JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

VESSELIN M. PETKOV

Phase de diffusion pour des perturbations captives

Journées Équations aux dérivées partielles (1990), p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1990____A5_0>

© Journées Équations aux dérivées partielles, 1990, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journées Équations aux dérivées partielles » (http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/edpa/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

PHASE DE DIFFUSION POUR DES PERTURBATIONS CAPTIVES

VESSELIN M. PETKOV
Institut de Mathématiques, Université de Nantes
44072 Nantes, Cedex 03

1. Introduction.

Soit $L = c^2(x) \Sigma_{j,k} \partial_{x_j}\left(a_{jk}(x)\, \partial_{x_k}\right)$ un opérateur dans $\mathbf{R}^n$, n impair, $n \geqslant 3$. On suppose que

$$a_{jk}(x),\ c(x) \in C^\infty(\mathbf{R}^n),$$
$$a_{jk}(x) = a_{kj}(x) \ \text{ pour } \ 1 \leq k \leq n,\ 1 \leq j \leq n$$

$(\mathbf{H_1})$ $$c(x) > c_0 > 0,\quad \Sigma_{j,k}\, a_{j,k}(x)\, \xi_j\, \xi_k \geqslant \delta_0 \,|\, \xi \,|^2$$

pour tout $x \in \mathbf{R}^n$ et tout $\xi \in \mathbf{R}^n$ avec $c_0 > 0$ et $\delta_0 > 0$.

De plus, on suppose qu'il existe $\rho_0 > 0$ tel que

$$c(x) = 1 \text{ et } a_{jk}(x) = \delta_{jk}\,,\quad 1 \leqslant j \leqslant n,\ 1 \leqslant k \leqslant n$$

$(\mathbf{H_2})$ pour $|x| > \rho_0$.

Soit $H_D(\mathbf{R}^n)$ le complété de $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ par rapport à la norme

$$\left(\int_{R^n} |\nabla u|^2 dx\right)^{1/2},$$

et soit $\mathbb{H} = H_D(\mathbf{R}^n) \oplus L^2(\mathbf{R}^n)$. On considère dans $\mathbb{H}$ deux groupes $U_0(t) = e^{itG_0}$ et $U(t) = e^{itG}$ associés respectivement aux problèmes de Cauchy pour des opérateurs $\partial_{tt} - \Delta$ et $\partial_{tt} - L$ (cf. [1]).

L'opérateur de diffusion lié aux groupes $U(t)$ et $U_0(t)$ est un opérateur unitaire

$$S(\lambda) : L^2(S^{n-1}) \to L^2(S^{n-1}), \ \lambda \in \mathbf{R}$$

qui admet un prolongement meromorphe sur $\mathbf{C}$ avec des pôles z_j dans le démi-plan $\operatorname{Im} z > 0$ (cf. [5]). On introduit la phase de diffusion $s(\lambda) \in C^\infty(\mathbf{R})$ par

$$s(\lambda) = -i \log \det S(\lambda), \ s(0) \in [0, 2\pi).$$

Dans cet exposé, on se propose d'examiner la liason entre le comportement de la dérivée de la phase de diffusion et l'existence d'une suite de pôles $\{z_j\}$, $j \in \mathbf{N}$ de $S(\lambda)$ telle que $\operatorname{Im} z_j \to 0$ quand $j \to \infty$..

Dans la suite on suppose que L satisfait les hypothèses (H_1) et (H_2).

2. Existence des pôles z_j qui convergent vers l'axe réel.

On commence par un exemple dû à Ralston [9]. Soit $n = 3$ et soit $L = c^2(r)\Delta$ avec $r = |x|$. Supposons qu'il existe r_1, r_0, $0 < r_1 < r_0 < \rho_0$ tels que $c(r_1)r_0 < c(r_0)r_1$. De plus, on suppose que dans le domaine

$$\Omega_0 = \{ x \in \mathbf{R}^n : |x| \geq r_0 \}$$

on a une décroissance uniforme de l'énergie locale des solutions du problème de Cauchy pour $\partial_{tt} - L$. Plus précisement, on suppose que pour tout $R > 0$ il existe une fonction $C(t, R)$ telle que $C(t, R) \to 0$ pout $t \to \infty$ et telle que

