JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

C. STURM

Mémoire sur une classe d'Équations à différences partielles

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 1 (1836), p. 373-444.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1836_1_1__373_0>

MÉMOIRE

Sur une classe d'Équations à différences partielles ;

PAR C. STURM.

Les géomètres ont résolu un grand nombre de problèmes relatifs à la distribution de la chaleur dans des corps de différentes formes et aux petits mouvements vibratoires des corps solides élastiques, des corps flexibles et des fluides, en supposant ces corps homogènes et identiques dans toutes leurs parties. Dans la théorie de la chaleur la fonction inconnue qui représente la température variable d'un point quelconque du corps dépend de l'intégration d'une équation à différences partielles contenant sous forme linéaire cette fonction, sa différentielle ou dérivée première par rapport au temps et ses différentielles partielles du premier et du second ordre, quelquefois même d'un ordre supérieur au second par rapport aux coordonnées d'un point quelconque, toutes ces différentielles étant multipliées par des fonctions connues de ces coordonnées. Dans les questions dynamiques, les fonctions inconnues qui représentent les déplacements d'un point quelconque suivant certaines directions dépendent aussi d'équations à différences partielles linéaires qui renferment les différentielles secondes de ces fonctions par rapport au temps et leurs différentielles partielles de différents ordres par rapport aux coordonnées, multipliées par des fonctions connues de ces coordonnées.

Les solutions qu'on a données de ces diverses questions sont analogues à celle du problème de la corde vibrante qu'on doit à D. Bernouilli et à Lagrange. Elles se composent de la somme d'une infinité de solutions particulières d'une même forme déterminée. Les cas les plus simples qu'il faut d'abord considérer, sont ceux où la fonction inconnue ne dépend que du temps et d'une autre variable indépendante qui fixe la position d'un point quelconque du corps; alors chaque terme de la série qui représente cette fonction satisfait séparément à l'équation à différences partielles qui a lieu pour tous les points du corps et à des équations particulières qui ont lieu à ses limites. Le terme général de la série est le produit de deux quantités distinctes; la première est une exponentielle dont l'exposant est égal au temps multiplié par un certain paramètre ou bien c'est le sinus ou le cosinus du temps multiplié encore par un paramètre; la seconde quantité est une fonction de la variable indépendante autre que le temps, et du même paramètre, laquelle dépend d'une équation différentielle ordinaire de forme linéaire; on obtient cette équation en substituant dans l'équation à différences partielles, à la place de la fonction inconnue le produit des deux facteurs dont il s'agit, et supprimant le premier qui se trouve commun à tous les termes de l'équation. Cette seconde fonction qui ne renferme pas le temps et qu'on peut multiplier par un coefficient constant arbitraire, doit aussi satisfaire aux équations aux limites; et de là résulte une équation transcendante déterminée dont l'inconnue est le paramètre qui multiplie le temps dans l'exponentielle, ou sous le sinus ou le cosinus, et dont les racines en nombre infini sont toutes les valeurs de ce paramètre, valeurs qu'il faut substituer successivement dans le terme général de la série. On achève ensuite la solution en déterminant par des méthodes connues les coefficients arbitraires de cette série, de telle sorte qu'à l'origine du temps elle représente l'état initial de la fonction dont on cherche l'état variable.

Ces problèmes, même restreints, comme nous venons de le dire au cas d'une seule dimension deviennent beaucoup plus difficiles, quand le corps dont on s'occupe n'est pas homogène dans toutes ses parties, c'est-à-dire quand les qualités spécifiques, telles que la densité ou l'épaisseur, la capacité de chaleur, la conductibilité, l'élasticité, sont variables d'un point à un autre suivant des lois quelconques. Les équations du problème étant posées, il faut toujours commencer, comme précédemment, par chercher des valeurs particulières de la fonction inconnue qui satisfassent à toutes ces équations, à l'exception de celle qui exprime l'état initial qu'on suppose arbitraire. Une quelconque de ces valeurs particulières est encore le produit de deux quantités de même nature que dans le cas de l'homogénéité. Mais ici l'on est arrêté d'abord par la difficulté d'intégrer l'équation différentielle linéaire à laquelle doit satisfaire la fonction de la variable indépendante autre que le temps et du paramètre indéterminé, et ensuite par celle de former et de résoudre l'équation transcendante qui doit donner les valeurs de ce paramètre. Dans les questions même les plus simples et les plus connues relatives à des corps homogènes, où l'on est parvenu à intégrer l'équation différentielle dont il s'agit et à écrire l'équation transcendante, sous forme finie ou en série, on a quelque peine à démontrer que cette équation doit avoir des racines réelles en nombre infini, et à reconnaître la marche et les propriétés distinctives des fonctions qu'on obtient en substituant ces différentes racines à la place du paramètre indéterminé dans l'expression analytique de la fonction satisfaisant à l'équation différentielle qu'on a intégrée. On ne voit pas non plus comment les altérations qu'on peut faire éprouver aux qualités spécifiques du corps influent sur la grandeur des racines et sur les propriétés des fonctions qui en dépendent. Ces discussions me semblent indispensables, si l'on veut bien connaître les circonstances les plus intéressantes de ces phénomènes; elles doivent même nécessairement précéder la recherche de l'intégrale générale.

Le présent mémoire a pour objet les questions nouvelles que je viens d'indiquer rapidement. Je crois les avoir résolues pour les cas assez nombreux où la fonction inconnue dépend d'une équation linéaire à différences partielles contenant cette fonction, sa différentielle première ou seconde par rapport au temps et ses deux différentielles première et seconde par rapport à une autre variable qui fixe la position d'un point quelconque du corps, la fonction et ses différentielles étant multipliées par des fonctions connues de la dernière variable.

Pour plus de précision et de clarté, j'ai choisi comme exemple un problème qui a toute la généralité qu'on peut désirer dans le cercle que je me suis tracé. Je considère la distribution de la chaleur dans une barre droite ou courbe d'une matière homogène ou non homogène et d'un épaisseur constante ou variable, mais assez petite pour que tous les points d'une section plane perpendiculaire à l'axe aient sensiblement la même température au même instant; cette barre est placée dans un milieu d'une température constante qu'on peut supposer égale à zéro M. Poisson a donné dans son grand ouvrage sur la chaleur les équations de ce problème et leur a appliqué ses méthodes générales d'intégration; mais il ne s'est pas occupé des propriétés de l'équation transcendante et des intégrales particulières que j'ai cru devoir étudier. J'ai fait usage dans mes recherches de la théorie sur les équations différentielles linéaires du second ordre que j'ai exposée dans un précédent mémoire publié dans le Journal de M. Liouville. Je vais indiquer sommairement les principaux résultats auxquels je suis arrivé.

Je cherche d'abord suivant la méthode connue que j'ai rappelée plus haut, des valeurs particulières de la fonction qui désigne la température variable d'un point quelconque de la barre; je suppose donc cette fonction égale au produit de l'exponentielle e^{-rt} par une fonction V de l'abscisse x et du paramètre indéterminé r indépendante du temps t. L'équation transcendante en r à laquelle on arrive n'a pas de racines imaginaires, ainsi que M. Poisson l'a démontré pour cette équation et en général pour toutes celles qu'on rencontre dans les problèmes de physique mathématique. Je fais voir en outre que la même équation n'a pas de racines égales et qu'elle n'a pas de racines négatives. Je prouve ensuite à l'aide de ma théorie sur les équations différentielles linéaires du second ordre, qu'elle a une infinité de racines positives dont la plus petite peut être zéro dans un cas particulier. En substituant chacune de ces racines à la place du paramètre indéterminé dans la formule Ve^{-rt}, on a donc une infinité de solutions particulières, satisfaisant à l'équation à différences partielles et aux deux équations qui ont lieu aux extrémités de la barre. Si les températures initiales sont exprimées par la fonction V qui correspond à l'une des racines de l'équation en r, les températures variables de tous les points seront exprimées par le seul terme Ve^{-rt}; elles seront donc à chaque instant proportionnelles à leurs valeurs initiales, et pour des temps croissants en progression arithmétique, ces températures, abstraction faite de leur signe lorsqu'elles seront négatives, décroîtront en progression géométrique d'autant plus rapidement que la racine r sera plus grande. Les propriétés qui distinguent ces états *simples* en nombre infini où les températures variables sont exprimées par un seul terme ne sont autres que celles des fonctions V correspondantes aux différentes racines de l'équation transcendante. Voici les plus remarquables.

Aucune de ces fonctions ne peut s'évanouir sans changer de signe.

La première de ces fonctions, celle qui répond à la plus petite racine conserve constamment le même signe dans toute l'étendue de la barre.

La seconde, qui répond à la deuxième racine, change de signe une fois pour un point situé entre les deux extrémités de la barre.

La troisième fonction change de signe deux fois entre les mêmes extrémités.

La quatrième change de signe trois fois, et ainsi de suite, jusqu'à l'infini.

Deux de ces fonctions correspondantes à deux racines consécutives changent toujours de signe l'une après l'autre alternativement; celle qui répond à la plus grande de ces deux racines s'évanouit la première, en partant de l'une des extrémités de la barre. Entre deux points consécutifs de la barre pour lesquels une de ces fonctions est nulle, il y a toujours au moins un point pour lequel l'une quelconque des fonctions correspondantes à des racines plus grandes change de signe, et il y a au plus autant de points pour lesquels cette dernière fonction change de signe qu'il y a d'unités de différence entre les indices de ces deux fonctions.

Ainsi ces fonctions données par une même équation différentielle linéaire du deuxième ordre contenant un paramètre variable, jouissent de propriétés analogues à celles des sinus des multiples d'une variable qui sont les fonctions les plus simples de cette espèce; mais les intervalles compris entre les points consécutifs pour lesquels chaque fonction change de signe ne sont pas égaux; ils ont des relations déterminées avec les qualités spécifiques de la substance, et varient en même temps que celles-ci suivant certaines lois, ainsi que les racines r de l'équation transcendante. Par exemple si le pouvoir émissif augmente à l'une des extrémités de la barre, les points pour lesquels chaque fonction s'annullera s'éloigneront de cette extrémité, et toutes les racines r de l'équation transcendante deviendront à la fois plus grandes.

J'établis des propositions analogues relativement aux valeurs maxima de ces fonctions et à d'autres valeurs plus ou moins remarquables.

Après avoir ainsi discuté les solutions particulières, je donne d'après les méthodes connues l'intégrale générale pour un état initial arbitraire.

Avant que les températures de la barre soient réduites à zéro, il y aura une époque où elles seront exprimées sensiblement par le premier terme de la série qui représente l'intégrale générale; cet état final des températures se confondra donc avec le premier des états simples que nous avons considérés précédemment; par conséquent après un temps plus ou moins long les températures de tous les points de la barre seront supérieures ou inférieures à la température fixe du milieu, ce qui peut n'avoir pas lieu pour les températures initiales.

Cette propriété exige cependant que le coefficient du premier terme de la série qu'on obtient par une intégrale définie, ne soit pas nul. S'il est nul, et si celui du second terme ne l'est pas, l'état final des températures sera le second de nos états simples, de sorte que les températures finales seront supérieures à celle du milieu dans une portion de la barre et inférieures dans la portion restante.

En assujettissant à de nouvelles conditions la fonction qui représente les températures initiales, l'état final pourra se réduire à tel état simple qu'on voudra. Toutefois je pense que ce résultat mathématique ne pourrait guère être vérifié par l'expérience, parce que les équations de la chaleur ne sont pas d'une exactitude absolue.

En général, les variations de signe qui peuvent exister dans les températures initiales doivent, le temps croissant, disparaître les unes après les autres.

J'ai examiné de quelle manière cette disparition s'opère et je suis arrivé à un théorème très complet qui comprend le cas ou ces variations de signe ne disparaîtraient pas toutes. J'en ai déduit comme corollaire ces propriétés nouvelles et curieuses de la fonction qu'on forme en ajoutant ou superposant un nombre quelconque de solutions particulières, le temps ayant une valeur déterminée quelconque.

En premier lieu, cette fonction qui ne renferme que la seule variable x, s'évanouit en changeant de signe entre les deux extrémités de la barre au moins autant de fois que celui de ses termes dont l'indice est le moindre. Elle peut en outre être nulle à l'une des extrémités ou à deux extrémités de la barre. En second lieu, cette fonction s'annulle au plus autant de fois que celui de ses termes dont l'indice est le plus grand. Dans cette seconde partie du théorème, une valeur de x qui annulle la fonction dont il s'agit et quelques-unes de ses différentielles successives par rapport à x doit être considérée comme une racine multiple et comptée pour autant de racines qu'il y a d'unités dans l'ordre de la première des différentielles qu'elle n'annulle pas, si cette valeur de x est comprise entre celles qui répondent aux deux extrémités de la barre. Mais si la fonction et quelques-unes de ses différentielles successives se trouvent nulles pour la valeur de x qui répond à l'une des extrémités de la barre, le degré de multiplicité de cette valeur de x est seulement la moitié de l'ordre de la première différentielle qui ne s'annulle pas, cet ordre ne pouvant être alors qu'un nombre pair.

M. Liouville a démontré directement ce théorème, qui n'était pour moi qu'un corollaire du précédent, sans s'occuper du cas particulier où la fonction serait nulle à l'une des extrémités de la barre. J'en ai aussi trouvé après lui une autre démonstration directe que je donne dans ce mémoire. M. Liouville a fait usage du même théorème dans un très beau Mémoire qu'il a publié dans le numéro de juillet de son journal et qui a pour objet le développement d'une fonction arbitraire en une série composée des fonctions V que nous avons considérées.

