JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

ANDRÉ MARTINEZ

Estimations exponentielles précisées en théorie adiabatique

Journées Équations aux dérivées partielles (1993), p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1993____A6_0>

ESTIMATIONS EXPONENTIELLES PRECISEES EN THEORIE ADIABATIQUE

André MARTINEZ
Département de Mathématiques
Institut Galilée - U.R.A. 742 C.N.R.S.
Université Paris-Nord
Avenue J.B. Clément - 93430 Villetaneuse
FRANCE

1 - Introduction

Le problème général de la théorie adiabatique est d'obtenir des informations à $\varepsilon > 0$ petit sur les solutions φ de l'équation d'évolution :

$$i\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t} = H(t)\varphi \tag{1}$$

en fonction d'une donnée initiale $\varphi(t_0)$. Ici $H(t)$ ($t \in \mathbb{R}$) désigne une famille d'opérateurs auto-adjoints sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. De manière équivalente, il s'agit d'étudier l'opérateur d'évolution $U(t, t_0) = U_\varepsilon(t, t_0)$ donné par :

$$\begin{cases} i\varepsilon \dfrac{\partial}{\partial t} U(t, t_0) = & H(t)U(t, t_0) \\ U(t_0, t_0) \quad = & \mathbf{1}. \end{cases} \tag{2}$$

Depuis l'article original de Born et Fock [BoFo], une abondante littérature a été consacrée à l'étude de (2), et notamment à des estimations concernant une quantité d'un intérêt particulier en physique : la probabilité de transition. Supposons que pour tout t le spectre $\sigma(t)$ de $H(t)$ contienne une partie isolée $\sigma_1(t)$, et notons $P_1(t)$ le projecteur spectral qui lui est associé. Alors, la probabilité de transition entre $\sigma_1(t_0)$ et le complémentaire $\sigma_2(t) = \sigma(t) \backslash \sigma_1(t)$ de $\sigma_1(t)$ est définie comme étant la quantité :

$$\mathcal{P}_{1,2}(t_0, t) = \|(1 - P_1(t))U(t, t_0)P_1(t_0)\|^2. \tag{3}$$

En mécanique quantique, cela correspond à la probabilité pour qu'un état dont l'énergie est dans $\sigma_1(t_0)$ au temps t_0, ait son énergie dans $\sigma_2(t)$ au temps t.

Le célèbre théorème adiabatique (qui remonte à [BoFo] et à Kato [Ka]) affirme que lorsque $H(t)$ dépend de manière C^1 de t, $\mathcal{P}_{1,2}(t_0, t)$ est $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$. Diverses améliorations ont ensuite été obtenues sous des hypothèses plus fortes, conduisant à des corrections d'ordres plus élevés par rapport à ε, jusqu'à obtenir des erreurs $\mathcal{O}(\varepsilon^\infty)$: Cf. Lenard [Le], Garrido [Ga], Sancho [Sa], Nenciu [Ne1], Avron-Seiler-Yaffe [ASY].

Des corrections d'ordre exponentiellement petit de type $\mathcal{O}(e^{-c/\varepsilon^\alpha})$ ($c > 0$, $\alpha \in]0, 1]$) étaient connues des physiciens depuis les années 60 (cf. [Dy]), mais elles n'ont commencé à apparaître dans la littérature mathématique que très récemment avec les travaux de Nenciu [Ne2], Joye-Pfister [JoPf1]-[JoPf2], et Jakšić-Segert [JaSe]. Dans [Ne2] et [JoPf2], la décroissance exponentielle provient de termes d'erreurs qui apparaissent après ressommation de séries divergentes (de type 'symboles analytiques' ou 'symboles Gevrey'), et pour cette raison aucune information précise n'est obtenue concernant leur taux de décroissance c. Aussi le taux obtenu dans [JoPf1] ne semble pas être relié de manière simple au comportement spectral de $H(t)$ pour t complexe. Dans [JaSe], un taux explicite est obtenu, mais il concerne un cas très particulier où le spectre de $H(t)$ ne dépend pas de t. En fait, le seul cas où l'on sait réellement calculer ce taux est lorsque $H(t)$ est une matrice agissant sur $\mathbb{C}^2$ (ou peut être réduit à une telle matrice) dans la situation décrite par Joye-Kunz-Pfister [JKP].

