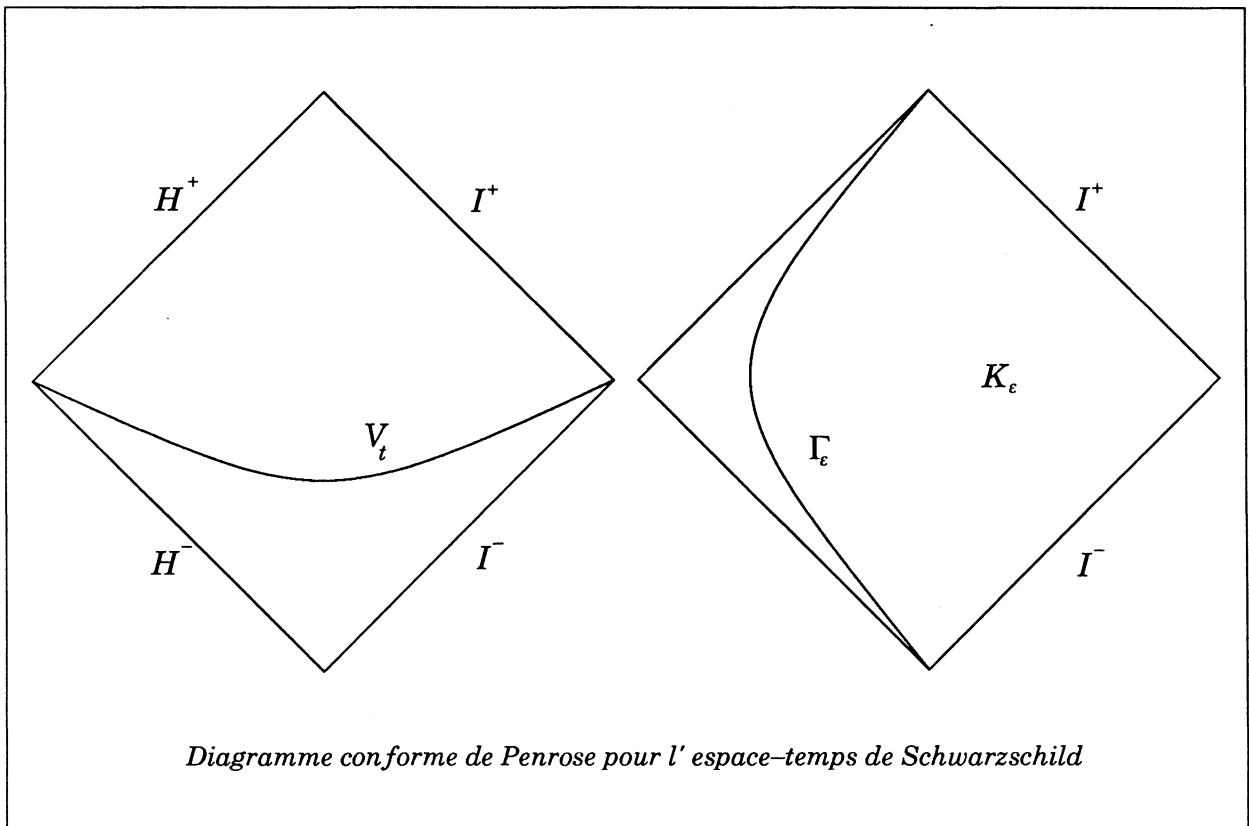
où  $ds_K^2$  est la métrique

$$ds_K^2 = d\xi_+ d\xi_- - 4 \frac{r^3}{r_o} e^{r/r_o} \cos^2 \xi_+/2 \cos^2 \xi_-/2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

sur la variété compacte

$$K = [0, \pi]_{\xi_+} \times [-\pi, 0]_{\xi_-} \times S_{\omega}^2.$$

L'espace-temps de Schwarzschild est alors représenté par le diagramme de Penrose:



Nous avons introduit les notations classiques pour lesquelles:

$$\text{sur } H^\pm, t = \pm \infty, r = r_0 \text{ ou } \xi_\mp = 0$$

$$\text{sur } I^\pm, t = \pm \infty, r = +\infty \text{ ou } \xi_\pm = \pm \pi.$$

Si  $(E, B)$  est un champ électromagnétique sur l'espace-temps de Schwarzschild on pose :

$$f(\xi_+, \xi_-, \theta, \varphi) = \alpha r {}^t(E^{\hat{r}}, E^{\hat{\theta}}, E^{\hat{\phi}}, B^{\hat{r}}, B^{\hat{\theta}}, B^{\hat{\phi}}).$$

