Journées Équations aux dérivées partielles

Nicolas Depauw

Poche de tourbillon pour Euler 2D incompressible dans un ouvert à bord

Journées Équations aux dérivées partielles (1998), p. 1-12

<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1998____A3_0>

Journées *Équations aux dérivées partielles*
Saint-Jean-de-Monts, 2-5 juin 1998
GDR 1151 (CNRS)

Poche de tourbillon pour Euler 2D dans un ouvert à bord

Nicolas Depauw

Résumé

Nous considérons l'équation d'Euler pour un fluide incompressible dans un domaine borné régulier du plan. Pour une donnée initiale avec un tourbillon de type poche, i.e valant 1 sur un ouvert lisse à bord hölderien et 0 en dehors, nous prouvons l'existence d'une solution de même type, pour tout temps si la poche initiale est décollée du bord du domaine et seulement localement en temps si la poche initiale est tangente au bord. Nous contrôlons l'influence du bord grâce à la théorie des problèmes pseudo-différentiels elliptiques aux limites. Pour le cas limite de la poche tangente, nous montrons par un calcul d'intégrale singulière que le gradient d'un champs de vecteur à tourbillon de type poche est hölderien jusqu'au bord de la poche. Cela nous permet aussi de prouver, dans le plan entier, pour un tourbillon initial fait de plusieurs poches tangentes, l'existence locale d'une solution de même type.

1. Introduction.

1.1 Problème

On considère l'équation d'Euler incompressible

$$\begin{aligned} &\partial_t u + (u \cdot \nabla) u + \nabla p = 0 \\ &\nabla \cdot u = 0 \qquad u_{|\partial D} \cdot \nu = 0 \end{aligned} \tag{E}$$

$t \in \mathbb{R}$, $x = (x_1, x_2) \in D$ qui est soit $\mathbb{R}^2$, soit un domaine de $\mathbb{R}^2$, ouvert borné C^∞ connexe simplement connexe. $\nabla = (\partial_1, \partial_2)$ est l'opérateur gradient. $\nabla \cdot$ est l'opérateur de divergence. $u = (u_1, u_2)$ est le champ des vecteurs vitesses. $(u \cdot \nabla) \doteq \sum_{i=1}^{2} u_i \partial_i$ est la dérivation associée. p est le champ scalaire de pression. ν est le champ de vecteurs unitaire normal (exterieur) au bord ∂D de D. Le tourbillon de u, $\omega(t,x) \doteq \nabla^\perp \cdot u \doteq (-\partial_2 u_1 + \partial_1 u_2)(t,x)$ vérifie l'équation de transport

$$(\partial_t + u \cdot \nabla)\omega = 0 \tag{T}$$

qui se résoud à l'aide du flot $\mathfrak{X}$ du champ de vecteurs u défini par

$$\partial_t \mathfrak{X}(t,x) = u(t, \mathfrak{X}(t,x)) \qquad \mathfrak{X}(0,x) = x \tag{F}$$

par la méthode des caractéristiques $\omega(t, \mathfrak{X}(t,x)) = \omega(0,x)$.

D'un autre côté, connaissant ω, on peut reconstruire u en résolvant le problème elliptique aux limites

$$\nabla^\perp \cdot u = \omega \qquad \nabla \cdot u = 0 \qquad u_{|\partial D} \cdot \nu = 0$$

Dans le cas $D = \mathbb{R}^2$, la solution de ce problème (sans la condition au bord) est donnée par la loi de Biot et Savart (avec $x^\perp \doteq (-x_2, x_1)$)

$$u = \boldsymbol{V}\omega \doteq V * \omega \qquad V(x) \doteq (2\pi)^{-1}|x|^{-2}x^\perp \tag{BS}$$

Dans le cas de D borné, on décompose $u = v + w$ où v vérifie le problème intérieur

$$\nabla^\perp \cdot v = \omega \qquad \nabla \cdot v = 0 \tag{1}$$

et w corrige la condition au bord

$$\nabla^\perp \cdot w = 0 \qquad \nabla \cdot w = 0 \qquad w_{|\partial D} \cdot \nu = -v_{|\partial D} \cdot n \tag{2}$$

Pour trouver v, on commence par choisir $\dot\omega$ fonction sur $\mathbb{R}^2$ telle que $\dot\omega_{|\Omega} = \omega$. On pose $\dot v = \boldsymbol{V}\dot\omega$. Alors $v = \dot v_{|D}$ résout le problème intérieur (1). Connaissant v sur D, et donc sa trace sur ∂D, on récupère $w = -\boldsymbol{\mathcal{K}}(v \cdot n)$ à l'aide de l'opérateur de Poisson $\boldsymbol{\mathcal{K}}$ qui résout (2). On écrit finalement $u = v + w = \boldsymbol{\mathcal{B}}\omega$.

Le transport (T) du tourbillon, qui est à la base de la preuve de l'existence globale de solutions régulières, est également précieuse pour l'étude de solutions à régularité limitée. Pour $D = \mathbb{R}^2$, Yudovich [Yud63] a montré que si l'on considère un champ de vitesses initial u_0 à divergence nulle dont le tourbillon ω_0 est dans $L^\infty \cap L^1(\mathbb{R}^2)$, l'équation (E) admet une unique solution définie globalement en temps. De plus, le tourbillon de la solution $u(t,.)$ à l'instant t vérifie $\|\omega(t,.)\|_{L^p} = \|\omega_0\|_{L^p}$, pour tout $p \in [1,\infty]$. On en déduit que le champ de vecteurs u est quasi-lipchitzien [CL95] en espace, ce qui permet de donner un sens à la définition (F) du flot $\mathfrak{X}(t,.)$. Alors $\omega(t,.)$ s'obtient à partir de ω_0 par transport le long des lignes du flot. Cela entraîne en particulier que si $\omega_0 = \mathbf{1}_{\Omega_0}$ avec Ω_0 ouvert de $\mathbb{R}^2$, $\omega(t,.) = \mathbf{1}_{\Omega(t)}$ pour un ouvert $\Omega(t)$ obtenu à partir de Ω_0 par transport.