Ces résultats s'étendent avec quelques légères modifications au mouvement linéaire de la chaleur dans un globe ou dans un cylindre composé de couches concentriques infiniment minces, telles que la densité, la capacité de chaleur et la conductibilité, sont les mêmes pour tous les points d'une même couche, mais variables d'une couche à une autre; ce corps est placé dans un milieu d'une température constante, ou bien sa surface est entretenue à une température fixe. Les propriétés relatives aux *maxima* sont plus simples que dans la barre. Après un temps plus ou moins long, les températures de toutes les couches qui composent le corps deviennent supérieures à la température fixe du milieu et croissantes depuis la surface extérieure jusqu'au centre, ou bien au contraire ces températures deviennent inférieures à celle du milieu et décroissantes depuis la surface jusqu'au centre. J'ai énoncé cette proposition dans le *Bulletin des Sciences* de 1829. Comme pour la démontrer on n'a besoin de considérer que le premier terme de la série qui exprime l'intégrale générale, j'en avais une démonstration indépendante de ma théorie sur les équations différentielles linéaires du 2e ordre: je la donne dans le présent Mémoire. On peut d'ailleurs déterminer avec une approximation suffisante la fonction à laquelle les températures finales deviennent proportionnelles dans la barre, la sphère et le cylindre.

La même analyse, convenablement modifiée, donne les lois du mouvement linéaire de la chaleur dans une barre composée d'un nombre quelconque de parties hétérogènes, comme aussi dans un globe et dans un cylindre plein ou creux, composé de couches hétérogènes d'épaisseurs quelconques, telles que les qualités spécifiques varient brusquement dans le passage d'une substance à une autre.

Toute cette théorie s'applique sans aucune difficulté à plusieurs problèmes dynamiques, parmi lesquels je citerai ceux qui ont pour objet les vibrations d'une corde homogène ou non homogène d'une épaisseur et d'une élasticité variables, les oscillations d'une chaîne pesante de densité variable suspendue par l'un de ses bouts ou par les deux bouts, et le mouvement vibratoire d'une colonne d'air de densité et d'élasticité variables.

I.

Considérons la distribution de la chaleur dans une barre droite ou courbe d'une matière homogène ou non homogène et d'une épaisseur constante ou variable, mais assez petite pour que tous les points d'une section plane perpendiculaire à la ligne qu'on prend pour l'axe de la barre aient sensiblement la même température au même instant. Ce corps est placé dans un milieu dont la température est constante; nous la prendrons pour le zéro de l'échelle thermométrique. Le mouvement de la chaleur dans cette barre, n'ayant lieu que dans le sens de son axe, est représenté par l'équation suivante:

$$g\,\frac{du}{dt} = \frac{d.\left(k\frac{du}{dx}\right)}{dx} - lu \qquad (1)$$

x désigne la portion de l'axe de la barre comprise entre une section quelconque ω perpendiculaire à cet axe et un point fixe pris sur le même axe, u est la température de cette section au bout du temps t. g représente le produit de la chaleur spécifique de la barre à l'endroit où est faite la section ω par l'aire de cette section; k est le produit de la *conductibilité intérieure* en cet endroit par la même aire ω; enfin l exprime le produit du contour de la section ω par *le pouvoir émissif* au même lieu; l dépend de la matière de la barre et du degré de poli de sa surface. Nous regarderons les trois quantités g, k et l comme des fonctions de x positives données pour tous les points de la barre; chacune d'elles peut se réduire à une constante.

La fonction u doit remplir encore d'autres conditions.

On doit avoir

$$k\frac{du}{dx} - hu = 0 \text{ pour } x = \mathrm{x}, \qquad (2)$$

$$k\frac{du}{dx} + \mathrm{H}u = 0 \text{ pour } x = \mathrm{X}, \qquad (3)$$

x et **X** étant les valeurs de x qui répondent aux deux extrémités de la barre, h et H des constantes positives qui mesurent la grandeur du rayonnement à ces extrémités.

Au lieu de la condition (2) on peut se donner celle que u ou $\frac{du}{dx}$

soit nulle pour $x = \mathrm{x}$, quel que soit t; cela revient à supposer h infinie ou nulle dans l'équation (2). Si par exemple on doit avoir $u = 0$ pour $x = \mathrm{x}$, on écrira l'équation (2) ainsi :

$$\frac{k}{h}\frac{du}{dx} - u = 0 \text{ pour } x = \mathrm{x}$$

puis on y fera $\frac{1}{h} = 0$ ou h infinie. De même l'équation (3) deviendra $u = 0$ ou $\frac{du}{dx} = 0$ pour $x = \mathrm{X}$, si l'on fait H infinie ou nulle.

Enfin il faut qu'on ait encore

$$u = f(x) \text{ pour } t = 0 \qquad (4)$$

$f(x)$ étant une fonction donnée de x qui représente les températures initiales des points de la barre, et qui prise pour u doit vérifier les équations (2) et (3); elle est d'ailleurs arbitraire.

On verra facilement que les équations (1), (2), (3), (4) déterminent complétement la fonction u pour toutes les valeurs de t et pour celles de x comprises entre x et X, et qu'au contraire il y aurait indétermination, si en conservant l'équation (1), on supprimait l'une quelconque des équations (2), (3), (4).

II.

Pour arriver à l'expression de u en fonction de x et de t, on commence par chercher, suivant la méthode connue, des valeurs particulières de u qui satisfassent à l'équation (1) et aux équations (2) et (3) en faisant abstraction de la condition (4), $u = f(x)$ pour $t = 0$. On suppose

$$u = \mathrm{V}e^{-rt} \qquad (5)\ (*)$$

r étant une constante indéterminée indépendante de x et de t, et V une fonction de x indépendante de t. En substituant à la place de u cette valeur hypothétique (5) dans les trois équations (1), (2), (3), e^{-rt} disparaît comme facteur commun, et l'on trouve pour déterminer V et r les équations suivantes.

(*) On peut voir dans les ouvrages de M. Poisson et surtout dans sa *Théorie de la Chaleur*, chap. VI, les considérations qui conduisent à chercher des intégrales particulières de la forme (5) et à prendre pour l'intégrale générale la somme de toutes les intégrales de cette forme.

On a d'abord

$$\frac{d.\left(k\frac{dV}{dx}\right)}{dx} + (gr-l)V = o \qquad (6)$$

pour toutes les valeurs de x depuis x jusqu'à $\mathbf{X}$;

et en outre
$$k\frac{dV}{dx} - hV = o, \text{ pour } x = \mathrm{x} \qquad (7)$$
$$k\frac{dV}{dx} + HV = o, \text{ pour } x = \mathrm{X}. \qquad (8)$$

La valeur de l'une des quantités V, $\frac{dV}{dx}$, pour $x=$ x reste indéterminée et peut être prise à volonté; celle de l'autre est donnée par l'équation (7). Cette équation (7) se réduit à $\frac{dV}{dx} = o$ ou à $V = o$ pour $x=$x, selon qu'on y suppose h nulle ou infinie. Il faut alors donner à celle des quantités V, $\frac{dV}{dx}$, qui ne doit pas être nulle pour $x=$x, une valeur arbitraire.

Dès que les valeurs de V et de $\frac{dV}{dx}$ pour $x=$ x sont fixées, la fonction V est entièrement déterminée par l'équation différentielle (6) pour toutes les valeurs de x croissantes depuis x jusqu'à $\mathbf{X}$; quoiqu'on ne sache intégrer cette équation que dans un très petit nombre de cas particuliers, on conçoit que la fonction V existe et a pour chaque valeur de x une valeur réelle unique qui dépend de celles de x et de r; on peut toujours la développer en une série convergente, comme M. Liouville l'a fait voir dans son Mémoire inséré au nº de juillet de son journal (page 255.)

Jusqu'ici la constante r est arbitraire; mais maintenant elle doit être déterminée de telle sorte qu'on ait

$$k\frac{dV}{dx} + HV = o \text{ pour } x = \mathrm{X} \qquad (8)$$

Cette équation (8) peut se réduire soit à $V = o$, soit à $\frac{dV}{dx} = o$, pour $x = \mathbf{X}$, en faisant H infinie ou nulle.

On aura ainsi une équation en r que nous représenterons par $F(r) = o$ et qui fournira différentes valeurs de cette inconnue r.

Il est clair qu'on obtiendrait la même équation $F(r) = o$, si l'on se donnait la valeur de l'une des quantités $V, \frac{dV}{dx}$, pour $x = X$, qu'on tirât celle de l'autre de l'équation (8), et qu'on substituât les valeurs de V et de $\frac{dV}{dx}$ que fournirait l'intégration de l'équation différentielle (6) dans l'équation (7) qui doit avoir lieu pour $x = \mathrm{x}$.

Il faut maintenant examiner les propriétés des racines de cette équation $F(r) = 0$.

III.

Nous allons démontrer d'abord que *cette équation en* r, $F(r) = 0$, *ne peut point avoir de racines imaginaires*.

Supposons, s'il est possible, que l'équation $F(r) = 0$ soit vérifiée par une valeur imaginaire de r de cette forme, $\lambda + \mu\sqrt{-1}$, λ et μ étant des quantités réelles. Si l'on substitue cette racine $\lambda + \mu\sqrt{-1}$ à la place de r dans V qui est une fonction de x et de r, V deviendra de la forme $P + Q\sqrt{-1}$, P et Q étant des fonctions réelles de x, λ et μ. Les trois équations (6), (7), (8) devront donc être identiquement satisfaites, si l'on y met $P + Q\sqrt{-1}$, à la place de V et $\lambda + \mu\sqrt{-1}$ à la place de r. En faisant cette substitution, puis égalant séparément à zéro la somme des termes réels et celle des termes qui renferment $\sqrt{-1}$ comme facteur, on trouve

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\left(k\frac{dP}{dx}\right)}{dx} + (g\lambda - l)\,P - g\mu\,Q = 0 \\ &\frac{d.\left(k\frac{dQ}{dx}\right)}{dx} + (g\lambda - l)\,Q + g\mu\,P = 0 \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

et
$$k\frac{dP}{dx} - hP = 0, \quad k\frac{dQ}{dx} - hQ = 0, \text{ pour } x = \mathrm{x} \quad (10)$$
$$k\frac{dP}{dx} + HP = 0, \quad k\frac{dQ}{dx} + HQ = 0, \text{ pour } x = X. \quad (11).$$

En multipliant la première des équations (9) par Q, la seconde par P, puis retranchant, il vient

$$Q.d.\left(k\frac{dP}{dx}\right) - P.d.\left(k\frac{dQ}{dx}\right) = \mu.g\,(P^2 + Q^2)\,dx \qquad (12).$$

Intégrons les deux membres de cette équation depuis $x = \mathrm{x}$ jusqu'à

$x = \mathrm{X}$. En intégrant par parties le terme $\mathrm{Q}.d.k\left(\frac{d\mathrm{P}}{dx}\right)$ sans fixer d'abord les limites de l'intégration, on trouve

$$\int \mathrm{Q}.d.\left(k\frac{d\mathrm{P}}{dx}\right) = \mathrm{Q}.\ k\frac{d\mathrm{P}}{dx} - \int k\,\frac{d\mathrm{P}}{dx}\,\frac{d\mathrm{Q}}{dx}\,dx$$
$$= \mathrm{Q}.\ k\frac{d\mathrm{P}}{dx} - \mathrm{P}.k\frac{d\mathrm{Q}}{dx} + \int \mathrm{P}.d.\left(k\frac{d\mathrm{Q}}{dx}\right);$$

d'où $$\int \mathrm{Q}.d.\left(k\frac{d\mathrm{P}}{dx}\right) - \int \mathrm{P}.d.\left(k\frac{d\mathrm{Q}}{dx}\right) = k\left(\mathrm{Q}\frac{d\mathrm{P}}{dx} - \mathrm{P}\frac{d\mathrm{Q}}{dx}\right).$$

L'intégrale du premier membre de l'équation (12) prise entre les limites x et X est donc égale à la valeur que prend l'expression $k\left(\mathrm{Q}\frac{d\mathrm{P}}{dx} - \mathrm{P}\frac{d\mathrm{Q}}{dx}\right)$ pour $x = \mathrm{X}$, moins celle qu'elle prend pour $x = \mathrm{x}$. Or, en vertu des équations (10) et (11), $k\left(\mathrm{Q}\frac{d\mathrm{P}}{dx} - \mathrm{P}\frac{d\mathrm{Q}}{dx}\right)$ se trouve nulle, soit pour $x = \mathrm{x}$, soit pour $x = \mathrm{X}$. Ainsi l'intégrale du premier membre de l'équation (12) prise entre les limites x et X se réduit à zéro, et par conséquent celle du second membre est aussi nulle, c'est-à-dire qu'on a

$$\mu.\int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{X}} g\ (\mathrm{P}^2 + \mathrm{Q}^2)\ dx = 0. \qquad (13)$$

Mais comme la fonction g est positive pour toutes les valeurs de x comprises entre x et X, l'intégrale $\int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{X}} g\ (\mathrm{P}^2 + \mathrm{Q}^2)\ dx$ ne peut pas être nulle; car elle est la somme des valeurs de la différentielle $g\ (\mathrm{P}^2 + \mathrm{Q}^2)\,dx$ qui est positive, quand P et Q ne sont pas nulles. Or, P et Q ne peuvent pas être nulles pour toutes les valeurs de x depuis x jusqu'à X; en effet leurs valeurs pour $x = \mathrm{x}$ sont arbitraires, puisqu'on peut se donner à volonté la valeur de V pour $x = \mathrm{x}$ (si toutefois on ne doit pas avoir $\mathrm{V} = 0$ pour $x = \mathrm{x}$); et l'on voit de plus d'après la forme des équations (10) et (9) qu'elles doivent donner pour P et Q des valeurs réelles différentes de zéro, quand x croît à partir de x. Si l'on avait $\mathrm{V} = 0$ pour $x = \mathrm{x}$, on observerait que pour les valeurs de x un peu plus grandes que x on n'aurait pas $\mathrm{V} = 0$, puisque $\frac{d\mathrm{V}}{dx}$ ne doit pas être nulle en même temps que V pour $x = \mathrm{x}$. L'équation (13) à laquelle on vient d'arriver est donc absurde, à moins que μ ne soit nulle. Ainsi l'équation $\mathrm{F}(r) = 0$ ne peut point avoir de racines imaginaires de la forme $\lambda + \mu \sqrt{-1}$. On remarquera que cette proposition a lieu, lors même que la fonction l ne serait pas constamment positive entre les limites x et X, et que les constantes h et H ne seraient pas aussi toutes deux positives, comme on l'a supposé, n° 1; il faut seulement que g et k soient positives.