$$\| U(t)f \|_R \leqslant C(t,R) \|f\|_R$$

pour toute fonction $f \in C_0^\infty(\Omega_R) \times C_0^\infty(\Omega_R)$, où $\| . \|_R$ désigne la norme énergétique locale sur $\Omega_R = \{ x \in \Omega_0 : |x| \leqslant R \}$. Dans ce cas il existe $\sigma > 0$ tel que les grands cercles de la sphère $S_\sigma = \{ x \in \mathbf{R}^n : |x| = \sigma \}$ soient des projections des trajectoires périodiques du flot Hamiltonien associé à l'opérateur $c^2(r)\Delta$. Le nombre σ est déterminé par la condition

$$\frac{d}{dr}(c(r)/r)(\sigma) = 0.$$

Dans le cas partiel décrit ci-dessus, Ralston [9] a démontré qu'il existe une suite $\{z_k\}_{k\in N}$ de pôles de $S(\lambda)$ et deux constantes $C > 0$, $\gamma > 0$ telles que

(1) $$0 < \operatorname{Im} z_k < C \exp\left(-\gamma|z_k|\right) \qquad \text{pour tout } k \in N.$$

On se propose d'examiner l'existence d'une suite $\{z_k\}_{k\in N}$ de pôles pour laquelle on a

(2) $$0 < \operatorname{Im} z_k < C_1 |z_k|^{-p} \qquad \text{pour tout } k \in N,$$

où p est un entier fixé.

Tout d'abord on a le résultat suivant.

Théorème 1. Supposons qu'il existe une suite $\{z_k\}_{k\in N}$ qui satisfait (1).

Alors il existe $C_2 > 0$ et $m \in N$ tels que

(3) $$\left|\frac{ds}{d\lambda}(\operatorname{Re} z_k)\right| \geqslant C_2 \exp\left(\gamma |z_k|\right) \text{ pour tout } k \geqslant m.$$

Si la suite $\{ z_k\}_{k\in N}$ satisfait (2) avec $p \geqslant n+1$, on obtient l'estimation

(4) $$\left|\frac{ds}{d\lambda}(\operatorname{Re} z_k)\right| \geqslant C_2 |z_k|^p \text{ pour tout } k \geqslant m$$

avec $C_2 > 0$ et $m \in N$.

Remarques. 1). La formule (3) rappelle le résultat de Gérard - Martinez - Robert [2] concernant la phase de diffusion pour l'opérateur de Schrödinger $P_h = -h^2\Delta + V(x)$.

2). Les physiciens appellent (3) formule de type Breit-Wigner.

Pour formuler des résultats qui impliquent l'existence de pôles z_j convergeant vers l'axe réel, nous allons introduire quelques notations. Soit

$$l(x, \xi) = - c^2(x) \Sigma_{j,k} a_{j,k}(x) \xi_j \xi_k$$

le symbole principal de L et soit $l_s(x, \xi)$ le symbole sous-principal de L. On introduit

$$\Sigma = \{ (x, \xi) \in T^*(\mathbf{R}^n) : l(x, \xi) = 1 \},$$

et on considère le flot Φ^t du champ Hamiltonien H_l du symbole $l(x, \xi)$. Si $\nu \in \Sigma$ est tel que $\Phi^T(\nu) = \nu$, on dit que ν est T-périodique. On note Π_T l'ensemble de points T-périodiques et on pose $\Pi = \cup_{t>0} \Pi_t$. Soit

$$\delta(\nu) = \{(x(\sigma; \nu), \xi(\sigma; \nu)) \in \mathbf{R}^{2n}, \ 0 \leqslant \sigma \leqslant T(\nu)\}$$

la trajectoire de H_l passant par $\nu \in \Pi$, où $T(\nu)$ est la période primitive de $\delta(\nu)$.