2 - Résultat

Le but de notre travail est de produire un taux explicite de décroissance exponentielle, relié à des quantités géométriques simples, pour la probabilité de transition :

$$\mathcal{P}_{1,2}(-\infty,+\infty) = \lim_{\substack{t_0\to-\infty\\ t\to+\infty}} \mathcal{P}_{1,2}(t_0,t) \tag{4}$$

dans des situations assez générales similaires à celles de [JoPf1], qui assurent notamment que la limite (4) existe. Plus précisément, on suppose que les conditions suivantes sont satisfaites :

Regularité (R)
Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $H(t)$ est un opérateur auto-adjoint uniformément inférieurement semi-borné, de domaine fixe $\mathcal{H}_1$ muni d'une structure de Hilbert indépendante de t. De plus, l'application $t \mapsto H(t)$ est dans $C^\infty\big(\mathbb{R};\mathcal{L}(\mathcal{H}_1,\mathcal{H})\big)$ et s'étend holomorphiquement près d'une bande complexe $S_\lambda := \{t \in \mathbb{C}\ ;\ |\mathrm{Im}t| \leq \lambda\}$ avec $\lambda > 0$, telle que pour tout $z \in S_\lambda$ l'opérateur $\mathrm{Re}H(z) := \big(H(z)+H(z)^*\big)/2$ est inférieurement semi-borné.

Décroissance à l'infini (D)
Il existe deux opérateurs $H^\pm \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1,\mathcal{H})$ et une constante $\eta > \dfrac{1}{2}$ tels que pour tout entier $k \geq 0$:

$$\operatorname*{Sup}_{\substack{z\in S_\lambda\\ \pm\mathrm{Re}z\geq 0}} (1+|z|)^{2\eta}\|\partial_z^k\big(H(z)-H^\pm\big)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_1,\mathcal{H})} < +\infty.$$

Gap (G)
Pour tout $z \in S_\lambda$, le spectre $\sigma(z)$ de $H(z)$ vérifie :

$$\sigma(z) = \sigma_1(z) \cup \sigma_2(z)$$

avec

$$\operatorname*{Inf}_{z\in S_\lambda} \mathrm{dist}\big(\sigma_1(z),\sigma_2(z)\big) > 0$$

et où $\sigma_1(z)$ et $\sigma_2(z)$ peuvent être séparés par un chemin fermé γ_z uniformément borné, entourant $\sigma_1(z)$, et dépendant continûment de $z \in S_\lambda$.

En particulier, la condition **(G)** implique l'existence de deux fonction continues $e_1(t)$ et $e_2(t)$ telles que pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} &\sigma_1(t) \subset (-\infty, e_1(t)] \\ &\sigma_2(t) \subset [e_2(t), +\infty) \\ &\Gamma_0 := \operatorname*{Inf}_{t\in\mathbb{R}} \left(e_2(t) - e_1(t)\right) > 0. \end{aligned} \tag{5}$$

On suppose aussi que e_1 et e_2 peuvent être choisies de telle sorte que $e_1 + e_2$ soit holomorphe près de S_λ, et satisfasse pour tout $k \geq 0$ (et avec certaines constantes $\alpha^\pm$) :

$$\operatorname*{Sup}_{\substack{z\in S_\lambda \\ \pm \mathrm{Re} z \geq 0}} \ (1+|z|)^{2\eta} |\partial^k \left((e_1+e_2)(z) - \alpha^\pm\right)| \ < \ +\infty. \tag{6}$$

L'intérêt de cet hypothèse est essentiellement technique, et la même méthode donne en fait aussi un résultat (moins explicite cependant) lorsque (6) n'est pas satisfaite : voir [Ma3] section 6.