IV.

C'est à M. Poisson qu'est due la première démonstration générale et rigoureuse de la réalité des racines de ces équations transcendantes auxquelles on est conduit dans la résolution des problèmes de physique mathématique. Il l'a donnée d'abord dans le *Bulletin de la Société philomathique* pour l'année 1828, et l'a reproduite dans d'autres mémoires et dans sa *Théorie de la Chaleur*, page 178.

Je crois devoir appliquer cette démonstration de M. Poisson à l'équation $F(r) = 0$ dont il est ici question. On verra que celle du numéro précédent est au fond la même, et n'en diffère que par la forme. Je ferai voir en outre que la même équation $F(r) = 0$ n'a pas de racines égales. Mais auparavant il faut établir les formules qui servent de base à ces démonstrations, et qui ont d'ailleurs un autre usage.

Considérons r comme variable, en supposant que la fonction $V(x, r)$ soit assujettie à vérifier seulement les deux équations (6) et (7),

$$\frac{d\left(k\frac{dV}{dx}\right)}{dx} + (gr - l)V = 0, \tag{6}$$

et

$$k\frac{dV}{dx} - hV = 0 \text{ pour } x = \text{x}. \tag{7}$$

On n'a point égard ici à l'autre condition (8) qui doit servir à déterminer les valeurs de r. Attribuons à r une autre valeur r', et désignons par V' ce que devient la fonction V par le changement de r en r', nous aurons aussi

$$\frac{d.\left(k\frac{dV'}{dx}\right)}{dx} + (gr' - l)V' = 0, \tag{6'}$$

et

$$k\frac{dV'}{dx} - hV' = 0 \text{ pour } x = \text{x}. \tag{7'}$$

En multipliant l'équation (6) par V', l'équation (6') par V, et retranchant, on a la suivante

$$V.d\left(k\frac{dV'}{dx}\right) - V'.d.\left(k\frac{dV}{dx}\right) = (r-r')gVV'dx$$

Son premier membre est la différentielle de l'expression..... $k\left(V\frac{dV'}{dx} - V'\frac{dV}{dx}\right)$, qui est nulle pour $x = \mathrm{x}$ en vertu des équations (7) et (7'). Donc en intégrant les deux membres de cette équation depuis $x = \mathrm{x}$ jusqu'à $x = X$, on aura

$$(r-r')\int_{\mathrm{x}}^{X} gVV'dx = k\left(V\frac{dV'}{dx} - V'\frac{dV}{dx}\right) \text{ pour } x = X. \quad (14)$$

Si l'on différentie cette équation (14) par rapport à l'indéterminée r qui entre dans V et non dans V', on aura

$$\int_{\mathrm{x}}^{X} gVV'dx + (r-r')\int_{\mathrm{x}}^{X} gV'\frac{dV}{dr}dx = k\left(\frac{dV}{dr}\frac{dV'}{dx} - V'\frac{ddV}{dxdr}\right) \text{pour } x = X.$$

En faisant dans cette dernière équation $r' = r$, V' se change en V, et l'on obtient cette formule

$$\int_{\mathrm{x}}^{X} gV^2dx = k\left(\frac{dV}{dx}\frac{dV}{dr} - V\frac{ddV}{dxdr}\right) \text{ pour } x = X. \quad (15)$$

On peut encore y arriver de la manière suivante, sans faire usage des équations (6') et (7').

En différentiant l'équation (6)

$$\frac{\left(k\frac{dV}{dx}\right)}{dx} + (gr-l)V = 0, \quad (6)$$

par rapport à r, on a

$$\frac{d\left(k\frac{ddV}{dxdr}\right)}{dx} + (gr-l)\frac{dV}{dr} + gV = 0$$

En multipliant cette équation par V et l'autre (6) par $\frac{dV}{dr}$, puis retranchant, on obtient

$$gV^2dx = \frac{dV}{dr}.d.\left(k\frac{dV}{dx}\right) - V.d.\left(k\frac{ddV}{dxdr}\right).$$

Le second membre de cette équation est la différentielle de $k\left(\frac{dV}{dx}\frac{dV}{dr} - V\frac{ddV}{dxdr}\right)$, et cette expression se réduit à zéro pour $x = \mathbf{x}$; car on a

$$k\frac{dV}{dx} - hV = o \text{ pour } x = \mathbf{x},$$

d'où l'on tire en différentiant, par rapport à r,

$$k\frac{ddV}{dxdr} - h\frac{dV}{dr} = o \text{ pour } x = \mathbf{x},$$

et de là résulte

$$k\left(\frac{dV}{dx}\frac{dV}{dr} - V\frac{ddV}{dxdr}\right) = o \text{ pour } x = \mathbf{x},$$

En intégrant donc l'équation qui précède entre les limites $\mathbf{x}$ et $\mathbf{X}$, on retrouvera la formule (15).

On en déduit encore, $\mathbf{H}$ étant une constante,

$$\int_{\mathbf{x}}^{\mathbf{X}} gV^2 dx = \left(k\frac{dV}{dx} + HV\right)\frac{dV}{dr} - V.\frac{d.}{dr}\left(k\frac{dV}{dx} + HV\right) \text{pour } x = \mathbf{X}. \quad (16)$$

Au surplus, les formules (14) et (15) sont comprises dans les formules (9) et (4) de notre premier Mémoire (*), nos IV et V, dont elles se déduisent en y remplaçant l'indéterminée m par r, et prenant $\mathbf{X}$ pour la seconde limite de l'intégration.

Supposons maintenant qu'on prenne pour r et r' deux racines différentes de l'équation $F(r) = o$, c'est-à-dire deux valeurs telles qu'on ait

$$k\frac{dV}{dx} + HV = o, \text{ et } k\frac{dV'}{dx} + HV' = o \text{ pour } x = \mathbf{X}.$$

Alors le second membre de l'équation (14) sera nul, et cette équation deviendra

$$\int_{\mathbf{x}}^{\mathbf{X}} gVV'dx = o; \quad (17)$$

Mais si l'on prend pour r et r' une seule et même racine de l'équation $F(r) = o$, l'intégrale définie $\int_{\mathbf{x}}^{\mathbf{X}} gVV'dx$ n'est plus nulle, car elle devient $\int_{\mathbf{x}}^{\mathbf{X}} gV^2 dx$, quantité essentiellement positive. D'après la formule (16) on a alors

(*) *Mémoire sur les Equations différentielles linéaires du second ordre.*

$$\int_{x}^{X} gV^2 dx = - V.\frac{d.}{dr}\left(k\frac{dV}{dx} + HV\right) \text{ pour } x = X, \quad (18)$$

puisqu'on suppose que la valeur actuelle de r annulle $k\frac{dV}{dx} + HV$ pour $x = X$.

D'après M. Poisson, la réalité des racines de l'équation $F(r) = 0$ résulte très simplement de la formule (17). Supposons que cette équation $F(r) = 0$ ait une racine imaginaire $\lambda + \mu\sqrt{-1}$. Si l'on prend $r = \lambda + \mu\sqrt{-1}$, la fonction V qui vérifie les trois équations (6), (7) et (8), deviendra $P + Q\sqrt{-1}$, P et Q étant des quantités réelles dépendantes de x, λ et μ, qui ne seront pas nulles pour toutes les valeurs de x depuis x jusqu'à X. En effet, leurs valeurs pour l'une de ces limites, par exemple pour $x = x$, sont arbitraires (si toutefois on ne doit pas avoir $V = 0$ pour $x = x$); et d'ailleurs quand on fait $r = \lambda + \mu\sqrt{-1}$ et $V = P + Q\sqrt{-1}$ dans les équations (6) et (7), elles se partagent en d'autres (qui sont les équations (9) et (10) du n° III), qui doivent visiblement donner des valeurs de P et de Q différentes de zéro pour des valeurs de x croissantes à partir de x. Cela serait encore vrai, lors même qu'on supposerait $V = 0$ pour $x = x$, attendu qu'on ne peut pas avoir en même temps $\frac{dV}{dx} = 0$. Ces remarques ont déjà été faites au n° III.

L'équation $F(r) = 0$ ayant pour racine $\lambda + \mu\sqrt{-1}$, il est aisé de voir, en changeant dans les formules $\sqrt{-1}$ en $-\sqrt{-1}$, qu'elle aura aussi pour racine $\lambda - \mu\sqrt{-1}$, et en faisant $r' = \lambda - \mu\sqrt{-1}$ dans l'équation (6') du n° précédent, on aura $V' = P - Q\sqrt{-1}$.

En mettant ces expressions de V et de V' dans la formule (17), on trouvera

$$\int_{x}^{X} g(P^2 + Q^2)dx = 0,$$

ce qui est impossible, puisque g est une fonction positive de x, et que P et Q ne peuvent être nulles que pour des valeurs e dx particulières.

L'équation $F(r) = 0$ ne peut donc pas avoir des racines imaginaires de la forme $\lambda + \mu\sqrt{-1}$.

J'ajouterai qu'elle n'a pas de racines égales, c'est-à-dire qu'une même valeur de r ne peut pas réduire à zéro en même temps la fonction $k\frac{dV}{dx}+HV$ et sa dérivée $\frac{d.}{dr}\left(k\frac{dV}{dx}+HV\right)$, où l'on fait $x=X$; c'est ce qui résulte immédiatement de la formule (16). D'ailleurs cette proposition n'est qu'un cas particulier de celle qui est énoncée à la fin du n° XX du premier Mémoire.

V.

On peut encore s'assurer que l'équation $F(r)=0$ n'a point de racines imaginaires ni égales par une démonstration analogue à celle dont Laplace a fait usage dans le 6ᵉ chapitre du 2ᵉ livre de la *Mécanique céleste* pour prouver la réalité des racines d'une équation algébrique provenant de l'intégration d'un système d'équations différentielles linéaires.

Soient p et q deux variables fonctions de x et de t qui vérifient les équations suivantes:

$$\left.\begin{aligned} g\frac{dp}{dt} &= \frac{d.\left(k\frac{dq}{dx}\right)}{dx} - lq \\ g\frac{dq}{dt} &= \frac{d.\left(k\frac{dp}{dx}\right)}{dx} + lp \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

$$\left.\begin{aligned} &k\frac{dp}{dx} - hp = 0, \quad k\frac{dq}{dx} - hq = 0, \text{ pour } x = x \\ &\frac{k\,dp}{dx} + Hp = 0, \quad k\frac{dq}{dx} + Hq = 0, \text{ pour } x = X \end{aligned}\right\} \quad (20)$$

On satisfait à ces équations en supposant

$$\left.\begin{aligned} p &= V.\cos.\, rt \\ q &= V.\sin.\, rt \end{aligned}\right\} \quad (21)$$

les quantités V et r étant les mêmes que précédemment.

En effet en substituant ces valeurs de p et de q dans les équations (19) et (20) on obtient les équations (6), (7) et (8) d'où résulte l'équation en r, $F(r)=0$.

Supposons que cette équation puisse avoir une racine imaginaire $\lambda + u\sqrt{-1}$. Pour cette valeur de r, V se changera en

$P + Q\sqrt{-1}$, et pour que les valeurs de p et de q ne cessent pas d'être réelles, on les modifiera de la manière suivante.

On a d'après les formules (21):

$$p + q\sqrt{-1} = \text{V}.(\cos. rt + \sqrt{-1}\sin. rt) = \text{V}.e^{rt\sqrt{-1}}$$
$$=(P+Q\sqrt{-1})e^{(\lambda+\mu\sqrt{-1})t\sqrt{-1}} = (P+Q\sqrt{-1})(\cos.\lambda t + \sqrt{-1}\sin.\lambda t).e^{-\mu t}$$

d'où l'on tire en séparant les parties réelles d'avec les imaginaires,

$$\begin{aligned} p &= (P\cos.\lambda t - Q\sin.\lambda t).e^{-\mu t}, \\ q &= (P\sin.\lambda t + Q\cos.\lambda t).e^{-\mu t}. \end{aligned} \qquad (22)$$

Cette nouvelle expression de p est la demi-somme des deux valeurs de $\text{V}.\cos. rt$ qui répondent à $r = \lambda + \mu\sqrt{-1}$ et à $r = \lambda - \mu\sqrt{-1}$, il en est de même pour q. On peut au surplus s'assurer par une vérification directe que ces valeurs (22) satisfont aux équations (19) et (20). Car leur substitution dans ces équations reproduit les équations (9), (10) et (11) dans lesquelles se transforment les équations (6), (7) et (8) quand on fait $r = \lambda + \mu\sqrt{-1}$.

Maintenant je multiplie les équations (19), la première par $2\,pdx$ la seconde par $2\,qdx$, et je trouve en ajoutant

$$g\left(\frac{2pdp + 2qdq}{dt}\right)dx = 2p.d.\left(k\frac{dq}{dx}\right) - 2q.d.\left(k\frac{dp}{dx}\right).$$

Intégrant les deux membres de cette équation par rapport à x depuis $x = \text{x}$ jusqu'à $x = \text{X}$, j'obtiens

$$\frac{d}{dt}.\int_{\text{x}}^{\text{X}} g(p^2 + q^2)dx = 2.\int_{\text{x}}^{\text{X}}\left[p.d.\left(k\frac{dq}{dx}\right) - q.d.\left(k\frac{dp}{dx}\right)\right] \quad (23)$$

Mais l'intégrale de $p.d.\left(k\frac{dq}{dx}\right) - q.d.\left(k\frac{dp}{dx}\right)$ est $k\left(p\frac{dq}{dx} - q\frac{dp}{dx}\right)$ expression qui est nulle, soit pour $x = \text{x}$, soit pour $x = \text{X}$, à cause des équations (20). L'équation (23) se réduit donc à celle-ci

$$\frac{d}{dt}.\int_{\text{x}}^{\text{X}} g(p^2 + q^2)\,dx = 0.$$

qui donne en intégrant par rapport à t

$$\int_{\text{x}}^{\text{X}} g(p^2 + q^2)\,dx = \text{constante}.$$

Je substitue maintenant dans cette équation les valeurs (22) de p et de q, et je trouve

$$e^{-2\mu t}\int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{X}} g\,(\mathrm{P}^2+\mathrm{Q}^2)\,dx = \text{constante},$$

résultat absurde, puisque l'intégrale définie qui multiplie ici l'exponentielle $e^{-2\mu t}$ ne dépend pas de t et qu'elle ne peut pas être nulle, attendu que g est une quantité positive, et que d'ailleurs P et Q ne peuvent pas être nulles pour toutes les valeurs de x depuis x jusqu'à X. On prouverait d'une manière semblable que l'équation $\mathrm{F}(r) = 0$ ne peut pas avoir de racines multiples.