Toutefois, le flot $\mathfrak{X}(t,.)$ n'est pas suffisamment régulier pour assurer à priori que l'hypothèse $\partial\Omega_0$ *lisse* implique que $\partial\Omega(t)$ est lisse pour tout temps. Cela a amené Majda [Maj86] à soulever la question suivante: supposons que la donnée initiale u_0 soit un champ à divergence nulle de tourbillon $\omega_0 = \mathbf{1}_{\Omega_0}$ avec Ω_0 ouvert borné à bord lisse de $\mathbb{R}^2$. Peut-on prouver que l'ouvert $\Omega(t)$ transporté par le flot est à bord lisse? La réponse à cette question oblige bien sûr à obtenir sur le flot un renseignement plus précis que celui fourni par le résultat de Yudovich. C'est ce qu'a fait Chemin en montrant, d'abord localement en temps [Che91], puis globalement [Che93, Che95], que l'hypothèse $\omega_0 = \mathbf{1}_{\Omega_0}$ avec $\partial\Omega_0$ lisse entraîne que la vitesse $u(t,.)$ est lipschitzienne en x, et que $\partial\Omega(t)$ est lisse pour tout t. Une autre preuve a été donnée par Bertozzi et Constantin [BC93]. Mentionnons aussi la démonstration de Serfati dans [Ser93].

Avant d'énoncer nos résultats, précisons les espaces fonctionnels utilisés ensuite. L^p est l'espace de Lebesgue d'indice $p \in [0, \infty]$. C_*^r est l'espace de Hölder d'indice $r \in \mathbb{R}$, avec la norme $\|.\|_r$. Pour $r \in]0,1[$, on rappelle que

$$\|u\|_r = \|u\|_{L^\infty} + \sup_{x,y \in \mathbb{R}^2} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^r}$$

Pour les autres valeurs de r, disons simplement que $(1-\Delta)^{\alpha/2}$ (avec Δ le laplacien $\nabla \cdot \nabla$) est un isomorphisme de C_*^r dans $C_*^{r-\alpha}$. Pour $r \in \mathbb{N}$, C_*^r est une classe de Zygmund et non pas l'espace C^r des fonctions r-fois continûment différentiables.

1.2 Énoncés

Dans le cas d'un domaine D borné, et pour $s \in]0,1[$, nous obtenons le

Théorème A (poches de tourbillon). *Soit Ω_0 un ouvert de classe C_*^{1+s} dans $\mathbb{R}^2$, et $a \in \mathbb{R}$. On suppose $\Omega_0 \subset D$. Soit $\omega_0 = a\mathbf{1}_{\Omega_0}$. Alors il existe $T_* > 0$ et une unique solution $u \in L^\infty_{\text{loc}}([0, T_*[; Lip)$ de l'équation d'Euler* (E) *pour la donnée initiale $u_0 = \mathcal{B}\omega_0$. Pour $t < T_*$, le tourbillon $\omega(t) \doteq \nabla^\perp \cdot u(t)$ s'écrit $a\mathbf{1}_{\Omega(t)}$ avec $\Omega(t)$, qui est l'image de Ω_0 par le flot $\mathfrak{X}(t)$ de u à l'instant t, ouvert de classe C_*^{1+s} inclus dans D.*

Si $\overline{\Omega}_0 \subset D$, alors $T_* = \infty$ et $\overline{\Omega}(t) \subset D$ pour tout $t \geqslant 0$.

Nous donnerons à la définition 2.1 le sens précis de l'expression Ω *ouvert de classe* C_*^{1+s}.

Remarque 1.1. Le cas d'une poche Ω_0 tangente intérieurement à D est un cas limite. Pour Ω_0 de classe C_*^{1+s} et $\overline{\Omega}_0 \subset D$, on retrouve la persistance globale en temps démontré par Chemin pour $D = \mathbb{R}^2$. Si $\Omega_0 = \Omega_{(0)} \cap D$ où $\Omega_{(0)}$ est de classe C_*^{1+s} dans $\mathbb{R}^2$ mais non inclus dans D, on ne sait rien dire. Entre les deux, si Ω_0 est C_*^{1+s} et $\partial\Omega_0$ touche ∂D, notre résultat donne une persistance, localement en temps.

Remarque 1.2. Un exemple de Bahouri et Chemin [BC94] montre que dans le cas où $\partial\Omega_0$ coupe ∂D transversalement, il est possible que ∇u_0 ne soit pas borné. Précisement, on considère D le demi-plan $x_1 > 0$ et Ω_0 sa moitié $x_2 > 0$. Pour calculer u_0, on peut prolonger ω_0 de façon impaire, et chercher le champ de vecteur par la loi de Biot et Savart sur $\mathbb{R}^2$. Choisir $\omega_0 = 1$ sur Ω_0, $\omega_0 = -1$ sur $D \setminus \Omega_0$, avec une troncature radiale, donne l'exemple décrit dans [BC94].

Remarque 1.3. Reprenant le cas ci-dessus du demi-plan, on voit qu'une poche tangente dans un demi-plan équivaut à deux poches de signe contraire tangentes dans $\mathbb{R}^2$ entier. On conçoit donc que la méthode puisse s'appliquer à plusieurs poches disjointes dans $\mathbb{R}^2$ éventuellement tangentes.