Enfin, on suppose que pour tout $z \in S_\lambda$, la norme du graphe de $H(z)$ sur $\mathcal{H}_1$ est uniformément équivalente à sa norme de Hilbert $\|.\|_{\mathcal{H}_1}$. Autrement dit, on suppose l'existence d'une constante positive C_0 telle que pour tout $z \in S_\lambda$ et tout $\varphi \in \mathcal{H}_1$, on ait :

$$\|H(z)\varphi\|_{\mathcal{H}} \ \geq \frac{1}{C_0}\|\varphi\|_{\mathcal{H}_1} - C_0\|\varphi\|_{\mathcal{H}}. \tag{7}$$

Des exemples d'opérateurs satisfaisant aux conditions **(R)**-**(D)**-**(G)**-(5)-(6) sont assez faciles à construire (il suffit par exemple de prendre un opérateur de Schrödinger indépendant du temps dont le spectre admet un gap, et de le perturber par un potentiel dépendant analytiquement du temps, convergeant assez vite à l'infini, et de norme L^∞ assez petite), et on renvoie aux articles déjà cités et à leurs bibliographies pour les applications physiques.

Posant

$$E(t) = \frac{e_1(t) + e_2(t)}{2}$$

et remarquant que $\tau + H(t) - E(t)$ est inversible pour $t \in \mathbb{R}$ et $|\tau| < \Gamma_0/2$, on considère alors

$$\kappa(\tau) = \mathrm{Sup}\ \left\{\kappa \in]0,\lambda]\ ;\ \tau + H(z) - E(z) \text{ est inversible pour tout } z \in S_\kappa\right\}$$

et on pose

$$\Sigma_0 = \int_{-\Gamma_0/2}^{\Gamma_0/2} \kappa(\tau)d\tau. \tag{8}$$

Notre résultat est alors :

THEOREME. — *Sous les hypothèses* **(R)**, **(D)**, **(G)** *et* (5)-(7), *on a pour tout* $\delta > 0$ *arbitrairement petit :*

$$\mathcal{P}_{1,2}(-\infty, +\infty) = \mathcal{O}\left(e^{-2(\Sigma_0-\delta)/\varepsilon}\right)$$

uniformément pour $\varepsilon > 0$ *assez petit.*

Remarque : Dans la situation de [JaSe], on obtient $\kappa(\tau) = \lambda$ et donc $\Sigma_0 = \lambda\Gamma_0$ ce qui, modulo la perte arbitrairement petite δ, permet de retrouver le résultat de [JaSe].

Bien que nous pensions que le taux Σ_0 que nous obtenons n'est pas loin d'être optimal, nous n'avons pas réussi à le démontrer en toute généralité. On peut cependant vérifier ce point dans le cas particulier suivant : supposons que $H(t)$ soit une matrice 2×2 dont les valeurs propres $e_1(t)$ et $e_2(t)$ vérifient la condition de gap et sont telles que la fonction :

$$\theta(s) := \operatorname*{Inf}_{t\in\mathbb{R}} |e_1(t+is) - e_2(t+is)|$$

soit décroissante sur $[0, s_0]$, où s_0 désigne le premier zero positif de θ. On obtient alors :

$$\Sigma_0 = \int_0^{s_0} \theta(s)ds$$

et il n'est pas très difficile de vérifier que ce taux correspond exactement à celui obtenu par Joye dans [Jo], qui constitue jusqu'à présent le seul cas où la formule de Landau-Zener est démontrée (la fonction θ est alors en fait strictement décroissante).

3 - Idée de la preuve

Notre preuve repose sur l'étude microlocale des solutions de (1), et s'appuie sur des estimations à poids exponentiel déjà utilisées dans [Ma1]-[Ma2] dont une conséquence est de pouvoir préciser la décroissance exponentielle microlocale des solutions d'EDP dans les zones d'ellipticité. Le détail de la preuve se trouve dans [Ma3].

Tout d'abord, il est assez standard de se ramener à $E(t) = 0$ et de montrer que $\mathcal{P}_{1,2}(-\infty, +\infty)$ peut s'exprimer en termes du carré d'un produit scalaire $\langle\varphi^-(t), \varphi^+(t)\rangle_{\mathcal{H}}$ (qui en fait ne dépend pas de t) faisant intervenir des fonctions $\varphi^-(t)$, $\varphi^+(t)$ à valeurs dans $\mathcal{H}$ satisfaisant (en notant $P_2 = 1 - P_1$) :

$$\begin{cases} (\frac{\varepsilon}{i}\partial_t + H(t))\varphi^\pm = 0 \\ P_2(t)\varphi^-(t) \to 0 \text{ lorsque } t \to -\infty \\ P_1(t)\varphi^+(t) \to 0 \text{ lorsque } t \to +\infty. \end{cases} \tag{9}$$