On pose $\quad q_s(\nu) = \int_0^{T(\nu)} l_s(x(\sigma; \nu), \xi(\sigma; \nu))\, d\sigma$ et on note $q_c(\nu)$ l'indice de Maslov de $\delta(\nu)$ (cf. [5]). On dit que le point $\nu \in \Pi$ est T-absolument périodique si le graphe de Φ^T et le graphe de l'identité sont tangent à l'ordre infini en $(\nu, \Phi^T(\nu))$. On note $\Pi^a{}_T \subset \Pi_T$ l'ensemble de points T-absolument périodiques et on pose $\Pi^a = \cup_{t>0} \Pi^a{}_t$.

Etant donné $\lambda \in \mathbf{R}$, on note $[\lambda]_{2\pi}$ le résidu de λ modulo 2π, $-\pi < [\lambda]_{2\pi} \leqslant \pi$ et $[\lambda]_{2\pi} = \lambda + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. On introduit la fonction

$$Q(\lambda) = (2\pi)^{-n} \int_{\Pi^a} [\pi - \lambda T(\nu) - q(\nu)]_{2\pi} T^{-1}(\nu)\, d\nu,$$

où $q(\nu) = q_c(\nu) - q_s(\nu)$. La fonction $Q(\lambda)$ a été introduite par Safarov [12] (cf. aussi [3]).

La fonction $Q(\lambda)$ est continue à gauche et à droite et de plus

$$Q(\lambda + 0) - Q(\lambda - 0) = (2\pi)^{-n-1} \int_{\Omega_\lambda} T^{-1}(\nu)\, d\nu,$$

où $\Omega_\lambda = \{ \nu \in \Pi^a : \lambda T(\nu) + q(\nu) = 0 \pmod{2\pi} \}$. On renvoie à [3], [12], [13] pour les propriété de $Q(\lambda)$.

On dit que $Q(\nu)$ est asymptotiquement continue par rapport à la suite $\{\lambda_k\}_{k\in N}$ si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ et $m \in N$ tels que

$$| Q(\lambda_k) - Q(\lambda) | < \varepsilon \quad \text{si } k \geqslant m \text{ et } |\lambda_k - \lambda| < \delta.$$

Dans le théorème suivant on suppose que $Q(\lambda)$ n'est pas asymptotiquement continue par rapport à une suite $\{\lambda_k\}_{k\in N}$, $\lambda_k \to \infty$.

Théorème 2. Soit $p \in N$. Supposons qu'il existe une suite $\{\lambda_k\}_{k\in N}$, $\lambda_k \to \infty$, une suite $\{\varepsilon_k\}_{k\in N}$, $\varepsilon_k \downarrow 0$, et une constante $\theta > 0$ telles que

$$(5) \qquad | Q(\lambda_k + \varepsilon_k / \lambda_k^{p+2}) - Q(\lambda_k - \varepsilon_k / \lambda_k^{p+2}) | \geqslant \theta$$

pour tout $k \in N$. Alors pout tout $c > 0$ il y a un nombre infini de pôles z_j dans le domaine $\Omega_{p,c} = \{ z \in C : 0 < \operatorname{Im} z < c|z|^{-p} \}$.

Corollaire 3. Supposons qu'il existe une suite $\{\lambda_k\}_{k\in N}$, $\lambda_k \to \infty$ et une constante $\theta > 0$ telles que

$$| Q(\lambda_k + 0) - Q(\lambda_k - 0) | \geqslant \theta \quad \text{pour tout } k \in N.$$

Alors pour tout $c > 0$ et tout $p \in N$, il y a un nombre infini de pôles z_j dans chaque domaine $\Omega_{p,c}$.

Remarques. 1) La continuité asymptotique de la fonction $Q(\lambda)$ joue un rôle important dans l'étude de la concentration ("clastering") de valeurs propres (cf. [3], [12], [13]).

2) On peut obtenir des résultats du même type pour les pôles de l'opérateur de diffusion associé à l'équation des ondes à l'extérieur d'un obstacle borné Ω ayant une frontière C^{∞} notée $\partial\Omega$. D'autre part, il y a une différence importante puisque pour des obstacles génériques on a $\mu(\Pi) = 0$, où μ désigne la mesure sur $\partial\Omega \times S^{n-1}$ et Π désigne l'ensemble de points périodiques du flot généralisé associé à l'opérateur des ondes dans $\mathbf{R} \times (\mathbf{R}^n \setminus \Omega)$. On rénvoie à [8] pour les détails.