VI.

Je vais maintenant faire voir que l'équation $\mathrm{F}(r) = 0$ ne peut pas être vérifiée par une valeur de r négative ou nulle, si les fonctions k, g, l, et les constantes h, H, sont positives, comme on l'a supposé n° I.

En intégrant l'équation (6) par rapport à x depuis $x = \mathrm{x}$ jusqu'à une valeur quelconque de x, on a

$$k\frac{d\mathrm{V}}{dx} = \mathrm{C} + \int_{\mathrm{x}}^{x}(-gr + l)\mathrm{V}dx. \qquad (24)$$

La constante C est égale à la valeur de $k\frac{d\mathrm{V}}{dx}$ pour $x = \mathrm{x}$. Si V ne doit pas être nulle pour $x = \mathrm{x}$, on peut lui attribuer une valeur arbitraire, et supposer cette valeur positive; d'après l'équation (7) celle de $\frac{d\mathrm{V}}{dx}$ pour $x = \mathrm{x}$ sera aussi positive ou nulle; et si V était nulle pour $x = \mathrm{x}$, on prendrait toujours la valeur de $\frac{d\mathrm{V}}{dx}$ pour $x = \mathrm{x}$ positive. Ainsi C est positive ou nulle dans l'équation (24). Il résulte de cette équation que si l'on donne à r une valeur négative ou nulle $\frac{d\mathrm{V}}{dx}$ doit être positive pour toutes les valeurs de x croissantes depuis x jusqu'à X. En effet, supposons, s'il est possible, qu'en faisant croître x à partir de x, $\frac{d\mathrm{V}}{dx}$ vienne à changer de signe en s'évanouissant une première fois pour $x = \xi$. L'équation (24) donnera

$$\mathrm{o} = \mathrm{C} + \int_{\mathrm{x}}^{\xi} (-gr + l)\mathrm{V}dx. \qquad (25)$$

Or ici C est positive ou nulle, et comme $\frac{d\mathrm{V}}{dx}$ est positive pour toutes les valeurs de x moindres que ξ, V qui est positive ou nulle pour $x = \mathrm{x}$, prendra des valeurs croissantes et par conséquent positives, tandis que x croîtra depuis x jusqu'à ξ. Donc, si l'on suppose r négative ou nulle, les fonctions g et l étant positives, l'intégrale $\int_{\mathrm{x}}^{\xi} (-gr + l)\mathrm{V}dx$ sera une quantité positive, et l'équation (25) sera impossible.

Ainsi, quand on attribue à r une valeur négative ou nulle, $\frac{d\mathrm{V}}{dx}$ doit demeurer positive dans tout l'intervalle compris entre x et X. Conséquemment V est positive et croissante dans cet intervalle, et il s'ensuit, d'après l'équation (24), que la fonction positive $k\frac{d\mathrm{V}}{dx}$ est aussi croissante. La fonction $k\frac{d\mathrm{V}}{dx} + \mathrm{HV}$ est donc encore positive et croissante, et ne peut pas être nulle, lorsque x atteint la limite X, c'est-à-dire que l'équation $\mathrm{F}(r) = \mathrm{o}$ ne peut pas être vérifiée par une valeur de r négative, ni par $r = \mathrm{o}$.

On peut encore le démontrer de la manière suivante.

On a, en multipliant l'équation (16) par $\mathrm{V}dx$, puis intégrant depuis $x = \mathrm{x}$,

$$\int_{\mathrm{x}}^{x} \mathrm{V}.d.\left(k\,\frac{d\mathrm{V}}{dx}\right) + \int_{\mathrm{x}}^{x} (gr - l)\mathrm{V}^2 dx = \mathrm{o}.$$

L'intégration par parties donne

$$\int \mathrm{V}.d.\left(k\,\frac{d\mathrm{V}}{dx}\right) = \mathrm{V}.k\,\frac{d\mathrm{V}}{dx} - \int k\left(\frac{d\mathrm{V}}{dx}\right)^2 dx\,;$$

de sorte que l'équation précédente devient

$$k\mathrm{V}\frac{d\mathrm{V}}{dx} = \mathrm{C} + \int_{\mathrm{x}}^{x} k\left(\frac{d\mathrm{V}}{dx}\right) dx + \int_{\mathrm{x}}^{x} (-gr + l)\mathrm{V}^2 dx. \qquad (26)$$

La constante C étant égale à la valeur de $k\mathrm{V}\frac{d\mathrm{V}}{dx}$ pour $x = \mathrm{x}$, est positive ou nulle, d'après l'équation (7).

Si l'on fait r négative ou nulle, on voit que le second membre de cette équation aura une valeur positive et croissante avec x, de sorte qu'il ne pourra pas devenir nul; donc $k\mathrm{V}\frac{d\mathrm{V}}{dx}$, et conséquemment ni V, ni $\frac{d\mathrm{V}}{dx}$ ne peut s'évanouir quand on attribue à r une valeur négative ou nulle; V et $\frac{d\mathrm{V}}{dx}$ restent donc positives, et l'on ne peut pas avoir $k\frac{d\mathrm{V}}{dx}+\mathrm{HV}=0$ pour $x=\mathrm{X}$, H étant positive.

Si la fonction l n'était pas constamment positive entre les limites x et X, mais que les fonctions k, g et les constantes h, H fussent toujours positives, il serait possible que l'équation $\mathrm{F}(r)=0$ fût satisfaite par des valeurs de r négatives ou par $r=0$. Mais alors les racines négatives de cette équation seraient en nombre limité, et toutes comprises entre o et la plus grande valeur négative de $\frac{l}{g}$ (c'est-à-dire la plus éloignée de zéro). En effet, si l'on attribue à r une valeur négative qui surpasse numériquement $\frac{l}{g}$, la quantité $-gr+l$ sera constamment positive, et l'on reconnaîtra, en reprenant les démonstrations précédentes, que les fonctions $\frac{d\mathrm{V}}{dx}$ et V ne pourront point passer du positif au négatif pour aucune valeur de x.

La plus petite racine de l'équation $\mathrm{F}(r)=0$ serait $r=0$, si l était nulle, et si l'on supposait $k\frac{d\mathrm{V}}{dx}=0$ pour $x=\mathrm{x}$ et pour $x=\mathrm{X}$; alors V serait égale à une constante.

On peut encore démontrer les propositions de ce numéro à l'aide de la théorie exposée dans notre premier Mémoire.

VII.

L'équation $\mathrm{F}(r)=0$ *a une infinité de racines positives.*

Cette proposition peut se déduire du n° XL du premier Mémoire. Mais nous préférons la démontrer directement de la manière suivante.

Soient k' et n des constantes positives telles qu'on ait pour chaque valeur de x comprise entre x et X

$$k < k' \quad \text{et} \quad gr - l > k'n^2.$$

Posons l'équation différentielle

$$\frac{d.\left(k'\dfrac{dV'}{dx}\right)}{dx} + k'n^2.V' = 0,$$

qui se réduit à

$$\frac{d^2V'}{dx^2} + n^2V' = 0.$$

Elle a pour intégrale $V' = C\sin.(nx + c)$.
On peut prendre la constante arbitraire c telle qu'on ait

$$\frac{k'\dfrac{dV'}{dx}}{V'} = \frac{k\dfrac{dV}{dx}}{V} \quad \text{pour} \quad x = \mathrm{x},$$

ou bien $V' = 0$, si V est nulle pour $x = \mathrm{x}$.

Cela posé, il résulte du théorème du n° XII du premier Mémoire que la fonction V doit s'évanouir et changer de signe entre les limites x et X au moins autant de fois que V', et en outre d'après le n° XVI deux valeurs de x consécutives qui annullent V' doivent toujours comprendre au moins une valeur de x qui annulle V. Mais V' s'annulle pour une suite de valeurs de x équidifférentes dont la différence constante est $\frac{\pi}{n}$. Donc V doit s'évanouir entre x et X au moins autant de fois que l'intervalle X — x contient $\frac{\pi}{n}$ ou autant de fois qu'il y a d'unités entières dans $\frac{n(\mathrm{X}-\mathrm{x})}{\pi}$. Or on peut rendre ce nombre plus grand que tout nombre donné, en faisant croître r indéfiniment; car on peut prendre n aussi grand qu'on voudra, et remplir toujours la condition $gr - l > k'n^2$, en attribuant à r des valeurs positives suffisamment grandes.

Concevons maintenant que r croisse par degrés insensibles depuis o jusqu'à une valeur R; la fonction $gr - l$ croîtra en même temps que r. Si l'on suppose toujours que, quelle que soit r, on ait

$$k\frac{dV}{dx} - hV = 0 \quad \text{pour} \quad x = \mathrm{x},$$

$\left(\text{ce qui revient à } \frac{k\frac{dV}{dx}}{V} = h\right)$ et si l'on observe que, quand $r=0$, V ne s'évanouit pas entre les limites x et X, on conclura de la deuxième partie du théorème du n° XII, en y remplaçant le paramètre m par r, que le nombre des valeurs de r comprises entre o et R qui annullent la fonction $V(X, r)$ est égal au nombre i des valeurs de x qui annullent $V(x, R)$ entre les limites x et X. Il résulte ensuite du n° XX du même mémoire que le nombre des valeurs de r comprises entre o et R qui satisfont à l'équation $F(r) = 0$, c'est-à-dire qui annullent la fonction $k\frac{dV}{dx} + HV$ où l'on fait $x = X$ est égal à i ou à $i + 1$, selon que la fonction $\frac{k\frac{dV}{dx} + HV}{V}$ est positive ou négative pour $x=X$ et $r=R$, sa valeur pour $x=X$ et $r=0$ étant positive, comme on l'a vu plus haut n° V.

L'équation $F(r)=0$ a donc une infinité de racines positives, puisque i augmente jusqu'à l'infini, quand on prend la quantité R de plus en plus grande.

VIII.

Nous désignerons par ρ_1, ρ_2, ρ_3, etc. les différentes racines de l'équation $F(r) = 0$ rangées par ordre de grandeur en commençant par les plus petites. Pour chacune de ces valeurs de r, les trois équations (6), (7), (8) sont vérifiées en même temps. Nous représenterons généralement par V_i la fonction V correspondante à la racine ρ_i : elle renferme implicitement comme facteur une constante arbitraire.

On a supposé n° II, $u=Ve^{-rt}$ pour satisfaire aux trois équations (1), (2), (3). On a donc maintenant une infinité de solutions particulières de cette forme; savoir

$$u = V_1e^{-\rho_1 t}, \quad u = V_2e^{-\rho_2 t}, \quad u = V_3e^{-\rho_3 t}, \quad \text{etc.},$$

et en général,

$$u = V_ie^{-\rho_i t}. \tag{27}$$

Cette valeur (27) de u qui vérifie les équations (1), (2), (3) satisfera en outre à l'équation (4) si les températures initiales des différents points de la barre sont exprimées par la fonction V_i. Alors la formule

(27) remplit toutes les conditions du problème : les températures variables de tous les points de la barre sont à chaque instant proportionnelles à leurs valeurs initiales ; et si l'on conçoit que le temps croisse par intervalles égaux, les valeurs numériques de ces températures décroissent comme les puissances successives d'une même fraction dont le logarithme pris positivement est proportionnel à ρ_i; de sorte qu'elles s'approchent de zéro d'autant plus rapidement que la racine ρ_i est plus grande. Nous allons faire connaître les principales propriétés qui distinguent ces différents *états simples* représentés par les formules (27) où les températures variables sont exprimées par un seul terme. Ces propriétés ne sont autres que celles des fonctions V_1, V_2,... V_i,... et se déduisent de la théorie exposée dans notre premier mémoire.

IX.

En considérant r comme variable, nous supposerons toujours, comme dans les nos VI et VII, que la fonction $V(x, r)$ qui satisfait à l'équation

$$\frac{d\left(k\frac{dV}{dx}\right)}{dx} + (gr - l)V = 0$$

remplit la condition

$$k\frac{dV}{dx} - hV = 0 \quad \text{pour} \quad x = \mathrm{x}.$$

Cela posé, la quantité $\dfrac{k\frac{dV}{dx} + HV}{V}$ étant positive pour $x = X$ et $r = 0$, comme on l'a vu n° VI, on conclut du théorème du n° XX du premier Mémoire, que les deux fonctions V et $k\frac{dV}{dx} + HV$ où l'on fait $x = X$ doivent s'évanouir et changer de signe alternativement pour des valeurs croissantes de r, et que c'est $k\frac{dV}{dx} + HV$ qui s'évanouit la première.

Ainsi, $V(X, r)$ qui est positive quand $r = 0$, demeure positive tandis que r croît depuis 0 jusqu'à ρ_1; elle change de signe une fois et devient négative pour une valeur de r comprise entre ρ_1 et ρ_2; elle s'évanouit une seconde fois pour redevenir positive quand x croît depuis ρ_2 jusqu'à ρ_3, et ainsi de suite.