Remarque 1.4. L'image de deux poches tangentes révèle un point de type cusp. Chemin [Che95] montre qu'une poche initiale, à bord C_*^{1+s} sauf en un point, conserve globalement en temps ce type de régularité. Sa méthode ne distingue pas la nature de la singularité. Un théorème de Danchin [Dan97] prouve qu'une poche initiale, à bord C^{1+s}_* sauf en un point singulier de type cusp, engendre une solution u globale lipschitzienne. Mais la structure qu'il propage globalement est plus générale qu'une singularité de type cusp. Ainsi il ne précise pas si il existe une demi-tangente au point singularité pour $t > 0$.

Théorème B. *Pour $i = 1$ à N, soient $\Omega_{i0} \subset \mathbb{R}^2$ des ouverts de classe C^{1+s}_* disjoints et $a_i \in \mathbb{R}$. Soit $\omega_0 = \sum_{i=1}^N a_i \mathbf{1}_{\Omega_{i0}}$. Alors il existe $T_* > 0$ et une unique solution $u \in L^\infty_{\mathrm{loc}}([0, T_*[; Lip)$ de l'équation d'Euler* (E) *sur $\mathbb{R}^2$ pour la donnée initiale $u_0 = \boldsymbol{V}\omega_0$. Le tourbillon $\omega(t) \doteq \nabla^\perp \cdot u(t)$ s'écrit $\sum_{i=1}^N a_i(\mathbf{1}_{\Omega_i(t)})$ où les $\Omega_i(t)$, images de Ω_{i0} par le flot $\mathfrak{X}(t)$ de u à l'instant t, sont des ouverts disjoints de classe C^{1+s}_*.*

Si a priori $u \in L^\infty([0,T]; Lip)$, alors $\forall t \in [0,T]$, $\omega(t) = \sum_{i=1}^N a_i(\mathbf{1}_{\Omega_i(t)})$ où les $\Omega_i(t)$ sont des ouverts disjoints de classe C^{1+s}_*.

2. Démonstration des théorèmes.

La preuve des théorèmes consiste en

1. régulariser la donnée initiale, avec précaution en vue du 2 ;
2. obtenir pour les solutions régulières une estimation *a priori* ne dépendant que de la donnée initiale singulière ;
3. passer à la limite.

Dans la suite de cette section nous donnons quelques détails sur les deux premiers points.

2.1 régularisation

On a vu le caractère critique de la position de la poche tangente par rapport au domaine de l'écoulement. Écrivons $\mathbf{1}_\Omega = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+} \circ \dot\varphi$ où $\dot\varphi$ est une fonction *indicatrice* de la poche Ω: $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \dot\varphi(x) > 0\}$. La régularité de Ω se caractérise au moyen de celle de $\dot\varphi$, à condition toutefois que $\nabla\dot\varphi$ ne s'annulle pas sur $\partial\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \dot\varphi(x) = 0\}$. De plus, pour transporter la régularité, il convient de ne considérer la fonction indicatrice qu'à l'intérieur de Ω. On est donc conduit à la

Définition 2.1. Soit $s \in]0,1[$. On dira que $(\Omega, \varphi) \in \mathcal{H}_s$ si les quatre conditions suivantes sont vérifiées :

1. Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}_+$ est C^1.
2. Convenant de noter :

$$\langle\!\langle \nabla\varphi \rangle\!\rangle_s \doteq \sup_{\Omega^2} \frac{|\nabla\varphi(x) - \nabla\varphi(y)|}{|x-y|^s}$$

on doit avoir la norme höldérienne *interne* :

$$\|\nabla\varphi\|_s \doteq \max(\|\nabla\varphi\|_{L^\infty}, \langle\!\langle \nabla\varphi \rangle\!\rangle_s) < \infty$$

3. Quand x tend dans Ω vers un point de $\partial\Omega$, $\varphi(x)$ tend vers 0.

4. Le nombre $\mathcal{I}$ défini par

$$\mathcal{I} \doteq \min\{|\nabla\varphi(x)| \mid x \in \Omega \quad 0 < \varphi(x) < 1\} \tag{1}$$

est strictement positif.

Pour U ouvert de $\mathbb{R}^n$, on note U' l'ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{U}$.

On peut prendre l'assertion *il existe* φ *telle que* $(\Omega, \varphi) \in \mathcal{H}_s$ comme définition de la régularité C_*^{1+s} de l'ouvert Ω, puisque dans ce cas le prolongement par continuité de $\nabla\varphi$ à $\partial\Omega$ donne un champ de vecteurs qui ne s'annule pas, normal au bord et assez régulier. En fait on a même précisément

Lemme 2.1 (extension de la fonction indicatrice). *Pour tout* $s \in]0,1[$, *il existe* C *telle que pour tout* (Ω, φ) *dans* $\mathcal{H}_s$, *il existe* $\dot\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *localement* C_*^{1+s} *telle que* $\nabla\dot\varphi \in C_*^s(\mathbb{R}^n)$ *et*

$$\begin{gathered}\dot\varphi_{|\Omega} = \varphi \\ \|\nabla\dot\varphi\|_{L^\infty} \leqslant C\|\nabla\varphi\|_{L^\infty} \qquad \|\nabla\dot\varphi\|_s \leqslant C\|\nabla\varphi\|_s \\ \Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \dot\varphi(x) > 0\} \qquad \Omega' = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \dot\varphi(x) < 0\} \\ \mathcal{I} = \inf\{|\nabla\dot\varphi(x)| \mid 0 < \dot\varphi(x) < 1\}\end{gathered}$$

Cette proposition permet d'étendre la fonction indicatrice φ donnée sur Ω en une fonction $\dot\varphi$ sur $\mathbb{R}^2$ qui *indique* exactement la même *poche* Ω. Ainsi $\partial\Omega$ est une sous-variété C_*^{1+s} de $\mathbb{R}^2$ au sens usuel. Pour la démonstration nous renvoyons à [Dep98a].