En contraste de la remarque précedente on va considérer un exemple où les conditions du Corollaire 3 soient satisfaites.

Exemple. Soit n = 3 . Supposons qu'il existe $\alpha > 0$ et $0 < r_1 < r_0 < \rho_0$ tels que $a_{jk}(x) = \delta_{jk}$, $c(x) = \alpha|x|$ pour $r_1 \leqslant |x| \leqslant r_0$. Alors les grands cercles des sphères S_σ, $r_1 \leqslant \sigma \leqslant r_0$, sont des projections de trajectoires périodiques de Φ^t. Soit

$$\Sigma_{0,1} = \{ (x, \xi) \in \Sigma : r_1 \leqslant |x| \leqslant r_0, \ \Sigma_{k=1,..,n} x_k \xi_k = 0\}.$$

Soit μ_Σ la mesure induite sur Σ par la mesure de Lebesgue sur $T^*(\mathbf{R}^n)$. Alors $\mu_\Sigma(\Pi) = \mu_\Sigma(\Pi^a) \geqslant \mu_\Sigma(\Sigma_{0,1}) \geqslant \mu_0 > 0$. De plus, pour tout $\nu \in \Sigma_{0,1}$ on a $T(\nu) = \pi/\alpha$, $q_s(\nu) = 0$, $q_c(\nu) = \beta$ = const. Posons

$$\lambda_k = -\alpha\beta/\pi + 2k\alpha, \ k \in \mathbf{N}.$$

Alors pour tout λ_k on obtient $\Sigma_{0,1} \subseteq \Omega_{\lambda_k}$ et

$$| Q(\lambda_k + 0) - Q(\lambda_k - 0) | \geqslant \int_{\Sigma_{0,1}} (\alpha/\pi)\, d\mu_\Sigma \geqslant \theta > 0.$$

Notons que dans cet exemple on n'impose pas des restrictions sur les coéfficients de L pour $|x| > r_0$ ou $|x| < r_1$.

3. Idée de la démonstration du Théorème 2.

Soit $\zeta(t) \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ une fonction telle que $\zeta(t) = 1$ pour $|t| \leqslant 2$, $\zeta(t) = 0$ pour $|t| \geqslant 3$. En suivant Melrose [7], on introduit

$$\frac{ds_1}{d\lambda}(\lambda) = \Sigma_j\, \zeta(|z_j|/\lambda)\, \mathrm{Im}\, z_j\, [(\mathrm{Re}\, z_j - \lambda)^2 + \mathrm{Im}\, z_j^{\,2}]^{-1}$$

et on pose $s_2(\lambda) = s(\lambda) - s_1(\lambda)$.

Soit $N(R) = \#\{ z_j : |z_j| \leqslant R \}$, où on calcule le nombre de pôles avec leur multiplicité. Récemment, G. Vodev [15] a obtenu l'estimation

(6) $\qquad N(R) \leqslant C_1 R^{n+1} + C_2$ pour tout $R > 0$

avec des constantes $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ indépendantes de R. Dans le cas d'une perturbation liée avec un potentiel où dans le cas d'un obstacle on a des résultats plus précis avec R^n à la place de R^{n+1} (cf. [14]).

En utilisant (6) et les arguments de [7], on conclut que $s_2(\lambda)$ est un symbole de la classe $S^{n+1}(\mathbf{R})$. Alors les estimations (3) et (4) decoulent du comportement de $\frac{ds_1}{d\lambda}(\lambda)$.

La démonstration du Théorème 2 est longue. On commence par observer que, si tous les pôles z_j satisfont à l'estimation $\mathrm{Im}\, z_j \geqslant C|z_j|^{-p}$, on a l'inégalité

(7) $\qquad |\frac{ds}{d\lambda}(\lambda)| \leqslant C' (1 + |\lambda|)^{n+1+p}$ pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$.