Les équations de Maxwell étant conformément invariantes et  $ds_{\mathcal{G}}^2$  et  $ds_K^2$  étant conformément équivalentes,  $f$  est solution d'un système hyperbolique  $\mathcal{L}$  et d'une équation de contrainte de divergence libre  $\mathcal{D}$  équivalents aux équations de Maxwell sur  $(K, ds_K^2)$

$$(10) \quad \mathcal{L}(\partial_{\xi_+}, \partial_{\xi_-}, \partial_\theta, \partial_\varphi)f = 0, \mathcal{D}(\partial_{\xi_+}, \partial_{\xi_-}, \partial_\theta, \partial_\varphi)f = 0.$$

Nous définissons le problème de Cauchy caractéristique. Pour  $t \in \mathbb{R}$  on introduit

$$V_t^1 = \{(\xi_+, \xi_-, \omega); \text{tg}(\xi_+/2) \cdot \text{tg}(\xi_-/2) > -4r_0^2, \text{tg}(\xi_+/2) / (\text{tg}(\xi_-/2)) = -e^{t/2r_0}\}$$

$$V_t^0 = \{(\xi_+, \xi_-, \omega); \text{tg}(\xi_+/2) \cdot \text{tg}(\xi_-/2) < -4r_0^2, \text{tg}(\xi_+/2) / (\text{tg}(\xi_-/2)) = -e^{-t/2r_0}\}$$

$$V_t = V_t^0 \cup V_t^1.$$

Pour  $f \in C^0(K)$  on note

$$\|f\|_{V_t} \|_{\mathcal{X}(V_t)} = \|(E, B)(t)\|_{\tilde{\mathcal{X}}}$$

$$\|f\|_{V_t^y} \|_{\mathcal{X}(V_t^y)} = \|\chi_v(r_*) (E, B)(t)\|_{\tilde{\mathcal{X}}}.$$

Etant donnés  $\Phi_-^0, \Phi_-^1$ , respectivement définis sur  $I^-$  et  $H^-$  on appelle solution du problème de Cauchy caractéristique de données sur les horizons passés  $(\Phi_-^0, \Phi_-^1)$ , toute solution  $f$  de (10) telle que

$$(11) \quad \|f(\xi_+, \xi_-, \omega) - \Phi_-^1(\xi_-, \omega)\|_{\mathcal{X}(V_t^1)} \longrightarrow 0, t \rightarrow -\infty$$

$$(12) \quad \|f(\xi_+, \xi_-, \omega) - \Phi_-^0(\xi_+, \omega)\|_{\mathcal{X}(V_t^0)} \longrightarrow 0, t \rightarrow -\infty.$$

On dira que  $f$  admet une trace sur les horizons futurs s'il existe  $\Phi_+^y$  tels que

$$(13) \quad \|f(\xi_+, \xi_-, \omega) - \Phi_+^1(\xi_+, \omega)\|_{\mathcal{X}(V_t^1)} \longrightarrow 0, t \rightarrow +\infty$$

$$(14) \quad \|f(\xi_+, \xi_-, \omega) - \Phi_+^0(\xi_-, \omega)\|_{\mathcal{X}(V_t^0)} \longrightarrow 0, t \rightarrow +\infty.$$

On a vu que  $(E, B)$  possède des profils asymptotiques polarisés à droite si  $t \rightarrow \infty$ ,  $r \rightarrow r_0$  ou  $t \rightarrow +\infty$ ,  $r \rightarrow +\infty$ , et polarisés à gauche si  $t \rightarrow -\infty$ ,  $r \rightarrow +\infty$ , ou  $t \rightarrow +\infty$ ,  $r \rightarrow r_0$ . On introduit alors les espaces de Hilbert  $\mathcal{H}^R$ ,  $\mathcal{H}^L$  de fonctions respectivement définis sur  $H^-$ ,  $I^+$  et  $H^+$ ,  $I^-$ :

$$\mathcal{H}^R = \{\Phi = {}^t(0, e^\theta, e^\varphi, 0, b^\theta, b^\varphi);$$

$$e^\theta, e^\varphi, b^\theta, b^\varphi \in L^2(\mathbb{D}[-\pi, 0]_{\xi_-} \times S_\omega^2, d\mu(\xi_-, \omega)), e^\theta = b^\varphi, e^\varphi = -b^\theta\}$$

$$\mathcal{H}^L = \{\Phi = {}^t(0, e^\theta, e^\varphi, 0, b^\theta, b^\varphi);$$

$$e^\theta, e^\varphi, b^\theta, b^\varphi \in L^2(\mathbb{D}[0, \pi]_{\xi_+} \times S_\omega^2, d\mu(\xi_+, \omega)), e^\theta = -b^\varphi, e^\varphi = b^\theta\}$$

où

$$d\mu(\xi_\pm, \omega) = \left| \frac{1}{\operatorname{tg} \xi_\pm / 2} + \operatorname{tg} \xi_\pm / 2 \right| d\xi_\pm d\omega.$$