Posant $\varphi_j^\pm(t) = P_j(t)\varphi^\pm$ $(j=1,2)$, le système (9) devient :

$$\begin{cases} (\frac{\varepsilon}{i}\partial_t + H(t) + i\varepsilon[\dot{P}_1, P_1])\varphi_1^\pm = i\varepsilon\dot{P}_2(t)\varphi_2^\pm \\ (\frac{\varepsilon}{i}\partial_t + H(t) + i\varepsilon[\dot{P}_1, P_1])\varphi_2^\pm = i\varepsilon\dot{P}_1(t)\varphi_1^\pm \\ \varphi_1^+(t) \to 0 \text{ lorsque } t \to +\infty \text{ (resp. } \varphi_2^-(t) \to 0 \text{ lorsque } t \to -\infty). \end{cases} \tag{10$_\pm$}$$

(où $\dot{P}_j$ désigne la dérivée de P_j par rapport à t). Lorque ε tend vers 0, on peut considérer $(10)_\pm$ comme des systèmes semi-classiques (ε jouant le rôle du paramètre semi-classique) de symbole principal diagonal :

$$p(t,\tau) = \big(\tau + H(t)\big)\mathbf{I}_2.$$

En particulier, $p(t,\tau)$ est inversible lorsque $-\tau \notin \sigma(t)$. Pour pouvoir exploiter ce fait sans perdre d'informations sur les conditions en $t = \pm\infty$ dans $(10)_\pm$, on introduit la transformation de FBI suivante (où μ est un paramètre supplémentaire qui devra ensuite être fixé assez petit) :

$$T\varphi(t,\tau) = T_\mu\varphi(t,\tau;\varepsilon) = (2\pi\varepsilon)^{-3/4}(2\mu)^{1/4}\int e^{i(t-t')\tau/\varepsilon - \mu(t-t')^2/\varepsilon}\varphi(t')dt'. \tag{11}$$

Ce type de transformation a été introduit et étudié de manière systématique par Sjöstrand dans [Sj1]-[Sj2], et son intérêt est de permettre de travailler simultanément dans la variable t et sa Fourier-duale τ. Notons :

$$\tilde{D}_t = \frac{\varepsilon}{i}\frac{\partial}{\partial t}$$
$$\partial_\mu = \frac{1}{2\mu}\frac{\partial}{\partial t} + i\frac{\partial}{\partial\tau}.$$

Avec le même esprit que dans [Ma1]-[Ma2], on utilise alors l'estimation a priori suivante (en notant C_b^∞ l'espace des fonction C^∞ qui sont bornées ainsi que toutes leurs dérivées) :

Proposition. — *Soit $g = g(t,\tau) \in C_b^\infty(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ telle que $|\partial_\tau g| \le \lambda$. Pour tout $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R};\mathcal{H}_1)$ on a :*

$$\begin{aligned}&\|e^{g/\varepsilon}T\big(\tilde{D}_t + H(t)\big)\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^2;\mathcal{H})} \\ &\quad = \|e^{g/\varepsilon}\big(\tau + 2i\mu\partial_\mu g + H(t - \partial_\mu g)\big)T\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^2;\mathcal{H})} + \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon})\|e^{g/\varepsilon}T\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^2;\mathcal{H}_1)}\end{aligned}$$

uniformément par rapport à $\varepsilon > 0$ assez petit et $\varphi \in C_0^\infty$.

Cette estimation permet dans un premier temps de montrer que les $T\varphi_j^\pm$ sont exponentiellement petites dans la zone d'ellipticité $|\tau| < \Gamma_0/2$ avec pour taux

$$g_1(\tau) = \mathbf{1}_{(-\frac{\Gamma_0}{2},\frac{\Gamma_0}{2})}(\tau)\mathrm{Min}\Big\{\int_{-\Gamma_0/2}^{\tau}\kappa(s)ds\ ;\ \int_{\tau}^{\Gamma_0/2}\kappa(s)ds\Big\} \tag{12}$$

où la signification précise est la suivante : pour tout $\delta > 0$, $k, l \in \mathbb{N}$, et $\mu > 0$ assez petit :

$$\|\langle\tau\rangle^{-k-l-1}\langle t\rangle^{-\eta} e^{g_1/\varepsilon}\tilde{D}_t^k \tilde{D}_\tau^l T_\mu \varphi_j^\pm\|_{L^2(\mathbb{R}^2;\mathcal{H}_1)} = \mathcal{O}(e^{\delta/\varepsilon}). \tag{13}$$