Soit $\rho(\tau) \in S(\mathbf{R})$ telle que $\hat{\rho}(0) = 1$, supp $\hat{\rho}(\tau) \subset (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$, où

$\hat{\rho}(\tau)$ est la transformée de Fourier de $\rho(\tau)$ et ε_0 est suffisament petit. Pour $0 < \delta \leqslant 1$ on pose $\rho_\delta(\tau) = (1/\delta)\,\rho(\tau/\delta)$. Le point crucial est l'étude de

$$I_{\delta,k} = (\rho_\delta * s)\,(\lambda_k + 2\varepsilon_k/\,\lambda_k^{\,p+2}\,) - (\rho_\delta * s)\,(\lambda_k - 2\varepsilon_k/\,\lambda_k^{\,p+2}\,)\,.$$

En tenant compte de (7), on trouve que

(8) $$|\,I_{\delta,k}\,| \leqslant C_0\,\varepsilon_k\,(\,1 + |\,\lambda_k\,|)^{\,n-1}$$

avec une constante $C_0 > 0$ indépendante de δ, ε_k et λ_k.

Afin de trouver la convolution de ρ_δ et $\frac{ds}{d\lambda}$, on utilise une formule de trace. Soit $E(t,x,y)$ la solution du problème :

(9) $$(\partial_{tt} - L_x)\,E(t,x,y) = 0 \text{ dans } \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^n\,,$$

$$E(0,x,y) = 0,\quad \partial_t E(0,x,y) = \delta(x-y),$$

et soit $E_0(t,x,y)$ la solution de (9) avec Δ à la place de L.. Alors on a (cf. [1], [6])

(10) $$\int_R \int_{R^n} e^{i\lambda t}\,\hat{\rho}(\delta t)\,[\partial_t E(t,x,x) - \partial_t E_0(t,x,x)]\,dt\,dx$$

$$= (4\pi)^{-1}\int \rho_\delta(\lambda-\mu)\,\frac{ds}{d\lambda}(\mu)\,d\mu.$$

L'intégration sur $\mathbf{R}^n$ par rapport à x dans (10) engendre des difficultés quand on veut appliquer la formule de trace (10) avec $\delta \to 0$ puisque le support de $\hat{\rho}(\delta t)$ est inclus dans $(-\varepsilon_0/\delta,\, \varepsilon_0/\delta)$. Pour cela on obtient une formule de trace pour des fonctions $\phi(t)$ ayant support dans $\mathbf{R}^+$ ou $\mathbf{R}^-$. Soit $Q = L - \Delta$ et soit $h_0(t,x,y)$ la solution du problème:

$$(\partial_{tt} - \Delta_y)\,h_0(t,x,y) = E_0(t,x,y),$$

$$\text{supp}\,h_0 \subset \{\,(t,x,y) : t \geqslant 0\,\}.$$

Théorème 4. Pour chaque $\phi(t) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^+)$ on a

(11) $$\int_R dt \int_R ds \int_B \int_B \phi(t)\,\partial_t E(t-s,x,z)\,Q_z Q_x h_0(s,z,x)\,dxdz$$

$$= \int_R \int_{R^n} \phi(t)\, \partial_t E(t,x,x)\, dtdx,$$

où $B = \{ x \in \mathbf{R^n} : |x| \leqslant \rho_0 \}$.

Maintenant on écrit $\hat{\rho}(\delta t) = \phi_0(t) + \phi_{-\delta}(t) + \phi_\delta(t)$, où supp $\phi_0(t) \subset (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$, supp $\phi_\delta(t) \subset (\varepsilon_0/2, \varepsilon_0/\delta)$, supp $\phi_{-\delta}(t) \subset (-\varepsilon_0/\delta, -\varepsilon_0)$. On construit une paramétrix globale de (9) donnée par un opérateur intégral de Fourier et on calcule le terme principal en utilisant les techniques dévellopées dans [12] et le fait que les transformées de Fourier de $E_0(t,x,y)$ et $h_0(t,x,y)$ par rapport à t sont des noyaux d'opérateurs pseudo-différentiels. L'intégration dans (11) par rapport à x et z est sur un domaine compact et cela permet d'appliquer les formules usuelles pour des opérateurs pseudo-différentiels. Finalement on prouve la