Pour régulariser $\mathbf{1}_\Omega$ sans modifier les précieux renseignements géométriques contenus dans φ, on se contente de régulariser $\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}$.

Définition 2.2. On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, mesurables, croissantes, nulles sur $]-\infty, 0[$ et égales à 1 sur $]1, +\infty[$.

On peut alors approcher $f = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+} \in \mathcal{F}$ par une suite $f^{(n)}$ de fonctions dans $Lip \cap \mathcal{F}$ qui converge sur $\mathbb{R} \setminus E$ où $E \subset [0,1]$ est dénombrable. À cause de la condition $\mathcal{I} > 0$, on en déduit que $f^{(n)} \circ \varphi \to \mathbf{1}_\Omega$ presque partout sur Ω, et donc $\omega_0^{(n)} = a f^{(n)} \circ \varphi$ (étendus par 0 sur Ω') tend vers $\omega_0 = a\mathbf{1}_\Omega$ dans L^p pour tout $p < \infty$.

2.2 Estimation *a priori*

Commençons par rappeler comment cela fonctionne pour un tourbillon initial régulier. On a l'estimation statique

$$\|\nabla u\|_{L^\infty} \leqslant C\|\omega_0\|_{L^1 \cap L^\infty} \ln\Big(e + \frac{\|\omega\|_s}{\|\omega\|_{L^\infty}}\Big) \tag{2}$$

D'autre part l'équation de transport du tourbillon (T) donne facilement

$$\|\omega(t)\|_{L^\infty} = \|\omega_0\|_{L^\infty} \qquad \|\omega(t)\|_s \leqslant \|\omega_0\|_s \exp\big(s \textstyle\int_0^t \|\nabla u\|_{L^\infty}\big) \tag{3}$$

En remplaçant (3) dans (2), puis en appliquant le lemme de Gronwall on obtient une majoration sur $\|\nabla u\|_{L^\infty}$, qui croît exponentiellement en t.

Pour nos deux théorèmes, on va obtenir les estimations statiques à partir de

Proposition 2.2 (Estimation pour une poche dans $\mathbb{R}^2$). *Étant donné $s \in]0,1[$ il existe deux constantes C, c vérifiant l'énoncé suivant. Pour tout (Ω, φ) dans $\mathcal{H}_s$, $\dot{\varpi}$ dans $L^1 \cap C^s_*(\mathbb{R}^2)$, on définit $\mathcal{I}$ par (1), $\dot{\mathcal{L}}$ et $\dot{\mathcal{V}}$ par*

$$\dot{\mathcal{L}} \doteq \frac{\|\dot{\varpi}\|_s}{\|\dot{\varpi}\|_{L^\infty}} + \frac{\|\nabla\varphi\|_s}{\mathcal{I}} \qquad \dot{\mathcal{V}} \doteq \|\dot{\varpi}\|_{L^1\cap L^\infty} \ln(e + \dot{\mathcal{L}}) \tag{4}$$

Pour tout f dans $\mathcal{F}$, on définit le tourbillon par

$$\dot{\omega}_{|\Omega} \doteq \dot{\varpi}(f \circ \varphi) \qquad \dot{\omega}_{|\Omega'} \doteq 0 \tag{5}$$

Alors $\dot{v} = V * \dot{\omega}$ est l'unique champ de vecteurs dans $L^q(\mathbb{R}^2)$ pour $q \in]2, \infty[$ tel que $\nabla \cdot \dot{v} = 0$ et $\nabla^\perp \cdot \dot{v} = \dot{\omega}$. De plus il vérifie les estimations suivantes.

$$\|\dot{v}\|_1 \leqslant C\|\dot{\varpi}\|_{L^1\cap L^\infty} \tag{6}$$

$$\|\nabla\dot{v}\|_{L^\infty} \leqslant C\dot{\mathcal{V}} \tag{7}$$

$$\|(\nabla^\perp\varphi \cdot \nabla)\dot{v}\|_s \leqslant C\|\nabla\dot{v}\|_{L^\infty}\|\nabla\varphi\|_s + C\|\dot{\varpi}\|_s\|\nabla\varphi\|_{L^\infty} \tag{8}$$

$$\|\nabla\dot{v}_{|\Omega'}\|_s \leqslant C\dot{\mathcal{V}}\dot{\mathcal{L}} \tag{9}$$

$$\forall d > 0 \qquad \|\nabla\dot{v}_{|(\Omega+B_d)'}\|_s \leqslant C\dot{\mathcal{V}}d^{-s} \tag{9'}$$

Le membre de gauche dans (8) *est une norme* interne *sur Ω.*

Nous exposerons les idées de la démonstration de cette proposition dans la dernière partie de cet article.

Remarque 2.1. L'information vraiment nouvelle, en comparaison avec les travaux de Chemin sur les poches de tourbillon considérées comme des cas particuliers de structures géométriques à régularité conormale par rapport à un champ de vecteurs, c'est l'estimation (9). Elle dit que le gradient de vitesse est höldérien hors de la poche jusqu'au bord de celle-ci. Ce renseignement est capital pour étudier comment ce champ de vitesses transporte un arc de courbe (en pratique, le bord d'une autre poche) extérieur à la poche.