De là et du n° XII du premier Mémoire on conclut encore les propriétés suivantes : V_1 ne change pas de signe ou demeure positive entre les limites x et X (comme $V(x, r)$ quand $r=0$). V_2 change de signe une fois pour une valeur de x comprise entre ces limites. V_3 change de signe deux fois entre les mêmes limites, et en général V_i change de signe $i-1$ fois entre x et X.

Si l'on devait avoir $V=0$ pour $x=X$ au lieu de $K\frac{dV}{dx}+HV=0$ (ce qui revient à supposer H infinie dans l'équation (8), V_i s'évanouirait toujours pour $i-1$ valeurs de x plus grandes que x, en comptant X parmi ces valeurs. Et si l'on avait $V=0$ pour $x=\mathrm{x}$, au lieu de $k\frac{dV}{dx}-hV=0$, V_i s'évanouirait encore pour $i-1$ valeurs de x plus grandes que x ; X pouvant être encore la plus grande de ces valeurs.

X.

D'après les n^os XVI et XVII du premier Mémoire, la valeur de x unique qui annulle V_2 est comprise entre les deux valeurs de x qui annullent V_3 ; chaque valeur de x qui annulle V_3 tombe seule entre deux des trois valeurs qui annullent V_4 ; en général, les deux fonctions V_i et V_{i+1} correspondantes à deux racines consécutives ρ_i, ρ_{i+1} de l'équation $F(r)=0$, s'évanouissent l'une après l'autre alternativement, tandis que x croît depuis x jusqu'à X, et c'est V_{i+1} qui s'annulle la première. Il en sera de même si l'on a $V=0$ pour $x=\mathrm{x}$, pourvu qu'on ne compte pas x parmi les valeurs de x qui annullent V_i et V_{i+1}

Si l'on compare les deux fonctions correspondantes à deux racines de rangs quelconques ρ_i et $\rho_{i+\Delta}$, la $n^{ième}$ valeur de x à partir de x qui annulle V_i est plus grande que la $n^{ième}$ valeur de x qui annulle $V_{i+\Delta}$, et plus petite que la valeur de x qui annulle $V_{i+\Delta}$ dont le rang à partir de x est marqué par $n+\Delta$.

D'après les n^os XVI et XVIII du premier Mémoire, deux valeurs de x consécutives qui annullent V_i comprennent toujours au moins une valeur de x qui annulle $V_{i+\Delta}$. Si l'on considère deux valeurs de

x quelconques a et b entre x et X (a pouvant être égale à x et b à X), $V_{i+\Delta}$ ne peut s'évanouir entre les limites a et b qu'une fois de moins que V_i; $V_{i+\Delta}$ s'évanouit entre a et b au plus Δ fois de plus que V_i, et entre deux valeurs de x consécutives qui annullent V_i il ne peut exister plus de Δ valeurs de x qui annullent $V_{i+\Delta}$.

A ces propositions il faut ajouter les remarques énoncées à la fin du n° XVIII, en y remplaçant V' par V_i et V'' par $V_{i+\Delta}$.

D'après une observation générale que nous avons faite n° XLIII de notre premier mémoire, on peut encore à l'aide des théorèmes des n^os XII, XVI, XVII et XVIII, comparer les changements de signe qu'éprouve la fonction V_i dans l'intervalle compris entre a et b, avec ceux qu'éprouve la même fonction V_i, ou une autre V_n correspondante à une autre racine ρ_n, dans un second intervalle égal au premier $b-a$, et compris entre deux autres valeurs de x, a' et b'.

Par exemple, si a et b sont deux valeurs de x consécutives qui annullent V_i, et si en superposant les deux intervalles égaux b-a et b'-a' on trouve que les valeurs de la fonction $g\rho_i - l$ dans le premier intervalle sont plus petites que les valeurs correspondantes de $g\rho_i - l$ ou de $g\rho_n - l$ dans le second, et que celles de k sont au contraire plus grandes dans le premier que dans le second, on sera certain que V_i ou V_n change de signe au moins une fois dans ce second intervalle, V_i ou V_n pouvant d'ailleurs être nulle pour $x=a'$ ou $x=b'$.

XI.

Soit p une quantité constante ou une fonction de x telle qu'on ait pour toutes les valeurs de x depuis x jusqu'à X

$$(g\rho_i - l)\,k + p^2 - k\frac{dp}{dx} > 0. \qquad (28)$$

On aura aussi *à fortiori*

$$(g\rho_{i+\Delta} - l)\,k + p^2 - k\frac{dp}{dx} > 0.$$

Nous allons comparer les valeurs de x qui annullent les deux fonctions

$k\dfrac{dV_i}{dx}+pV_i$ et $k\dfrac{dV_{i+\Delta}}{dx}+pV_{i+\Delta}$ qu'on obtient en faisant $r=\rho_i$ et $r=\rho_{i+\Delta}$ dans l'expression $k\dfrac{dV}{dx}+pV$.

Quelle que soit la racine de l'équation $F(r)=0$ qu'on substitue à la place de r dans $\dfrac{k\frac{dV}{dx}+pV}{V}$, cette quantité a toujours une valeur constante $h+p$ pour $x=\mathrm{x}$, et une autre valeur constante $-H+p$ pour $x=X$, en vertu des équations (7) et (8). Si l'on fait croître r d'une manière continue depuis ρ_i jusqu'à $\rho_{i+\Delta}$ en supposant toujours $\dfrac{\frac{dV}{dx}}{V}=h$ pour $x=\mathrm{x}$, la fonction $\dfrac{k\frac{dV}{dx}+pV}{V}$ où l'on fait $x=X$ variera, et comme elle a pour $r=\rho_i$ et pour $r=\rho_{i+\Delta}$ une seule et même valeur $-H+p$, et conséquemment le même signe, on en conclut d'après le théorème du n° XX du premier mémoire, que r croissant depuis ρ_i jusqu'à $\rho_{i+\Delta}$, la fonction $k\dfrac{dV}{dx}+pV$ où l'on fait $x=X$ doit s'évanouir et change de signe le même nombre de fois que $V(X,r)$, c'est-à-dire Δ fois. Il s'ensuit, d'après le n° XXVI, que la fonction $k\dfrac{dV_{i+\Delta}}{dx}+pV_{i+\Delta}$ s'évanouit entre les limites x et X, Δ fois de plus que $k\dfrac{dV_i}{dx}+pV_i$: d'ailleurs chacune change toujours de signe en s'évanouissant.

XII.

Cela posé, on peut appliquer à ces deux fonctions les propositions énoncées dans le n° XXIX du premier Mémoire, en remplaçant dans ce numéro

$$K'\frac{dV'}{dx}+pV' \text{ par } k\frac{dV_i}{dx}+pV_i, \quad K''\frac{dV''}{dx''}+pV'' \text{ par } k\frac{dV_{i+\Delta}}{dx}+pV_{i+\Delta}$$

et le nombre ε par Δ.

Ainsi deux valeurs de x consécutives qui annullent $k\dfrac{dV_i}{dx}+pV_i$ comprennent toujours au moins une valeur de x qui annulle $k\dfrac{dV_{i+\Delta}}{dx}+pV_{i+\Delta}$

et deux valeurs de x consécutives qui annullent $k\frac{dV_{i+\Delta}}{dx}+pV_{i+\Delta}$ ne peuvent pas comprendre plus d'une valeur de x qui annulle $K\frac{dV_i}{dx}+pV_i$.

La $n^{ième}$ valeur de x à partir de x qui annulle $k\frac{dV_i}{dx}+pV_i$ est plus grande que la $n^{ième}$ valeur de x qui annulle $k\frac{dV_{i+\Delta}}{dx}+pV_{i+\Delta}$ et plus petite qu'une autre valeur de x qui annulle $k\frac{dV_{i+\Delta}}{dx}+pV_{i+\Delta}$ d'un rang marqué par $n+\Delta$ (à partir de x). En faisant en particulier $\Delta=1$, on voit que les deux fonctions $k\frac{dV_{i+1}}{dx}+pV_{i+1}$ et $k\frac{dV_i}{dx}+pV_i$ s'évanouissent l'une après l'autre alternativement, tandis que x croît depuis x jusqu'à X_i.

Si l'on prend entre x et X des valeurs a et b, $k\frac{dV_{i+\Delta}}{dx}+pV_{i+\Delta}$ ne peut s'évanouir qu'une fois de moins que $k\frac{dV_i}{dx}+pV_i$ entre ces limites a et b et s'évanouit au plus Δ fois de plus que $K\frac{dV_i}{dx}+pV_i$. Conséquemment entre deux valeurs de x consécutives α et β qui annullent $k\frac{dV_i}{dx}+pV_i$, il ne peut exister plus de Δ valeurs de x qui annullent $k\frac{dV_{i+\Delta}}{dx}+pV_{i+\Delta}$. Il faut joindre à ces propositions tirées du n° XXIX les remarques qui terminent ce numéro.

D'après le n° XXXII, la fonction $k\frac{dV_i}{dx}+pV_i$ doit changer de signe une fois ou un nombre impair de fois dans l'intervalle compris entre deux valeurs de x consécutives qui annullent V_i, elle ne peut pas s'évanouir sans changer de signe si la condition (28) est toujours remplie.

De plus si la quantité $\dfrac{k\frac{dV_i}{dx}+pV_i}{V_i}$ est positive pour une certaine valeur de x, $k\frac{dV_i}{dx}+pV_i$ changera de signe une fois ou un nombre impair de fois dans l'intervalle compris entre cette valeur de x et celle immédiatement supérieure qui annulle V_i; et $k\frac{dV_i}{dx}+pV_i$ ne changera pas de signe ou en changera un nombre pair de fois dans l'intervalle compris entre la même valeur de x et celle immédiatement inférieure qui annulle V_i. L'inverse aura lieu, si $\frac{k\frac{dV_i}{dx}+pV_i}{V_i}$ est négative pour la valeur de x que l'on considère.

XIII.

Supposons actuellement que p soit une quantité constante ou une fonction de x qui décroisse continuellement, tandis que x croît depuis x jusqu'à X et qui remplisse toujours la condition

$$(g\rho_1 - l)k + p^2 - k\frac{dp}{dx} > 0. \qquad (28)$$

Il peut se faire que quelques-unes des fonctions $g\rho_1 - l$, $g\rho_2 - l, \ldots$ $g\rho_i - l$, etc., changent de signe entre les limites x et X. Mais pour toutes les valeurs de r supérieures à la plus grande valeur de $\frac{l}{g}$, $gr - l$ sera constamment positive entre ces limites. Soit $\rho_{i+\Delta}$ l'une de ces valeurs de r. Alors la fonction $k\frac{dV_{i+\Delta}}{dx}+pV_{i+\Delta}$ jouira des propriétés énoncées dans le n° XXXI du premier Mémoire. Ainsi elle s'évanouira entre les limites x et X, autant de fois que $V_{i+\Delta}$ ou une fois de plus, ou une fois de moins, c'est-à-dire un nombre de fois marqué par $i+\Delta-1$ ou $i+\Delta$ ou $i+\Delta-2$, selon que les valeurs $h+p$ et $-H+p$ de
$\frac{k\frac{dV_{i+\Delta}}{dx}+pV_{i+\Delta}}{V_{i+\Delta}}$ pour $x=$ x et pour $x=$X seront toutes deux de même signe, ou la première positive et la seconde négative; ou enfin la première négative et la seconde positive. En outre, d'après le même n° XXXI ces deux fonctions doivent s'évanouir l'une après l'autre alternativement quand x croît depuis x jusqu'à X, et suivant l'ordre indiqué dans ce numéro.

Considérons maintenant la fonction $k\frac{dV_i}{dx} + pV_i$. Elle s'évanouit toujours Δ fois de moins que $k\frac{dV_{i+\Delta}}{dx} + pV_{i+\Delta}$ entre x et X, pourvu que la condition (28). soit toujours vérifiée. Donc les valeurs de $\frac{\frac{dV_i}{dx} + pV_i}{V_i}$ pour $x = \mathrm{x}$ et pour $x = \mathrm{X}$ étant les mêmes que celles de $\frac{\frac{dV_{i+\Delta}}{dx} + pV_{i+\Delta}}{V_{i+\Delta}}$ savoir $h + p$ et $-\mathrm{H} + p$, on voit que cette fonction $\mathrm{K}\frac{dV_i}{dx} + pV_i$ doit s'évanouir un nombre de fois marqué par $i - 1$ ou i ou $i - 2$, selon que ces valeurs $h + p$ et $-\mathrm{H} + p$ de $\frac{k\frac{dV_i}{dx} + pV_i}{V_i}$ pour $x = \mathrm{x}$ et $x = \mathrm{X}$ seront toutes deux de même signe ou la première positive et la seconde négative, ou enfin la première négative et la seconde positive.

Dans le premier cas, où les deux fonctions V_i et $k\frac{dV_i}{dx} + pV_i$ s'évanouissent le même nombre de fois $i - 1$ entre x et X, je dis qu'elles doivent s'évanouir l'une après l'autre alternativement pour des valeurs de x croissantes, et que c'est $k\frac{dV_i}{dx} + pV_i$ ou V_i qui s'annulle la première selon que les valeurs $h + p$ et $-\mathrm{H} + p$ pour $x = \mathrm{x}$ et $x = \mathrm{X}$ sont toutes deux positives ou toutes deux négatives.

Car d'après le n° XXXII, $\mathrm{K}\frac{dV_i}{dx} + pV_i$ doit changer de signe au moins une fois dans l'intervalle compris entre deux valeurs de x consécutives qui annullent V_i et de plus $k\frac{dV_i}{dx} + pV_i$ doit changer de signe au moins une fois entre x et la plus petite valeur de x qui annulle V_i, si $h + p$ est positive pour $x = \mathrm{x}$, ou bien une fois au moins entre X et la plus grande valeur de x qui annulle V_i si $-\mathrm{H} + p$ est négative pour $x = \mathrm{X}$. Donc ces deux fonctions devant s'évanouir le même nombre de fois $i - 1$ ne peuvent s'annuller que l'une après l'autre alternativement.