Notant ensuite τ_1 le point où g_1 atteint son maximum (qui vaut $\Sigma_0/2$), l'estimation (13) va permettre de séparer l'étude des solutions de $(10)_\pm$ dans $\{\tau \leq \tau_1\}$ et dans $\{\tau \geq \tau_1\}$, de la manière suivante : notons χ une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}$ telle que $\chi = 1$ sur $\{\tau \leq \tau_1\}$, et $\chi = 0$ sur $\{\tau \geq \tau_1 + \nu\}$ où $\nu > 0$ est assez petit. On déduit alors de (13) le résultat suivant :

LEMME. — *Pour tout $\delta > 0$, et pour μ, ν positifs assez petits on a*

$$\|\langle t\rangle^\eta [H(t - \tilde{D}_\tau), \chi(\tau)] T_\mu \varphi_j^\pm\| = \mathcal{O}\left(e^{-(\Sigma_0 - \delta)/2\varepsilon}\right)$$

uniformément pour $\varepsilon > 0$ assez petit.

Ce lemme permet d'insérer la fonction χ dans le transformé du système $(10)_-$ par T_μ en contrôlant l'erreur ainsi faite, et donc de ramener essentiellement celui-ci en un système agissant sur des fonctions supportées dans $\{\tau \leq \tau_1 + \nu\}$. Mais dans cette zone, l'opérateur $\tilde{D}_t + H(t)P_1(t)$ est elliptique, ce qui permet à partir de la première équation d'obtenir une estimation de $T\varphi_1^-$ du type :

$$\|\langle t\rangle^{-\eta}\chi(\tau)T\varphi_1^-\| = \mathcal{O}\Big(\varepsilon\|\langle t\rangle^{-\eta}\chi(\tau)T\varphi_2^-\| + e^{-(\Sigma_0-\delta)/2\varepsilon}\Big) \tag{14}$$

Reportant celle-ci dans la deuxième équation, on trouve alors :

$$\|\langle t\rangle^\eta(\tilde{D}_t + H_A(t - \tilde{D}_\tau))\chi(\tau)T\varphi_2^-\| = \mathcal{O}\Big(\varepsilon^2\|\langle t\rangle^{-\eta}\chi(\tau)T\varphi_2^-\| + e^{-(\Sigma_0-\delta)/2\varepsilon}\Big) \tag{15}$$

où l'on a noté $H_A = H + i\varepsilon[\dot{P}_1, P_1]$. Calculant ensuite $\partial_t\|\chi(\tau)T\varphi_2^-\|^2_{L^2(\mathbb{R}_\tau;\mathcal{H})}$ et utilisant le fait que φ_2 est nulle en $-\infty$, on en déduit une estimation sur $\chi(\tau)T\varphi_2^-$ qui, d'après (14), donne finalement :

$$\|\langle t\rangle^{-\eta}\chi(\tau)T\varphi^-\| = \mathcal{O}\big(e^{-(\Sigma_0-\delta)/2\varepsilon}\big). \tag{16}$$

Une estimation analogue pour $T\varphi^+$ s'obtient de même, en tronquant cette fois dans la zone $\{\tau \geq \tau_1\}$.

Revenant à la zone d'ellipticité $|\tau| < \Gamma_0/2$, on voit alors que (16) permet d'appliquer à nouveau la proposition à φ^- mais avec un poids g_2 égal à $\Sigma_0/2$ sur $\{\tau \leq \Gamma_0/2\}$. On en déduit une amélioration de l'estimation (13) dans la zone $\{\tau \leq \tau_1\}$, que l'on peut ensuite propager comme précédemment vers les τ négatifs. Itérant cette procédure et travaillant de manière symétrique pour φ^+, on trouve alors que pour tout $\delta > 0$, il existe $\mu = \mu(\delta) > 0$ tel que :