L'obtention des estimations *a priori* sur $\|\nabla u\|_{L^\infty}$ utilisées dans la preuve des deux théorèmes à partir de cette proposition présente deux difficultés nouvelles. La première, c'est que soit la poche n'est pas dans $\mathbb{R}^2$ (théo. A), soit elle n'est pas seule (théo. B). Concentrons nous sur la première situation. La proposition s'applique directement à v dans la décomposition $u = v + w$, puisque $v = \boldsymbol{V}\omega$ dès que $\Omega \subset D$. Pour $w = -\boldsymbol{\mathcal{K}}(v{\cdot}\nu)$, on applique les propriétés de continuité de l'opérateur de Poisson $\boldsymbol{\mathcal{K}}$ dans les espaces de Hölder [Joh96], ainsi qu'une estimation logarithmique sur D tout à fait semblable à celle sur $\mathbb{R}^2$

$$\|w\|_{Lip} \leqslant C\|w\|_1 \ln\Big(e + \frac{\|w\|_{1+s}}{\|w\|_1}\Big)$$

Dans l'évaluation de $\|(\nabla^\perp\varphi\cdot\nabla)u\|_s$, on ne sait pas, pour w, prendre en compte la géométrie comme pour v. On a seulement

$$\|(\nabla^\perp\varphi\cdot\nabla)w\|_s \leqslant \|\nabla\varphi\|_s\|\nabla w\|_{L^\infty} + \|\nabla\varphi\|_{L^\infty}\|w_{|\Omega}\|_s$$

On obtient alors le

Corollaire 2.3. *Étant donné $s\in\,]0,1[$, il existe C tel que : pour tout $(\Omega,\varphi)\in\mathcal{H}_s$ avec $\Omega\subset D$, ϖ dans $C^s_*(D)$ et $f\in\mathcal{F}$, si on définit $\mathcal{L}$ et $\mathcal{V}$ comme dans* (4) *(avec les normes de ϖ prises sur D à la place des normes de $\dot\varpi$ prises sur $\mathbb{R}^2$) et le tourbillon ω par* (5) *(restreint à D), alors le champ de vitesses $u\doteq\mathcal{B}\omega$ vérifie*

$$\|u\|_{Lip}\leqslant C\mathcal{V} \tag{10}$$

$$\|(\nabla^\perp\varphi\cdot\nabla)u\|_s\leqslant C\mathcal{V}\|\nabla\varphi\|_{L^\infty}\mathcal{L} \tag{11}$$

Si de plus $\overline{\Omega}\subset D$, alors $d=\mathrm{d}(\Omega,\partial D)>0$ et on a

$$\begin{aligned}\|(\nabla^\perp\varphi\cdot\nabla)u\|_s\leqslant{}& C\mathcal{V}\|\nabla\varphi\|_s\\ &+C\|\varpi\|_s\|\nabla\varphi\|_{L^\infty}+C\mathcal{V}d^{-s}\|\nabla\varphi\|_{L^\infty}\end{aligned} \tag{11'}$$

Au membre de gauche de (11) et (11'), il s'agit de la norme interne sur Ω, la fonction φ n'étant pas définie ailleurs. (11) est moins douce que (8) car elle présente un facteur $\|\nabla\varphi\|_{L^\infty}/\mathcal{I}$ dont l'estimation au cours du transport par u se dégrade exponentiellement. (10) joue dans la preuve du théorème A le rôle de (2). Pour boucler l'estimation dans l'idée d'appliquer le lemme de Gronwall, il faut encore propager une estimation de $\|\nabla\varphi\|_s$.

Et c'est là que la première difficulté engendre la seconde. On choisit de transporter φ par le flot de u. Alors en dérivant l'équation de transport (T) écrite avec φ à la place de ω, et grâce à la condition $\nabla\cdot u=0$, on obtient

$$\partial_t\nabla^\perp\varphi+(u\cdot\nabla)\nabla^\perp\varphi=(\nabla^\perp\varphi\cdot\nabla)u$$

que l'on intègre par la méthode des caractéristiques, ce qui donne

$$\begin{aligned}\|\nabla^\perp\varphi(t)\|_s\leqslant{}&\|\nabla^\perp\varphi_0\|_s\exp\!\left(s\textstyle\int_0^t\|\nabla u\|_{L^\infty}\right)\\ &+\int_0^t\|(\nabla^\perp\varphi(\tau)\cdot\nabla)u(\tau)\|_s\exp\!\left(s\textstyle\int_\tau^t\|\nabla u\|_{L^\infty}\right)d\tau\end{aligned}$$

En remplaçant là les estimations du corollaire 2.3, on est en mesure d'appliquer une première fois le lemme de Gronwall pour obtenir

$$\mathcal{L}(t)\leqslant\mathcal{L}_0\exp\!\big(G_1(\textstyle\int_0^t\mathcal{V})\big)\qquad G_1(x)=cx+C\frac{\|\nabla\varphi_0\|_{L^\infty}}{\mathcal{I}}\big(\exp(cx)-1\big)$$

Quand on remplace ceci dans (10), le logarithme annihile la première exponentielle, mais il en reste une seconde derrière. C'est pourquoi l'on n'obtient l'estimation sur $\|\nabla u\|_{L^\infty}$ uniforme par rapport à f que localement en temps.

3. Intégrales singulières et compensation.

Dans cette section nous expliquons les arguments essentiels qui conduisent aux estimations (6)-(9').

Rappelons que la formule de Biot et Savart (BS) permet de calculer $\dot{v}$ à partir de $\dot{\omega}$ à l'aide de l'opérateur de convolution par le noyau V homogène de degré -1. Cela donne (6) de façon standard.

(8) découle d'une estimation du même type tirée de [Che95] pour $\dot{\omega}$ vérifiant $\nabla \cdot (X\dot{\omega}) \in C_*^{-1+s}$ où X est un champ de vecteurs C_*^s ainsi que sa divergence. Ici $X = \nabla\dot{\varphi}$, où $\dot{\varphi}$ prolonge φ (voir lemme 2.1).

