JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Note sur une manière de généraliser la formule de Fourier

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 1 (1836), p. 102-105.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1836_1_1__102_0>

NOTE

Sur une manière de généraliser la formule de Fourier;

PAR J. LIOUVILLE.

En désignant par $f(x)$ une fonction de x assujettie à la condition de ne jamais devenir infinie lorsque la variable x prend successivement toutes les valeurs comprises entre les limites $-\infty$ et $+\infty$, on a, comme on sait, entre ces deux limites

$$(1) \qquad f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dz \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(zy - zx) f(y) dy.$$

La formule (1) a été donnée pour la première fois par l'illustre Fourier, dont elle a conservé le nom. On peut la généraliser de la manière suivante.

Soit $\varphi(x)$ une fonction de x et $\varphi_1(x)$ son intégrale indéfinie prise depuis $x=0$, en sorte que l'on ait $\varphi_1(x) = \int_0^x \varphi(x)dx$; nous supposerons la fonction $\varphi_1(x)$ telle qu'elle ne surpasse jamais un certain maximum; soit de plus A la valeur de l'intégrale définie $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi_1(\theta)d\theta}{\theta}$; si la quantité représentée par A n'est ni nulle ni infinie, je dis que, pour toutes les valeurs réelles de x, on aura

$$(2) \qquad f(x) = \frac{1}{A} \int_0^{\infty} dz \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(zy - zx) f(y) dy.$$

Pour démontrer ce théorème, faisons

$$\frac{1}{A} \int_0^{\infty} dz \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(zy - zx) f(y) dy = u,$$

et il s'agira de prouver que l'on a $u = f(x)$. J'effectue d'abord l'intégration par rapport à z, non pas depuis $z=0$ jusqu'à $z=\infty$, mais depuis $z=0$ jusqu'à une valeur indéterminée de z que je traiterai comme infinie dans l'intégration relative à y. En observant que l'équation

$$\int_0^x \varphi(x)dx = \varphi_1(x)$$

donne

$$\int_0^z \varphi(zy - zx)\, dz = \frac{\varphi_1(zy-zx)}{y-x},$$

je trouve ainsi

$$u = \frac{1}{A}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi_1(zy-zx)}{y-x} f(y)dy.$$

Si l'on fait $y = x + \frac{\theta}{z}$, la valeur de u deviendra

$$u = \frac{1}{A}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi_1(\theta)}{\theta} f\left(x + \frac{\theta}{z}\right)d\theta.$$

Or la quantité z étant infinie, on a $f\left(x+\frac{\theta}{z}\right)=f(x)$, excepte pour les valeurs de θ qui sont elles-mêmes infinies, valeurs auxquelles on peut n'avoir aucun égard, parce que le facteur $\frac{\varphi_1(\theta)}{\theta}$, qui devient nul alors, rend insensible la partie de l'intégrale qui leur correspond. On aura donc simplement

$$u = \frac{f(x)}{A}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi_1(\theta)d\theta}{\theta} = f(x),$$

ce qu'il fallait démontrer. Si l'on pose $\varphi(x)=\cos x$, l'équation (2) se change dans l'équation (1), et notre démonstration coïncide avec celle que Deflers a donnée de la formule de Fourier.

On peut établir une autre formule plus générale que la formule (2). Désignons par $F(z, \theta)$ une fonction de z et de θ qui devienne nulle quand on a à la fois $z=0$, $\theta=0$; supposons en outre cette fonction telle que si, après y avoir posé $z=+\infty$, on forme l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(\infty, \theta)d\theta}{\theta},$$

cette intégrale ne soit ni nulle ni infinie, mais possède au contraire une valeur finie et déterminée A; faisons enfin

$$\frac{z}{\theta}\cdot\frac{dF(z,\theta)}{dz}+\frac{dF(z,\theta)}{d\theta}=\varphi(z,\theta),$$

et admettons que la quantité $\varphi(z,\theta)$ ne devienne jamais infinie. Cela posé, je dis que l'on aura

$$(3)\qquad f(x)=\frac{1}{A}\int_0^\infty dz\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(z,zy-zx)f(y)dy.$$

Représentons en effet par u la valeur du second membre de l'équation (3). D'après la composition de la fonction φ, on trouve immédiatement

$$\int_0^z\varphi(z,zy-zx)dz=\frac{F(z,zy-zx)}{y-x}.$$

Si donc on effectue d'abord, dans l'expression de u, l'intégrale relative à z depuis $z=0$ jusqu'à une valeur indéterminée z, que l'on traitera ensuite comme infinie, on obtient

$$u=\frac{1}{A}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{F(z,zy-zx)}{y-x}f(y)dy.$$

En désignant par θ une nouvelle variable, je fais $y=x+\frac{\theta}{z}$, $dy=\frac{d\theta}{z}$, ce qui me donne

$$u=\frac{1}{A}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{F(z,\theta)}{\theta}f\left(x+\frac{\theta}{z}\right)d\theta.$$

La valeur de z étant infinie, on peut remplacer $f\left(x+\frac{\theta}{z}\right)$ par $f(x)$, $F(z,\theta)$ par $F(\infty,\theta)$; de là résulte finalement

$$u=\frac{1}{A}f(x)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{F(\infty,\theta)d\theta}{\theta}=f(x),$$

ce qu'il fallait démontrer.

La formule (3) se déduit à son tour d'une autre formule dans laquelle la constante A est remplacée par une fonction de x. Représentons en effet par $F(x,z,\theta)$ une fonction de x, z, θ, qui devienne identiquement nulle lorsqu'on a en même temps $z=0$, $\theta=0$. Supposons en outre cette fonction telle que l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(x, \infty, \theta) d\theta}{\theta}$$

ne se réduise ni à zéro ni à l'infini, mais possède au contraire quel que soit x une valeur finie $\varpi(x)$. Cela posé, si l'on fait

$$\frac{z}{\theta} \cdot \frac{dF(x, z, \theta)}{dz} + \frac{dF(x, z, \theta)}{d\theta} = \varphi(x, z, \theta),$$

et si l'on regarde la quantité $\varphi(x, z, \theta)$ comme ne devenant jamais infinie, on aura

$$(4) \qquad f(x) = \frac{1}{\varpi(x)} \int_0^\infty dz \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, z, zy - zx) f(y) dy.$$

Nous nous dispenserons de transcrire ici la démonstration de la formule (4), parce que cette démonstration est entièrement semblable à celle que nous avons donnée ci-dessus de la formule (3).