$$\begin{aligned}\|\langle t\rangle^{-\eta}e^{g_-/\varepsilon}T\varphi^-\| &= \mathcal{O}(e^{\delta/\varepsilon})\\ \|\langle t\rangle^{-\eta}e^{g_+/\varepsilon}T\varphi^+\| &= \mathcal{O}(e^{\delta/\varepsilon})\end{aligned} \tag{17}$$

avec (en prolongeant la fonction κ par zero à l'extérieur de $]-\Gamma_0/2, \Gamma_0/2[$) :

$$g_-(\tau) = \mathrm{Max}\Big(0, \int_\tau^{\Gamma_0/2} \kappa(\tau)d\tau\Big)$$
$$g_+(\tau) = \mathrm{Max}\Big(0, \int_{-\Gamma_0/2}^{\tau} \kappa(\tau)d\tau\Big).$$

Remarquant finalement que $\langle\varphi^-(t), \varphi^+(t)\rangle_{\mathcal{H}} = \langle T\varphi^-(t,.), T\varphi^+(t,.)\rangle_{L^2(\mathbb{R}_\tau,\mathcal{H})}$, le résultat cherché se déduit de (17) et du fait que $g_- + g_+ = \Sigma_0$.

Références

[ASY] J.E. Avron, R. Seiler, L.G. Yaffe : *Adiabatic Theorems and Applications to the Quantum Hall Effect*, Commun. Math. Phys. 110, 33-49 (1987).

[BoFo] M. Born, V. Fock : *Beweis des Adiabatensatzes*, Z. Phys. 51, p. 165-169 (1928).

[Ga] L.M. Garrido : *Generalized adiabatic invariance*, J. Math. Phys. 5, p. 355-362 (1964).

[HeSj] B. Helffer, J. Sjöstrand : *Multiple Wells in the Semiclassical Limit I*, Comm. P.D.E., vol. 9, (4), 1984, p. 337-408.

[JaSe] V. Jakšić, J. Segert : *Exponential approach to the adiabatic limit and the Landau-Zener formula*, Rev. Math. Phys., Vol.4 (4), p. 529-574 (1992).

[Jo] A. Joye : *Proof of the Landau-Zener Formula*, Preprint C.P.T. Marseille, Dec. 1992.

[JKP] A. Joye, H. Kunz, C.-E. Pfister : *Exponential Decay and Geometric Aspect of Transition Probabilities in the Adiabatic Limit*, Annals of Physics 208, p. 299-332 (1991).

[JoPf1] A. Joye, C.-E. Pfister : *Exponentially small adiabatic invariant for the Schrödinger equation*, Commun. Math. Phys. 140, p. 15-41 (1991).

[JoPf2] A. Joye, C.-E. Pfister : *Superadiabatic evolution and transition probability between two non-degenerate levels isolated in the spectrum*, J. Math. Phys. 34 (1993), 454-479.

[Ka] T. Kato : *On the adiabatic theorem of quantum mechanics*, J. Phys. Soc. J. Jpn. 5, 435-439 (1950).

[Le] A. Lenard : *Adiabatic invariants to all orders*, Ann. Phys. 6, p. 261-276 (1959).

[Ma1] A. Martinez : *Estimates on Complex Interactions in Phase Space*, Preprint Univ. Paris 13, Fev. 1992.

[Ma2] A. Martinez : *Estimations sur l'effet tunnel microlocal*, Séminaire E.D.P. de l'Ecole Polytechnique, 1991-92.

[Ma3] A. Martinez : *Precise exponential estimates in adiabatic theory*, Preprint Univ. Paris 13, Avril 1993.

[Ne1] G. Nenciu : *Adiabatic theorem and spectral concentration*, Commun. Math. Phys. 82, p.121-135, (1981).

[Ne2] G. Nenciu : *Linear Adiabatic Theory. Exponential Estimates*, Commun. Math. Phys., to appear (1993).

[Ne3]G. Nenciu : *Exponential estimates in linear adiabatic theory : dependance on the gap*, Preprint Mittag-Leffler Institute, 1993.

[Sa] S.J. Sancho : *m-th order adiabatic invariance for quantum systems*, Proc. Phys. Soc. Lond. 89, p. 1-5 (1966).

[Sj1] J. Sjöstrand : *Singularités analytiques microlocales*, Astérisque n° 95, 1982.

[Sj2] J. Sjöstrand : Graduate Lecture at the University of Lund, 1985-86 (Manuscript).