Les trois autres estimations portent sur $\nabla\dot{v}$. La partie antisymétrique de la matrice $\nabla\dot{v}$ est par définition $\frac{1}{2}\omega\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, et vérifie donc trivialement les estimations. La partie symétrique se calcule à partir du tourbillon par convolution, l'intégrale étant prise en valeur principale :

$$\boldsymbol{N}\dot{\omega} \doteq \operatorname{vp} N * \dot{\omega} = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|y|>\epsilon} N(y)\dot{\omega}(. - y)\, dy$$

Le noyau $N(x) = (2\pi)^{-1}|x|^{-4}(x^\perp \otimes x + x \otimes x^\perp)$ est un noyau de Calderón-Zygmund sur $\mathbb{R}^2$ au sens suivant

Définition 3.1. On note S^{n-1} la sphère $\{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = 1\}$. Pour $\nu \in S^{n-1}$, on note S_ν^{n-1} l'hémisphère $S^{n-1} \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \cdot \nu > 0\}$.

Nous appellerons *noyau de Calderón-Zygmund sur* $\mathbb{R}^n$ toute application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ homogène de degré $-n$ dont la restriction à S^{n-1} est lipschitzienne et d'intégrale nulle.

Ces trois propriétés suffisent pour montrer (9').

De plus, comme l'ont remarqué Bertozzi et Constantin [BC93], l'intégrale du noyau est nulle aussi sur toutes les hémisphères :

$$\forall \nu \in S^{n-1} \qquad \int_{S_\nu^{n-1}} N(u)\, du = 0 \tag{1}$$

Ce fait leur avait permis de montrer (7) dans le cas ϖ constant.

Remarque 3.1. Les opérateurs de Riesz formant $\boldsymbol{N}$ possèdent la propriété de transmission [BdM71]. Cela implique de la régularité jusqu'au bord, comme dans (9) [Joh96]. Mais cette propriété est d'habitude étudiée par rapport à un ouvert Ω supposé C^∞ et fixe. Nous avons précisé dans (9) l'influence de la régularité limitée du bord $\partial\Omega$. La propriété de transmission s'exprime comme une condition sur le symbole de l'opérateur qui, au premier ordre, suggère (1).

Reprenant en détail les calculs d'intégrale singulière, nous avons obtenu le

Théorème C. *Soit N un noyau de Calderón-Zygmund sur $\mathbb{R}^n$ vérifiant* (1). *Étant donné $s \in]0,1[$, il existe deux constantes C, c vérifiant ceci : pour tout $\dot{\varpi} \in C_*^s(\mathbb{R}^n)$ et $\dot{\varphi} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ localement C_*^{1+s}, avec $\nabla\dot{\varphi} \in C_*^s(\mathbb{R}^n)$ et*

$$\dot{\mathcal{I}} \doteq \min\{|\nabla\dot{\varphi}(x)| \mid \dot{\varphi}(x) = 0\} > 0$$

on note $\dot{\omega} \doteq \dot{\varpi}(\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+} \circ \dot{\varphi})$ *et* l *la longueur définie par*

$$l^{-s} \doteq \frac{\|\dot{\varpi}\|_s}{\|\dot{\varpi}\|_{L^\infty}} + \frac{\|\nabla\dot{\varphi}\|_s}{\dot{\mathcal{I}}} \tag{2}$$

On suppose $\dot{\omega} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. *L'image* $\boldsymbol{N}\dot{\omega} \doteq \mathrm{vp}\, N * \dot{\omega}$ *de* $\dot{\omega}$ *par l'opérateur* $\boldsymbol{N}$ *de convolution par valeur principale associée à* N *vérifie*

$$\begin{gathered}\|\boldsymbol{N}\dot{\omega}\|_{L^\infty} \leqslant C(\|\dot{\omega}\|_{L^1} + \|\dot{\varpi}\|_{L^\infty}) \ln(e + l^{-s}) \\ \sup \frac{|\boldsymbol{N}\dot{\omega}(x) - \boldsymbol{N}\dot{\omega}(y)|}{|x-y|^s} \leqslant C(\|\dot{\omega}\|_{L^1} + \|\dot{\varpi}\|_{L^\infty}) l^{-s}\end{gathered} \tag{3}$$

où le sup *est pris sur les paires* $\{x, y\}$ *telles que* $\dot{\varphi}(x)\dot{\varphi}(y) > 0$ *et* $|x-y| < cl$.

Ce théorème est le point crucial de l'argumentation, puisque (3) donne un contrôle de la régularité C^s_* de $\boldsymbol{N}\dot{\omega}$ jusqu'au bord de l'hypersurface où $\dot{\omega}$ présente un saut de discontinuité.

Dans la suite on note $g = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+} \circ \dot{\varphi} = \mathbf{1}_\Omega$. On note encore, pour $h \in \mathbb{R}^n$, $\tau_h u(x) = u(x+h)$ et $\triangle_h u(x) = u(x+h) - u(x)$; et pour a une fonction sur $\mathbb{R}^n$, $\langle a \rangle u(x) = a(x) \cdot u(x)$.

On cherche donc une majoration de $\|\boldsymbol{N}\dot{\omega}\|_{L^\infty}$ (estimation en norme du sup) et $\||h|^{-s}\triangle_h \boldsymbol{N}\dot{\omega}\|_{L^\infty}$ (estimation höldérienne), celle-ci devant être uniforme sur l'ensemble des (x, h) tels que x et $x+h$ soient du même coté de $\partial\Omega$ (et $|h| < cl$).