On voit de même que si $h+p$ est positive pour $x=\mathrm{x}$ et $-\mathrm{H}+p$ négative pour $x=\mathrm{X}$, les deux fonctions V_i et $k\frac{d\mathrm{V}_i}{dx}+p\mathrm{V}_i$ s'évanouiront encore l'une après l'autre alternativement, et que $k\frac{d\mathrm{V}_i}{dx}+p\mathrm{V}_i$ qui doit s'évanouir une fois de plus que V_i, deviendra nulle la première. Enfin si $h+p$ pour $x=\mathrm{x}$ est négative et $-\mathrm{H}+p$ pour $x=\mathrm{X}$ positive, les deux mêmes fonctions s'évanouiront encore l'une après l'autre tour à tour, V_i deviendra nulle la première et le sera une fois de plus que $k\frac{d\mathrm{V}_i}{dx}+p\mathrm{V}_i$.

Ces propriétés ont lieu pourvu qu'on ait constamment depuis x jusqu'à X,

$$(g\rho_i-l)\,k+p^2-k\frac{dp}{dx}>0 \qquad (28)$$

et que p ne croisse pas, tandis que x augmente.

Cette condition (28) sera remplie, si la fonction $g\rho_i-l$ reste positive entre les limites x et X; alors on peut ajouter à ce qui précède que $\dfrac{k\frac{d\mathrm{V}_i}{dx}+p\mathrm{V}_i}{\mathrm{V}_i}$ décroîtra continuellement tandis que x croîtra depuis une valeur quelconque jusqu'à celle immédiatement supérieure qui annulle V_i. Enfin d'après le n° XXXIII, $g\rho_i-l$ étant toujours positive, si l'on prend successivement pour p des valeurs constantes croissantes depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$ ou des fonctions de x de plus en plus grandes qui décroissent tandis que x croît depuis x jusqu'à X, chaque valeur de x qui annulle $k\frac{d\mathrm{V}_i}{dx}+p\mathrm{V}_i$ augmentera en même temps que p, sans cesser d'être seule comprise entre deux valeurs de x consécutives qui annullent V_i; celles-ci répondent à $p=\pm\infty$.

XIV.

Les valeurs de x qui annullent $\frac{d\mathrm{V}_i}{dx}$ répondent à $p=0$. Quand on fait $p=0$, la condition (28) se réduit à $g\rho_i-l>0$. Alors, d'après le n° XXV et aussi d'après le n° XXX du 1er mémoire, pour chaque annulle $\frac{dV_i}{dx}$, $\frac{k\frac{dV_i}{dx}}{V_i}$ passe toujours du positif au négatif, et V_i devient *maximum*, abstraction faite de son signe. V_i n'a pas de *minimum*. En outre, comme $\frac{k\frac{dV_i}{dx}}{V_i}$ a une valeur positive $+h$ pour $x = \mathrm{x}$ et une valeur négative $-\mathrm{H}$ pour $x = \mathrm{X}$ (aucune des constantes h, H n'étant nulle ou infinie) on conclut du n° XXXI que lorsque x croît depuis x jusqu'à X, les deux fonctions V_i et $\frac{dV_i}{dx}$ doivent s'évanouir en changeant de signe l'une après l'autre alternativement; $\frac{dV_i}{dx}$ devient nulle la première et s'évanouit i fois, c'est-à-dire, une fois de plus que V_i, ainsi V_i passe tour à tour d'un *maximum* à zéro, puis de zéro à un autre *maximum* de signe contraire au précédent, puis change de signe de nouveau, et ainsi de suite, sans avoir de *minimum*. De plus, $\frac{k\frac{dV_i}{dx}}{V_i}$ décroît toujours, quand x croît.

La fonction $V_{i+\Delta}$ jouit de ces propriétés en même temps que V_i. On peut d'ailleurs, d'après le n° XXIX où l'on fera $p = 0$, comparer les valeurs de x qui annullent $\frac{dV_i}{dx}$ et $\frac{dV_{i+\Delta}}{dx}$ et pour lesquelles V_i et $V_{i+\Delta}$ deviennent des *maxima*. On voit ainsi qu'entre deux *maxima* consécutifs de V_i il y a toujours au moins un *maximum* de $V_{i+\Delta}$ et entre deux *maxima* consécutifs de $V_{i+\Delta}$ il ne peut exister plus d'un *maximum* de V_i. Le $n^{ième}$ *maximum* de V_i tombe toujours entre les deux *maxima* de $V_{i+\Delta}$ dont les rangs sont n et $n + \Delta$ à partir de x; de sorte que si $\Delta = 1$, les deux fonctions V_i et $V_{i+\Delta}$ atteignent leurs *maxima* l'une après l'autre tour à tour. Entre deux limites a et b, $V_{i+\Delta}$ ne peut avoir qu'un *maximum* de moins que V_i et au plus Δ *maxima* de plus que V_i: et conséquemment entre deux *maxima* consécutifs de V_i il ne peut exister plus de Δ *maxima* de $V_{i+\Delta}$. *Voyez* la fin du n° XXIX.

On peut, dans ce qui précède, supposer en particulier $i = 1, 2, 3, \ldots$ On en conclut que si la fonction $g\rho_1 - l$ est positive pour toutes les valeurs de x comprises entre x et X, V_1 qui ne s'évanouit pas entre ces limites a un *maximum* unique dans leur intervalle.

Si $g\rho_2 - l$ est constamment positive entre x et X, V_2 a deux valeurs *maxima* entre lesquelles elle s'annulle. Et si $g\rho_1 - l$ est aussi positive en même temps que $g\rho_2 - l$, le *maximum* unique de V_1 se trouvera entre les deux *maxima* de V_2.

Si $g\rho_3 - l$ est positive entre x et X, V_3 qui change deux fois de signe entre ces limites aura trois valeurs *maxima* tour à tour positives et négatives.

Si $g\rho_2 - l$ est aussi positive entre x et X, chaque *maximum* de V_2 se trouve placé entre deux *maxima* consécutifs de V_3, et si $g\rho_1 - l$ est aussi positive, le *maximum* unique de V_1 tombera entre le premier et le troisième *maximum* de V_3.

Il en sera de même des fonctions V_4, V_5, etc.

Ce qui précède fait connaître à peu près la forme des courbes qui représentent ces différentes fonctions V_1, V_2, V_3... dans l'intervalle de x à X.

Nous pourrions encore considérer les points d'inflexion de ces courbes qui sont donnés par l'équation $\frac{d^2V_i}{dx^2} = o$ laquelle à cause de l'équation (8) est la même que la suivante

$$k\frac{dV_i}{dx} + \frac{k(g\rho_i - l)}{\left(\frac{dk}{dx}\right)} V_i = o.$$

En supposant, dans tout ce qui précède, $p = \frac{k(g\rho_i - l)}{\left(\frac{dk}{dx}\right)}$, si la condition (28) était satisfaite, on pourrait connaître le nombre de ces points d'inflexion sur chaque courbe et les comparer sous le rapport de leurs positions respectives sur la même courbe ou sur des courbes différentes, soit entre eux, soit avec les points d'intersection de ces courbes avec l'axe des x et les points *maxima*. Mais ces détails deviendraient trop longs et auraient peu d'intérêt. Il vaudra mieux ne s'occuper des points d'inflexion que dans chaque problème particulier où les fonctions g, k, l auront des expressions connues.

XV.

Les valeurs des racines de l'équation $F(r) = 0$ dépendent de celle des constantes h et H et des fonctions g, l et k et varient en même temps que ces diverses quantités.

En supposant constante la valeur h de $\frac{k\frac{dV}{dx}}{V}$ pour $x = \text{x}$, si l'on attribue successivement à H des valeurs positives de plus en plus grandes depuis zéro jusqu'à l'infini, les racines de l'équation $F(r) = 0$, c'est-à-dire les valeurs de r qui annullent la fonction $k\frac{dV}{dx} + HV$ où l'on fait $x = X$, augmenteront toutes à la fois en convergeant vers celles qui annullent $V(X, r)$, d'après le n° XXI du premier mémoire. En même temps la fonction $g\rho_i - l$ devenant plus grande, les valeurs de x qui annullent chaque fonction V_i deviendront plus petites, de sorte que les points de la barre pour lesquels cette fonction V_i est nulle, s'éloignent tous de l'extrémité de la barre correspondante à l'abscisse X, où le pouvoir émissif devient plus grand.

D'après le n° XXVI les valeurs de x qui annullent la fonction $k\frac{dV_i}{dx} + pV_i$ doivent aussi diminuer, si l'on a

$$(g\rho_i - l)k + p^2 - k\frac{dp}{dx} > 0. \qquad (28)$$

On en conclut en faisant $p = 0$ que, si l'on a $g\rho_i - l > 0$, les valeurs de x qui rendent V_i maximum deviendront aussi plus petites, de sorte que les maxima de V_i s'éloigneront de l'extrémité de l'abscisse X.

Si l'on donne à l'autre constante h des valeurs positives de plus en plus grandes, sans faire varier H, les racines de l'équation $F(r) = 0$ comme aussi celles de l'équation $V(X, r) = 0$ augmenteront toutes à la fois, d'après le n° XXII du premier mémoire, et en même temps d'après le n° XXVIII, les valeurs de x qui annullent chaque fonction V_i deviendront plus grandes, de même que celles qui annullent $k\frac{dV_i}{dx} + pV_i$, si la condition (28) est remplie. En particulier si l'on a $g\rho_i - l > 0$, les maxima de V_i s'éloigneront de l'extrémité de l'abscisse x.

Au surplus, le cas où h augmente ne diffère pas réellement de celui où H augmente, puisque h et H mesurent la grandeur du rayonnement aux deux extrémités de la barre; ainsi ce qu'on a dit pour l'un de ces cas peut s'appliquer à l'autre, par une simple inversion.

Si H et h prennent ensemble des valeurs plus grandes, les racines ρ_i de l'équation $F(r) = 0$ augmenteront plus que si une seule de ces quantités H, h augmentait; mais alors on ne peut pas décider en général si une valeur de x qui annulle V_i doit devenir plus grande ou plus petite, car elle deviendrait plus petite, si H seule augmentait, et plus grande si h seule augmentait.

Si h augmente et si H diminue, on ne peut pas dire en général si une racine ρ_i de l'équation $F(r) = 0$ doit devenir plus grande ou plus petite, car ρ_i deviendrait plus grande si h seule augmentait et plus petite si H seule diminuait. Mais ces deux causes réunies feront croître les valeurs de x qui annullent V_i, comme aussi celles qui annullent $k\frac{dV_i}{dx} + pV_i$ si la condition (28) est remplie, et celles qui rendent V_i *maximum* si l'on a $g\rho_i - l > 0$.

Ces valeurs de x deviendront au contraire plus petites, si h diminue et si H augmente, sans qu'on puisse décider dans quel sens variera la racine ρ_i.

XVI.

En donnant à h et à H des valeurs constantes, supposons qu'on remplace la fonction que k représente par une autre fonction k' qui pour chaque valeur de x soit plus petite que la première k ou au moins égale à k, et les fonctions g, l par d'autres g', l' telles que $g'r - l'$ soit plus grande que $gr - l$, ou au moins égale, pour chaque valeur de r comprise entre certaines limites.

Supposons qu'après ces changements de fonctions la racine ρ_i de l'équation $F(r) = 0$ dont le rang est i devienne ρ'_i et que la fonction correspondante V_i soit changée en V'_i.

Il résulte du n° XXIII du premier mémoire que les nouvelles racines ρ'_i seront plus petites que les premières ρ_i, pourvu qu'elles satisfassent comme les premières à la condition $g'r - l' >$ ou $= gr - l$; mais on ne saura pas si la nouvelle fonction V_i' s'annullera pour des valeurs de x plus petites ou plus grandes que celles qui annullent V_i; car d'après le théorème du n° XII, V_i' s'annullerait pour des valeurs plus petites, si la racine ρ'_i n'était pas plus petite que ρ_i, puisqu'on aurait $g'\rho'_i - l' > g\rho_i - l$ et $k' < k$; mais d'un autre côté, les valeurs de x qui annullent V'_i deviennent d'autant plus grandes, que ρ'_i est plus petite.

Si l'on prend de nouvelles fonctions g', l' et k' telles qu'on ait $g'r - l' \geqq gr - l$ et $k' > k$ on ne peut plus dire si la racine ρ'_i qui remplacera ρ_i sera plus petite ou plus grande que ρ_i; car ρ'_i serait $< \rho_i$, si l'on avait seulement $g'r - l \geqq gr - l$ et $k' = k$, et ρ'_i serait $> \rho_i$ si k seule était changée en $k' > k$ et que g' et l' fussent les mêmes que g et l.

Si pour chaque valeur de x on a $g'\rho_i' - l \geqq g\rho_i - l$ et $k' \leqq k$, les valeurs de x qui annulleront V'_i seront plus petites que celles de même rang à partir de x qui annullent V_i; elles seront au contraire plus grandes si l'on a $g'\rho'_i - l' \leqq g\rho_i - l$ et $k' \geqq k$.

Pareillement si les deux fonctions $g\rho_i - l$ et $g'\rho'_i - l'$ sont positives, selon qu'on aura pour chaque valeur de x,

$$g'\rho'_i - l' \geqq g\rho_i - l \text{ et } k' \leqq k$$

ou bien

$$g'\rho'_i - l' \leqq g\rho_i - l \text{ et } k' \geqq k,$$

les valeurs de x correspondantes aux maxima de V'_i seront plus petites ou plus grandes que celles de même rang à partir de x qui répondent aux maxima de V_i.

XVII.