Proposition 5. Pour tout $\varepsilon > 0$, tout $\delta > 0$ et tout $\lambda > 0$ on a

$$(12) \qquad (\rho_\delta * s)(\lambda + \varepsilon) \geqslant c_0 (\lambda + \varepsilon)^n + c_1(\lambda + \varepsilon)^{n-1}$$
$$+ [Q(\lambda + \varepsilon/2) - C_3\varepsilon^{-1}\delta - C_4\varepsilon]\, \lambda^{n-1} - o(\lambda^{n-1}),\ \lambda \to +\infty,$$

$$(13) \qquad (\rho_\delta * s)(\lambda - \varepsilon) \leqslant c_0 (\lambda - \varepsilon)^n + c_1(\lambda - \varepsilon)^{n-1}$$
$$+ [Q(\lambda - \varepsilon/2) + C_3\varepsilon^{-1}\delta + C_4\varepsilon]\, \lambda^{n-1} + o(\lambda^{n-1}),\ \lambda \to +\infty,$$

où c_0, c_1, C_3, C_4 sont des constantes indépendantes de λ, ε et δ.

On applique (12) et (13) avec $\lambda = \lambda_k$, $\varepsilon = 2\varepsilon_k/\lambda_k^{p+1}$, $\delta = \chi\lambda_k^{p+2}/2\varepsilon_k$, où $\chi > 0$ est suffisament petit. En tenant compte de (5), on obtient

$$I_{\delta,k} \geqslant C_5\, \theta\, (1 + |\lambda_k|)^{n-1}$$

avec $C_5 > 0$ indépendante de δ, ε_k et λ_k. Cela implique une contradiction avec (8).

Remarque. Afin d'obtenir des résultats plus précis qui entrainent une convergence des pôles z_j vers $\lambda_j \in \mathbf{R}$, on a besoin d'une formule de Weyl pour l'asymptotique de la phase de diffusion avec seconde terme oscillant comme dans les travaux de Safarov [12], [13] et Gurejev et Safarov [3]. Récemment, Robert [11] a obtenu une formule de Weyl avec un terme principal et un reste du type $O(\lambda^{n-1})$ pour la phase de diffusion relative à des perturbations captives (cf. aussi [10]). Il semble que, pour qu'on puisse obtenir une formule de Weyl avec un seconde terme oscillant, on doit ameliorer l'estimation (6).

REFERENCES

[1] C. Bardos, J. C. Guillot et J. Ralston, Comm. PDE, 7 (1982), 905-958.

[2] C. Gérard, A. Martinez and D. Robert, Commun. Math. Phys., 121 (1989), 323-336.

[3] T. Gurejev and Yu. Safarov, LOMI preprint, E-1-86, Leningrad, 1985 and Trans. MIAN URSS, 179.

[4] L. Hormander, The Analysis of Linear Partial Differential Operators , v. IV, Springer-Verlag, Heidelberg.

[5] P. Lax and R. Phillips, Scattering Theory, Academic Press, New York, 1967.

[6] R. Melrose, J. Funct. Anal., 53 (1983), 287-3O3.

[7] R. Melrose, Comm. PDE, 13 (1989), 1431-1439.

[8] V. Petkov and L. Stojanov, Erg. Theory & Dynam. Systems, 8 (1988), 81-91.

[9] J. Ralston, Comm. Pure Appl. Math., 24 (1971), 571-582.

[1O] D. Robert, Seminaire EDP de l'Ecole Polytechnique, Exposé XVII, 1988/1989.

[11] D. Robert, Proceeding of the Intern. Conference Integral Equations and Inverse Problems, Varna 1989, Longman, to appear.

[12] Yu. Safarov, Trans. Sci. Seminar LOMI, 152 (1986), 94-1O4 (en russe).

[13] Yu. Safarov, Izv. AN SSSR, Ser. Mat., 52 (1988),123O-1251. (en russe)

[14] M. Zworski, Duke Math. J., 59 (1989), 311-323.

[15] G. Vodev, preprint, Avril 199O.