On procède en deux temps. Dans un premier temps, on se limite à rechercher l'uniformité de l'estimation höldérienne seulement sur l'ensemble des (x, h) tels que $x \notin \partial\Omega$ et $2|h| < \mathsf{d}(x, \partial\Omega)$. La majoration ne dépend donc ni de h ni de x, mais le domaine des h admissibles se détériore quand x s'approche de $\partial\Omega$. Dans un second temps, on s'affranchit du caractère local de ce domaine grâce à la régularité de $\partial\Omega$ qui lui confère une propriété de cône. Dans la suite, nous détaillons les idées du premier temps.

On se donne une échelle $l > 0$. On sépare ensuite l'action de $\boldsymbol{N}$ à courte et à longue distance par rapport à cette échelle, à l'aide d'une fonction de troncature : soit $\chi \in C^\infty_c([0, 2[)$, $\chi = 1$ sur $[0, 1]$. On note $\chi_a(x) \doteq \chi(\frac{|x|}{a})$. Alors on décompose :

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{N}_{0,l} + \boldsymbol{N}_{l,\infty} \qquad \boldsymbol{N}_{0,l} = \mathrm{vp}(N\chi_l) *$$

On cherche ensuite, pour les termes courte distance, à commuter l'opérateur d'intégrale singulière et l'opération de multiplication par l'amplitude höldérienne $\dot{\varpi}$, puisque $\dot{\omega} = \langle\dot{\varpi}\rangle g$. Ceci permet d'appliquer l'opérateur d'intégrale singulière directement sur la phase g.

Après quoi il faut utiliser la structure particulière de g. Au voisinage d'un point x proche de $\partial\Omega$, on choisit un point $\tilde{x}$ qui minimise la distance à x sous la contrainte $\tilde{x} \in \partial\Omega$. Soit $L\dot{\varphi}$ l'application affine tangente à $\dot{\varphi}$ en $\tilde{x}$. On écrit $g = Lg + (Lg - g)$ où $Lg = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+} \circ L\dot{\varphi}$. Autrement dit, on approche Ω par le demi-espace $L\Omega$ qui lui est tangent en $\tilde{x}$, puisque $Lg = \mathbf{1}_{L\Omega}$. C'est une linéarisation géométrique.

$$\begin{gathered}\boldsymbol{N}_{0,l}\dot{\omega} = [\boldsymbol{N}_{0,l}, \langle\dot{\varpi}\rangle]g + \langle\dot{\varpi}\rangle\boldsymbol{N}_{0,l}(g - Lg) + \langle\dot{\varpi}\rangle\boldsymbol{N}_{0,l}Lg \\ \triangle_h\boldsymbol{N}_{0,l}\dot{\omega} = [\triangle_h\boldsymbol{N}_{0,l}, \langle\dot{\varpi}\rangle]g + \langle\dot{\varpi}\rangle\triangle_h\boldsymbol{N}_{0,l}(g - Lg) + \langle\dot{\varpi}\rangle\triangle_h\boldsymbol{N}_{0,l}Lg\end{gathered}$$

Or $\triangle_h$ commute avec n'importe quel opérateur de convolution, donc

$$\langle\dot{\varpi}\rangle\triangle_h \boldsymbol{N}_{0,l}Lg = \langle\dot{\varpi}\rangle\boldsymbol{N}_{0,l}\triangle_h Lg$$

Pour étudier le commutateur $[\triangle_h\boldsymbol{N}_{0,l},\langle\dot{\varpi}\rangle]$, il convient de séparer encore plus finement l'action de l'opérateur, à distance plus courte ou plus longue que $|h|$. On définit donc, en imposant la condition $2|h| < l$ pour simplifier l'écriture de la décomposition :

$$\boldsymbol{N}_{0,l} = \boldsymbol{N}_{0,h} + \boldsymbol{N}_{h,l} \qquad \boldsymbol{N}_{0,h} = \mathrm{vp}(N\chi_h)*$$
$$[\triangle_h\boldsymbol{N}_{0,l},\langle\dot{\varpi}\rangle] = \triangle_h[\boldsymbol{N}_{0,h},\langle\dot{\varpi}\rangle] + [\triangle_h,\langle\dot{\varpi}\rangle]\boldsymbol{N}_{0,h} + [\triangle_h\boldsymbol{N}_{h,l},\langle\dot{\varpi}\rangle]$$

Or $[\triangle_h,\langle\dot{\varpi}\rangle] = \langle\triangle_h\dot{\varpi}\rangle\tau_h$. Finalement,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{N}\dot{\omega} &= \boldsymbol{N}_{l,\infty}\dot{\omega} + [\boldsymbol{N}_{0,l},\langle\dot{\varpi}\rangle]g + \langle\dot{\varpi}\rangle\big(\boldsymbol{N}_{0,l}(g-Lg) + \boldsymbol{N}_{0,l}Lg\big)\\
\triangle_h\boldsymbol{N}\dot{\omega} &= \triangle_h\boldsymbol{N}_{l,\infty}\dot{\omega} + \triangle_h[\boldsymbol{N}_{0,h},\langle\dot{\varpi}\rangle]g + [\triangle_h\boldsymbol{N}_{h,l},\langle\dot{\varpi}\rangle]g\\
&\quad + \langle\triangle_h\dot{\varpi}\rangle\tau_h\big(\boldsymbol{N}_{0,h}(g-Lg) + \boldsymbol{N}_{0,h}Lg\big)\\
&\quad + \langle\dot{\varpi}\rangle\big(\triangle_h\boldsymbol{N}_{0,l}(g-Lg) + \boldsymbol{N}_{0,l}\triangle_h Lg\big)
\end{aligned}$$

Les termes à longue distance, relatifs à $\boldsymbol{N}_{l,\infty}$, ne posent aucun problème du moment que $\dot{\omega}$ est dans $L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Les termes de commutateurs : $[\boldsymbol{N}_*,\langle\dot{\varpi}\rangle]g$. Comme d'habitude, ce sont eux qui font intervenir la régularité de $\dot{\varpi}$, tandis que g est seulement supposée dans L^∞. Le point est que sous l'intégrale de convolution, le noyau $N_*(x-y)$ se trouve multiplié par $\varpi(y) - \varpi(x)$. La régularité höldérienne de ϖ permet donc de gagner un facteur $|x-y|^s$, qui suffit à estimer l'intégrale. L'échelle naturelle de longueur pour ces termes est l_ϖ donnée par $l_\varpi{}^{-s} = \|\varpi\|_s/\|\varpi\|_{L^\infty}$.