Jusqu'ici nous n'avons considéré que les valeurs particulières de la fonction u données par la formule $u = V_i e^{-\rho_i t}$ (27) qui satisfait à toutes les équations du problème (1), (2), (3) et (4), lorsque la fonction $f(x)$ qui représente les températures initiales des points de la barre est la même que V_i; V_i contenant implicitement comme facteur une constante arbitraire. Si $f(x)$ n'est égale à aucune des fonctions $V_1, V_2, V_3, \ldots$ on formera l'expression générale de u en faisant la somme de toutes les valeurs particulières (27) après les avoir multipliées par des constantes arbitraires C_1, C_2, C_3, C_i, etc., de sorte qu'on aura

$$u = C_1 V_1 e^{-\rho_1 t} + C_2 V_2 e^{-\rho_2 t} + \ldots + C_i V_i e^{-\rho_i t} + \text{etc.} \qquad (29)$$

Cette expression de u satisfait aux trois équations (1), (2), (3) puisque chacun de ses termes y satisfait séparément. Il reste à remplir la condition

$$u = f(x) \text{ pour } t = 0. \qquad (4)$$

Il faut donc qu'en faisant $t = 0$ dans l'équation (29) on ait pour toutes les valeurs de x depuis x jusqu'à X

$$f(x) = C_1 V_1 + C_2 V_2 + \ldots + C_i V_i + \text{etc.} \qquad (30)$$

c'est-à-dire qu'il s'agit d'exprimer dans l'intervalle de x à X la fonction arbitraire $f(x)$ par une série de fonctions assujetties à vérifier les trois équations (6), (7), (8) et qui diffèrent les unes des autres par les valeurs $\rho_1\, \rho_2 \ldots \rho_i \ldots$ du paramètre r tirées de l'équation transcendante $F(r) = 0$. En admettant la possibilité de ce développement, on détermine chaque coefficient C_i par le procédé connu que nous allons rappeler.

Multiplions les deux membres de l'équation (30) par $gV_i dx$, puis intégrons-les entre les limites x et X; nous aurons

$$\int_{\mathrm{x}}^{X} gV_i f(x)\, dx = C_1 \int_{\mathrm{x}}^{X} gV_1 V_i\, dx + C_2 \int_{\mathrm{x}}^{X} gV_2 V_i dx + \ldots$$
$$+ C_i \int_{\mathrm{x}}^{X} gV_i^2\, dx + \text{etc.} \qquad (31)$$

Or, d'après la formule (17) toutes les intégrales qui dans le second membre de cette équation sont multipliées par les coefficients $C_1\, C_2 \ldots$ autres que C_i sont nulles. Celle qui est multipliée par C_i est évidemment une quantité positive. Si l'on suppose connue l'expression de V en fonction de x et de r qui satisfait aux deux équations (1) et (2), en considérant r comme indéterminée, cette intégrale $\int_{x}^{X} g V_i^2 dx$ sera d'après la formule (18) égale à la valeur de l'expression $-V\frac{d.}{dr}\left(k\frac{dV}{dx}+HV\right)$ où l'on fera $x=X$ et $r=\rho_i$. En désignant pour abréger, cette quantité par R_i, on tirera donc de l'équation (31)

$$C_i=\frac{\int_{x}^{X} gV_i\, f(x)\, dx}{R_i} \tag{32}$$

et en mettant cette valeur de C_i dans les formules (29) et (30) qu'on peut écrire ainsi :

$$u=\sum_{i=1}^{i=\infty} C_i V_i e^{-\rho_i t} \qquad f(x)=\Sigma . C_i V_i$$

elles deviendront

$$u=\sum_{i=1}^{i=\infty} . V_i e^{-\rho_i t}\int_{x}^{X}\frac{gV_i\, f(x)\, dx}{R_i} \tag{33}$$

$$f(x)=\sum_{i=1}^{i=\infty} V_i . \int_{x}^{X}\frac{gV_i\, f(x)\, dx}{R_i} \tag{34}$$

On arrive aux mêmes résultats par la méthode générale dont M. Poisson a fait usage depuis long-temps dans un grand nombre de problèmes et en particulier dans celui qui nous occupe. (*Théorie de la chaleur*, pages 261 — 264.)

On n'a point encore démontré, lorsque les fonctions positives g, k, l, sont quelconques, la possibilité d'exprimer une fonction arbitraire $f(x)$ par une série *convergente* de la forme $C_1V_1+C_2V_2+$ etc. (30). Fourier et d'autres géomètres semblent avoir méconnu l'importance et la difficulté de ce problème qu'ils ont confondu avec celui de déterminer les coefficients C_i. M. Liouville a résolu une partie de la question en démontrant par une méthode très ingénieuse (n° de juillet de son journal), que la somme de la série (34), si cette série est convergente, ne peut qu'être égale à $f(x)$, pour toutes les valeurs de x comprises entre x et X. Dans le numéro suivant, nous admettrons provisoirement l'intégrale (33) qui est fondée sur la formule (34), pour en déduire quelques conséquences.

XVIII.

On voit qu'à mesure que le temps t augmente, tous les termes de la série (33) tendent vers zéro, avec des vitesses inégales, de sorte qu'après un certain temps, la température variable u de chaque point de la barre finit par se réduire sensiblement à zéro, c'est-à-dire à la température fixe du milieu où la barre est placée. Mais avant que la valeur de u soit nulle, il y aura une époque où la série (33) se réduira à très peu près à son premier terme correspondant à la plus petite racine ρ_1 de l'équation $F(r) = 0$, en sorte qu'on aura sensiblement

$$u = C_1 V_1 e^{-\rho_1 t},$$

C_1 désignant la quantité

$$\frac{\int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{X}} g V_1 f(x) dx}{\int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{X}} g V_1^2 dx}.$$

En faisant abstraction du coefficient constant C_1, on voit que cet *état final* des températures ne dépend point de leur distribution initiale représentée par $f(x)$ qui n'influe que sur la valeur de la constante C_1 : il se confond avec le premier des états simples que nous avons considérés précédemment. Par conséquent, après un certain temps plus ou moins long, les températures de tous les points de la barre, quel que soit leur état initial, seront supérieures à la température fixe du milieu, si la valeur de C_1 est positive, ou lui seront inférieures, si C_1 est négative. En outre, si la fonction $g\rho_1 - l$ est positive pour toutes les valeurs de x depuis x jusqu'à X, ces températures finales, abstraction faite de leur signe quand elles seront négatives, ne présenteront qu'un seul *maximum*, c'est-à-dire qu'elles seront croissantes depuis une extrémité de la barre jusqu'à un certain point, puis décroissantes depuis ce point jusqu'à l'autre extrémité; et si l'une des équations (2), (3) se réduit à $\frac{du}{dx} = 0$ pour l'une des extrémités, ces températures finales iront en croissant ou décroissant depuis cette extrémité jusqu'à l'autre. Ces propriétés n'ont pas lieu dans l'état initial, puisque la fonction $f(x)$ est arbitraire.

Elles supposent toutefois que la valeur de la constante C_1 qui dépend de cette fonction $f(x)$ n'est pas nulle. Or C_1 devient nulle, dans le cas où $f(x)$ remplit la condition $\int_x^X gV_1 f(x)dx = 0$. Alors si l'on n'a pas en même temps $\int_x^X gV_2 f(x)dx = 0$, les températures finales seront exprimées par le second terme $C_2V_2e^{-\rho_2 t}$ de la série (33), la valeur de C_2 étant $\dfrac{\int_x^X gV_2 f(x)dx}{\int_x^X gV_2^2 dx}$. Dans cet état final, les températures seront positives dans une partie de la barre et négatives dans la partie restante. De plus, si $g\rho_2 - l$ est positive pour toute la barre, il y aura une valeur *maximum* de u sur chacune de ces parties et il n'y en aura qu'une.

Si l'on avait à la fois

$$\int_x^X gV_1 f(x)dx = 0, \quad \text{et} \quad \int_x^X gV_2 f(x)\,dx = 0,$$

l'état final serait exprimé par le troisième terme de la série (33). Si l'on avait en outre $\int_x^X gV_3 f(x)\,dx = 0$, l'état final serait donné par le quatrième terme et ainsi de suite.

XIX.

On vient de voir qu'après un temps plus ou moins considérable, la fonction u finit par avoir le même signe dans toute l'étendue de la barre, si la valeur de C_1 n'est pas nulle, ou bien par n'avoir qu'un nombre de changements de signe égal au nombre des coefficients successifs C_1, C_2, C_3... qui se trouvent nuls à la fois. Donc, si à une époque déterminée, u s'évanouit une ou plusieurs fois entre les limites x et X, il faut que par l'accroissement du temps, le nombre des valeurs nulles de u diminue, jusqu'à se réduire enfin à zéro ou au nombre des coefficients C_1, C_2... qui seront nuls à la fois. Nous allons examiner comment s'opère cette disparition des valeurs nulles de u. Cette recherche a des applications importantes.

Supposons d'abord que u soit nulle pour $t = \tau$ et $x = \xi$, et que $\frac{du}{dx}$ ne soit pas nulle en même temps. On peut donner à x une valeur

a plus petite que ξ et une autre valeur b plus grande que ξ telles que $\frac{du}{dx}(x, \tau)$ qui n'est pas nulle pour $x = \xi$ ne s'annulle ni pour $x = a$, ni pour $x = b$, ni pour aucune valeur de x comprise entre a et b.

Alors $\frac{du}{dx}(x, \tau)$ ayant constammment le même signe dans cet intervalle, selon que ce signe est $+$ ou $-$, la fonction $u(x, \tau)$ doit croître ou décroître continuellement, tandis que x croît depuis a jusqu'à b, elle ne s'évanouit donc que pour $x = \xi$ dans cet intervalle, et les valeurs de $u(a, \tau)$ et $u(b, \tau)$ sont différentes de zéro et de signes contraires.

Faisons maintenant $t = \tau + t'$, t' étant une quantité positive qu'on prendra aussi petite qu'on voudra. Comme $\frac{du}{dx}(x, \tau)$ n'est nulle pour aucune valeur de x comprise entre a et b, $\frac{du}{dx}(x, \tau + t')$ aura, pour chaque valeur de x entre a et b une valeur différente de zéro et de même signe que $\frac{du}{dx}(x, \tau)$, pourvu que t' soit suffisamment petite.

Donc $\frac{du}{dx}(x, \tau + t')$ aura dans tout l'intervalle de a à b le signe de $\frac{du}{dx}(\xi, \tau)$: donc, selon que ce signe sera $+$ ou $-$, la fonction $u(x, \tau + t')$ ira en croissant ou en décroissant dans cet intervalle.

Or, aux deux limites a et b cette fonction a des valeurs de signes contraires. Car $u(a, \tau)$ n'étant pas nulle, $u(a, \tau + t')$ aura le même signe que $u(a, \tau)$ si l'on prend t' suffisamment petite, puisqu'on peut rendre la différence entre $u(a, \tau)$ et $u(a, \tau + t')$ plus petite que $u(a, \tau)$ en diminuant t' : donc $u(a, \tau + t')$ a un signe contraire à celui de $\frac{du}{dx}(\xi, \tau)$. De même $u(b, \tau + t')$ aura le même signe que $u(b, \tau)$ et conséquemment le même signe que $\frac{du}{dx}(\xi, \tau)$.

Donc $u(x, \tau + t')$ a deux valeurs de signes contraires pour $x = a$ et pour $x = b$; et comme cette fonction croît ou décroît continuellement dans l'intervalle de a à b, on voit qu'elle s'annulle une seule fois et qu'elle change de signe pour une valeur de x comprise entre a et b.

En faisant $x=\tau-t'$, on verra de même que la fonction... $u(x,\ \tau-t')$ doit aussi s'évanouir une seule fois en changeant de signe pour une valeur de x entre a et b.

XX.

Supposons à présent que u et $\frac{du}{dx}$ soient nulles à la fois pour $t=\tau$ et $x=\xi$, mais que $\frac{d^2u}{dx^2}$ ne le soit pas, et admettons pour fixer les idées que $\frac{d^2u}{dx^2}$ soit positive.

On peut donner à x une valeur a plus petite que ξ et une valeur b plus grande que ξ telles que $\frac{d^2u}{dx^2}$ ait dans tout l'intervalle de a à b le même signe qu'elle a pour $x=\xi$, c'est-à-dire le signe $+$. Alors x croissant depuis a jusqu'à b, $\frac{du}{dx}(x,\ \tau)$ ira en croissant, et comme cette fonction est nulle pour $x=\xi$, elle sera négative dans l'intervalle de a à ξ puis positive dans l'intervalle de ξ à b.

Donc x croissant depuis a jusqu'à ξ, la fonction $u(x,\ \tau)$ décroîtra et sera par conséquent positive, puisqu'elle est nulle pour $x=\xi$; ensuite x croissant depuis ξ jusqu'à b, $u(x,\ \tau)$ croîtra et par conséquent sera encore positive.

Faisons maintenant $t=\tau+t'$: $\frac{d^2u}{dx^2}(x,\ \tau+t')$ aura pour chaque valeur de x entre a et b une valeur différente de zéro et de même signe que $\frac{d^2u}{dx^2}(x,\ \tau)$ c'est-à-dire positive, pourvu qu'on prenne t' suffisamment petite, puisqu'alors ces deux fonctions diffèrent l'une de l'autre aussi peu qu'on veut. Donc $\frac{du}{dx}(x,\ \tau+t')$ croîtra continuellemment dans l'intervalle de a à b; mais cette fonction a une valeur négative pour $x=a$ et positive pour $x=b$, puisque ces valeurs diffèrent aussi peu qu'on veut de celles de $\frac{du}{dx}(a,\tau)$ et $\frac{du}{dx}(b,\ \tau)$ qui ne sont pas nulles. Donc $\frac{du}{dx}(x,\ \tau+t')$ s'annulle entre les limites a et b une seule fois et passe en s'évanouissant du négatif ou positif.

Pour discuter $u(x,\ \tau+t')$, il faut considérer la fonction $\frac{du}{dt}(x,\ \tau)$.

53..