L'existence de  $W_{-1}^{0,1}$  implique que le problème de Cauchy caractéristique est bien posé pour des données sur les horizon passés et la complétude asymptotique assure que la solution admet une trace sur les horizons futurs :

**THEOREM 11** - Pour  $\Phi_-^1 \in \mathcal{H}^R$  et  $\Phi_-^0 \in \mathcal{H}^L$  il existe une unique solution  $f$  de (10) satisfaisant les conditions au bord caractéristiques (11) (12) et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \|f\|_{V_t}^2_{\mathcal{X}(V_t)} = \|\Phi_-^1\|_{\mathcal{H}^R}^2 + \|\Phi_-^0\|_{\mathcal{H}^L}^2.$$

De plus il existe  $\Phi_+^1 \in \mathcal{H}^L$ ,  $\Phi_+^0 \in \mathcal{H}^R$  vérifiant (13) (14). L'application linéaire

$$S : (\Phi_-^1, \Phi_-^0) \rightarrow (\Phi_+^1, \Phi_+^0)$$

est une isométrie de  $\mathcal{H}^R \times \mathcal{H}^L$  sur  $\mathcal{H}^L \times \mathcal{H}^R$ .

Enfin nous interprétons le *paradigme de la membrane*. On note  $\Gamma_\varepsilon$  l'horizon élargi :

$$\Gamma_\varepsilon = \{(\xi_+, \xi_-, \omega); r_0 + \varepsilon = r\}$$

$$K_\varepsilon = \{(\xi_+, \xi_-, \omega); r_0 + \varepsilon \leq r\}.$$

On impose sur  $\Gamma_\varepsilon$  la condition d'impédance pour  $f$  donnée par:

$$(15) \quad E^{\hat{\theta}} = -B^{\hat{\varphi}}, \quad E^{\hat{\varphi}} = B^{\hat{\theta}}$$

Le théorème 9 implique que le problème mixte caractéristique est bien posé dans  $K_\varepsilon$  et la solution admet une trace sur  $I^+$ :

THEOREM 12 - Pour  $\Phi_-^0 \in \mathcal{H}^L$  il existe une unique solution  $f^\varepsilon$  de (10) dans  $K_\varepsilon$  satisfaisant (12) (15) et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \|f^\varepsilon|_{V_t \cap K_\varepsilon}\|_{\mathcal{H}(V_t \cap K_\varepsilon)} \leq \|\Phi_-^0\|_{\mathcal{H}^L}.$$

De plus il existe  $\Phi_+^{0,\varepsilon} \in \mathcal{H}^R$  vérifiant (14).

Le Paradigme de la Membrane assure que  $\Phi_+^{0,\varepsilon}$  approche la trace sur  $I^+$  de la solution dans  $K$  avec donnée caractéristique nulle sur  $H^+$ , égale à  $\Phi_-^0$  sur  $I^-$ :

THEOREM 13 - Avec les notations du Théorème 11 on a

$$\Phi_+^{0,\varepsilon} \longrightarrow S(0, \Phi_-^0) \text{ dans } \mathcal{H}^R, \varepsilon \rightarrow 0.$$

[1] A. Bachelot, *Gravitational Scattering of Electromagnetic Field by Schwarzschild Black-Hole*, à paraître.

[2] Th. Damour, *Black-Hole eddy currents*, Phys. Rev. D 18, 10, 1978, p.3598, 3604.

[3] J. Dimock, *Scattering for the wave equation on the Schwarzschild metric*, Gen. Relativ. Gravitation, 17, n° 4, 1985, p.353-369.

[4] D.A. Mac Donald, W.M. Suen, *Membrane viewpoint on Black-Holes : Dynamical electromagnetic fields near the horizon*, Phys. Rev. D 32, n° 4, 1985, p.848-871.

Département de Mathématiques Appliquées  
Unité associée au C.N.R.S. 226 **CeReMaB**  
Université BORDEAUX 1  
351 cours de la Libération  
33405 TALENCE Cedex