Les termes à géométrie rectifiée, $\boldsymbol{N}_*Lg$, où l'on a remplacé g par Lg. Ici intervient la propriété du noyau d'intégrale nulle sur la sphère (voir déf. 3.1) et les hémisphères (compensation (1)). Pour l'appliquer au dernier terme, $\boldsymbol{N}_{0,l}\triangle_h Lg$, qui dépend de h, nous avons besoin que x et $x+h$ soient du même côté de l'hyperplan $L\partial\Omega$ tangent à $\partial\Omega$ en $\tilde{x}$. Cette condition est garantie par l'hypothèse $2|h| < \mathsf{d}(x,\partial\Omega)$. Ici, puisqu'on s'est ramené à un demi-espace, invariant par dilatation, il n'y a pas de longueur naturelle. Mais pour le dernier terme il apparaît le rapport $|h|/l$.

Les termes complémentaires : $\boldsymbol{N}_{0,l}(g-Lg)$. Or $|g - Lg| = |\mathbf{1}_\Omega - \mathbf{1}_{L\Omega}| = \mathbf{1}_E$, où E est la différence symétrique $(\Omega\setminus L\Omega)\cup(L\Omega\setminus\Omega)$. Comme [BC93], on exploite la régularité de $\partial\Omega$, mesurée par l'échelle $l_{\dot{\varphi}}$ définie par $l_{\dot{\varphi}}{}^{-s} = \|\nabla\dot{\varphi}\|_s/\mathcal{I}$ sous la forme suivante (où $\mu_{S^{n-1}}$ est la mesure usuelle sur S^{n-1}) :

$$\mu_{S^{n-1}}\big(\{u\in S^{n-1} \mid \tilde{x} + ru \in E\}\big) \leqslant C\Big(\frac{r}{l_{\dot{\varphi}}}\Big)^s$$

Pour le dernier terme, $\triangle_h\boldsymbol{N}_{0,l}(g-Lg)$, qui dépend de h, on doit supposer que $2|h| \leqslant \mathsf{d}(x,\partial\Omega)$.

Rassemblant tous ces arguments, on obtient le résultat annoncé pour le premier temps de la démonstration.

Pour l'intégralité des démonstrations nous renvoyons à [Dep98b] et [Dep98a].

Références

[BC93] A. Bertozzi et P. Constantin. *Global regularity for vortex patches. Communication in Mathematical Physics*, vol. 152 pp. 19–28, 1993.

[BC94] H. Bahouri et J.-Y. Chemin. *Équations de transport relatives à des champs de vecteurs non-lipschitziens et mécanique des fluides. Arch. Rational Mech. Anal.*, vol. 127 pp. 159–181, 1994.

[BdM71] L. Boutet de Monvel. *Boundary problems for pseudo-differential operators. Acta mathematica*, vol. 126 pp. 11–51, 1971.

[Che91] J.-Y. Chemin. *Sur le mouvement des particules d'un fluide parfait, incompressible, bidimensionnel. Inventiones Mathematicae*, vol. 103 pp. 599–629, 1991.

[Che93] J.-Y. Chemin. *Persistance de structures géométriques dans les fluides incompressibles bidimensionels. Annales de l'École Normale Supérieure*, vol. 26(4) pp. 1–26, 1993.

[Che95] J.-Y. Chemin. *Fluides parfaits incompressibles. Astérisque*, vol. 230, 1995.

[CL95] J.-Y. Chemin et N. Lerner. *Flot de champs de vecteurs non-lipschitziens et équations de Navier-Stokes. J. Differential Equations*, vol. 121 pp. 314–328, 1995.

[Dan97] R. Danchin. *Évolution d'une singularité de type cusp dans une poche de tourbillon.* Preprint 97-10, Centre de Mathématiques, École Polytechnique, mai 1997.

[Dep98a] N. Depauw. *Poche de tourbillon pour Euler 2D dans un ouvert à bord.* Preprint 98-17, Université Paris-Nord, Institut Galilée, LAGA, mai 1998.

[Dep98b] N. Depauw. *Solutions peu régulières des équations d'Euler et Navier-Stokes sur un domaine à bord.* Thèse de doctorat, Université Paris Nord, Villetaneuse, France, février 1998.

[Joh96] J. Johnsen. *Elliptic Boundary Problems and the Boutet de Monvel calculus in Besov and Triebel-Lizorkin spaces. Math. Scand.*, vol. 79 pp. 25–85, 1996.

[Maj86] A. Majda. *Vorticity and the mathematical theory of an incompressible fluid flow. Communications in Pure and Applied Mathematics*, vol. 39 pp. 5187–5220, 1986.

[Ser93] P. Serfati. *Une preuve directe d'existence globale des vortex patches 2D. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Série I*, vol. 318 pp. 515–518, 1993.

[Yud63] V. Yudovich. *Écoulement non-stationnaire d'un liquide parfait incompressible. Zhurn. Vych. Mat*, vol. 3 pp. 1032–1066, 1963. (en Russe).

Institut Galilée, Université de Paris Nord, Avenue J. B. Clément,
93430 Villetaneuse, France
depauw@math.univ-paris13.fr