Pour $x=\xi$ et $t=\tau$ on a par l'équation (1) $g\frac{du}{dt}=k\frac{d^2u}{dx^2}$, puisque u et $\frac{du}{dx}$ sont alors nulles. Donc $\frac{du}{dt}(\xi, \tau)$ n'est pas nulle et a le même signe que $\frac{d^2u}{x^2}(\xi, \tau)$, c'est-à-dire le signe $+$. Or, on peut prendre a et b assez près de ξ pour que $\frac{du}{dt}(x, \tau)$ reste positive entre ces limites a et b. Mais en prenant t' suffisamment petite, la différence $u(x, \tau+t')-u(x, \tau)$ a le même signe que $\frac{du}{dt}(x, \tau)$. Donc pour toutes les valeurs de x comprises entre a et b, la fonction.... $u(x, \tau+t')$ est plus grande que $u(x, \tau)$ et par conséquent positive.

Si l'on fait $x=\tau-t'$, on prouvera, comme tout à l'heure, que $\frac{du}{dx}(x, \tau-t')$ s'annulle entre les limites a et b une seule fois et passe du négatif au positif.

Pour chaque valeur de x comprise entre a et b, la fonction $u(x, \tau-t')$ est plus petite que $u(x, \tau)$, puisque la différence $u(x, \tau-t')-u(x, \tau)$ a un signe contraire à celui de $\frac{du}{dt}(x, \tau)$, t' étant suffisamment petite: donc $u(x, \tau-t')$ est négative pour $x=\xi$. Mais elle est positive pour $x=a$ et $x=b$, comme $u(x, \tau)$, car en prenant t' suffisamment petite, $u(a, \tau-t')$ et $u(b, \tau-t')$ diffèrent aussi peu qu'on veut de $u(a, \tau)$ et $u(b, \tau)$ qui ont le signe $+$. Il suit de là que $u(x, \tau-t')$ change de signe au moins deux fois, d'abord pour une valeur de x comprise entre a et ξ, puis pour une autre entre ξ et b. Je dis de plus que cette fonction ne peut pas s'évanouir plus de deux fois entre les limites a et b: car si elle s'évanouissait une troisième fois, en changeant ou ne changeant pas de signe, $\frac{du}{dx}(x, \tau-t')$ devrait s'annuller au moins deux fois entre les mêmes limites a et b, ce qui n'arrive pas.

Nous avons supposé $\frac{d^2u}{ax^2}(\xi, \tau)$ positive. Si cette quantité est négative on reconnaîtra de la même manière que $u(x, \tau+t')$ doit être négative et ne pas s'évanouir entre les limites a et b, et que... $u(x, \tau-t')$ doit changer de signe et s'évanouir deux fois seulement, d'abord entre a et ξ, puis entre ξ et b. D'ailleurs, ce cas se ramène au précédent, en changeant u en $-u$.

En supposant que u ne soit pas constamment nulle pour $x=\mathrm{x}$

quelle que soit t, il peut arriver que u s'évanouisse pour $x = \mathrm{x}$ quand t atteint une valeur τ. Alors $\frac{du}{dx}$ sera nulle en même temps, à cause de l'équation $k\frac{du}{dx} - hu = 0$. (2). Si $\frac{d^2u}{dx^2}$ n'est pas nulle aussi, on verra par le raisonnement précédent qu'en faisant croître x depuis x jusqu'à une valeur b un peu plus grande que x, $u(x, \tau + t')$ ne s'évanouira pas et aura le même signe que $\frac{d^2u}{dx^2}(\mathrm{x}, \tau)$, et que $u(x, \tau - t')$ changera de signe et s'évanouira une seule fois entre x et b.

De même, si u est nulle pour $x = \mathrm{X}$ et $t = \tau$, $\frac{du}{dx}$ sera nulle en même temps; à cause de l'équation (3). Alors $u(x, \tau + t')$ aura pour les valeurs x un peu plus petites que X et pour $x = \mathrm{X}$, le même signe que $\frac{d^2u}{dx^2}(\mathrm{X}, \tau)$: et $u(x, \tau - t')$ changera de signe et s'évanouira une fois près de la limite X.

XXI.

Je suppose actuellement que la fonction u et plusieurs de ses dérivées successives $\frac{du}{dx}$, $\frac{d^2u}{dx^2}$, ... jusqu'à $\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}$ deviennent nulles à la fois pour $x = \xi$ et $t = \tau$, et je vais examiner ce que u deviendra pour des valeurs de x et de t très peu différents de ξ et de τ. Pour traiter ce cas général qui comprend ceux dont je me suis occupé dans les deux numéros précédents, j'emploierai une autre méthode fondée sur le développement de u suivant les puissances de x' et de t', en faisant $x = \xi + x'$ et $t = \tau + t'$

L'équation (1) devient

$$g\frac{du}{dt'} = \frac{d\left(k\frac{du}{dx'}\right)}{dx'} - lu'. \qquad (1)$$

On a, d'après la formule de Taylor,

$$u(\xi + x', \tau + t') = \mathrm{Y} + \mathrm{Y}_1 t' + \mathrm{Y}_2\frac{t'^2}{1.2} + \ldots + \mathrm{Y}_n\frac{t'^n}{1.2.3.n} + \theta t'^{n+1} (*) \quad (35)$$

(*) On arrive immédiatement à cette formule en intégrant $n + 1$ fois de suite $\frac{d^{n+1}u}{dt'^{n+1}} \cdot dt'^{n+1}$ depuis $t' = 0$ jusqu'à $t = t'$ et introduisant successivement comme constantes arbitraires les valeurs de $\frac{d^n u}{dt'^n}$ $\frac{d^{n-1}u}{dt'^{n-1}}$, etc. pour $t' = 0$, qu'on suppose données.

en désignant par Y, Y_1, $Y_2 \ldots Y_n$, ce que deviennent les fonctions u, $\frac{du}{dt'}$, $\frac{d^2u}{dt'^2} \ldots \frac{d^nu}{dt'^n}$, quand on fait $t' = 0$ ou $t = \tau$, de sorte que Y, $Y_1 \ldots Y_n$ ne dépendent que de la seule variable x'. Le terme $\theta t'^{n+1}$ remplace l'intégrale multiple $\int\int\int_0^{t'} \ldots \frac{d^{n+1}u}{dt'^{n+1}} dt'^{n+1}$, d'où il suit que θ est comprise entre la plus petite et la plus grande des valeurs que prend la fonction $\frac{1}{1.2.3\ldots(n+1)} \cdot \frac{d^{n+1}u}{dt'^{n+1}}$, tandis que t' varie depuis 0 jusqu'à sa plus grande valeur.

On a supposé que pour $x = \xi$ et $t = \tau$, les fonctions u, $\frac{du}{dx}$, $\frac{d^2u}{dx^2}$, etc. jusqu'à $\frac{d^{m-1}u}{dx^{m-1}}$ sont toutes nulles et que $\frac{d^mu}{dx^m}$ a une valeur A différente de zéro. Quand on fait $t = \tau$ ou $t' = 0$, ces fonctions u, $\frac{du}{dx}$, $\frac{d^2u}{dx^2}, \ldots$ sont les mêmes que Y, $\frac{dY}{dx'}$, $\frac{d^2Y}{dx'^2}$, etc. Donc, pour $x' = 0$, Y, $\frac{dY}{dx'}$, etc. jusqu'à $\frac{d^{m-1}Y}{dx'^{m-1}}$ sont nulles et $\frac{d^mY}{dx'^m}$ est égale à A.

Pour des valeurs de x' suffisamment petites, soit positives, soit négatives, $\frac{d^mY}{dx'^m}$ différera de A aussi peu qu'on voudra. On en conclut (en intégrant m fois), que pour ces mêmes valeurs, on aura

$$Y = (A + \alpha) \frac{x'^m}{1.2.3\ldots m}.$$

α étant une quantité positive ou négative, fonction de x', qui s'évanouira avec x', et qu'on pourra rendre plus petite que toute quantité donnée en prenant x' suffisamment petite.

Pour avoir les expressions de Y_1, $Y_2, \ldots$, il faut dans l'équation (1) et dans celles qu'on en déduit en la différentiant plusieurs fois par rapport à t', faire $t' = 0$. On obtient alors en remplaçant u, $\frac{du}{dt'}$, $\frac{d^2u}{dt'^2} \ldots$, par Y, Y_1, $Y_2 \ldots$ les équations suivantes :

$$gY_1 = \frac{d.\left(k\frac{dY}{dx'}\right)}{dx'} - lY,$$

$$gY_2 = \frac{d.\left(k\frac{dY_1}{dx'}\right)}{dx'} - lY_1,$$

$$gY_3 = \frac{d.\left(k\frac{dY_2}{dx'}\right)}{dx'} - lY_2.$$

etc.

La première $gY_1 = \frac{d.\left(k\frac{dY}{dx'}\right)}{dx'} - lY$ différentiée p fois par rapport à x', donne

$$g\frac{d^pY_1}{dx'^p} + p\frac{dg}{dx'}\frac{d^{p-1}Y}{dx'^{p-1}} + \ldots + \frac{d^pg}{dx'^p}Y_1$$
$$= k\frac{d^{p+2}Y}{dx'^{p+2}} + (p+1)\frac{dk}{dx'}\frac{d^{p+1}Y}{dx'^{p+1}} + \frac{(p+1)p}{1.2}\frac{d^2k}{dx'^2}\frac{d^pY}{dx'^p} + \ldots + \frac{d^{p+1}k}{dx'^{p+1}}\frac{dY}{dx'}$$
$$- l\frac{d^pY}{dx'^p} - \ldots - \frac{d^pl}{dx'^p}Y.$$

Comme $Y, \frac{dY}{dx'}, \ldots \frac{d^{m-1}Y}{dx'^{m-1}}$ sont nulles pour $x'=0$ et que $\frac{d^mY}{dx'^m} = A$ on voit par les deux dernières équations que Y_1 $\frac{dY_1}{dx'}$, etc., jusqu'à $\frac{d^{m-3}Y_1}{dx'^{m-3}}$ sont nulles aussi pour $x'=0$ et qu'on a

$$\frac{d^{m-2}Y_1}{dx'^{m-2}} = \left(\frac{k}{g}\right)\frac{d^mY}{dx'^m} = \left(\frac{k}{g}\right)A, \text{ pour } x'=0.$$

Par conséquent, pour des valeurs de x' suffisamment petites, on aura

$$Y_1 = \left(\frac{k}{g}\right)\left(A + \alpha_1\right)\frac{x'^{m-2}}{1.2.3\ldots(m-2)}.$$

α étant une fonction de x' qui doit être très petite et nulle en même temps que x', et $\left(\frac{k}{g}\right)$ désignant ici la valeur de $\frac{k}{g}$ qui répond à... $x'=0$.

En différentiant p fois par rapport à x' l'équation

$$gY_2 = \frac{d.\left(k\,\frac{dY_1}{dx'}\right)}{dx'} - lY_1,$$

on verra de la même manière que Y_2, $\frac{dY_2}{dx'}\ldots$ jusqu'à $\frac{d^{m-5}Y_2}{dx'^{m-5}}$ sont nulles pour $x' = 0$ et que

$$\frac{d^{m-4}Y_2}{dx'^{m-4}} = \left(\frac{k}{g}\right)\frac{d^{m-2}Y_1}{dx'^{m-2}} = \left(\frac{k}{g}\right)^2.A\,, \text{ pour } x' = 0\,,$$

d'où l'on conclura

$$Y_2 = \left(\frac{k}{g}\right)^2.(A + \alpha_2)\frac{x'^{m-4}}{1.2.3\ldots(m-4)}.$$

On trouvera de même

$$Y_3 = \left(\frac{k}{g}\right)^3 (A + \alpha_3)\,\frac{x'^{-6}}{1.2.3\ldots(m-6)},$$

et en général,

$$Y_n = \left(\frac{k}{g}\right)^n.(A + \alpha_n)\,\frac{x^{m-2n}}{1.2.3\ldots(m-2n)}.$$

Toutes les quantités α, α_1, $\alpha_2 \ldots . \alpha$, fonctions de x' pourront devenir plus petites que toute grandeur donnée, pourvu qu'on attribue à x' des valeurs suffisamment petites soit positives, soit négatives.

Supposons maintenant le nombre m pair et $= 2n$. Nous aurons en mettant dans la formule (35) les valeurs précédentes de Y, Y_1, $Y_2 \ldots$

$$\begin{aligned} u(\xi+x',\ \tau+t') = {} & (A+\alpha)\frac{x'^{2n}}{1.2.3\ldots 2n} + (A+\alpha_1)\,\frac{x'^{2n-2}}{1.2.3\ldots(2n-2)}\left(\frac{kt'}{g}\right) \\ & + (A+\alpha_2)\frac{x'^{2n-4}}{1.2.3\ldots(2n-4)}.\frac{\left(\frac{kt'}{g}\right)^2}{1.2} + (A+\alpha_3)\,\frac{x'^{2n-6}}{1.2\ldots(2n-6)}.\frac{\left(\frac{kt'}{g}\right)^3}{1.2.3} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + (A+\alpha_{n-1})\,\frac{x'^2}{1.2}.\frac{\left(\frac{kt'}{g}\right)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} + (A+\alpha_n)\frac{\left(\frac{kt'}{g}\right)^n}{1.2.3\ldots n} \\ & + \beta t'^{n+1}. \end{aligned}$$

Si l'on fait

$$x' = z\sqrt{\left(\frac{kt'}{g}\right)},$$

et si l'on représente par Q le polynome

$$\frac{z^{2n}}{1.2.3\ldots 2n} + \frac{z^{2n-2}}{1.2.3\ldots(2n-2)\times 1} + \frac{z^{2n-4}}{1.2.3\ldots(2n-4)\times 1.2} + \ldots$$
$$+ \frac{z^{2n-6}}{1.2.3\ldots(2n-6)\times 1.2.3} + \frac{z^{2}}{1.2\times 1.2.3\ldots(n-1)} + \frac{1}{1.2.3\ldots n},$$

la somme des termes affectés du coefficient A dans le développement précédent sera $A.\left(\frac{kt'}{g}\right)^n.Q$; la somme des termes qui renferment α, α_1, $\alpha_2 \ldots \alpha_n$ aura une valeur absolue plus petite que $\left(\frac{kt'}{g}\right)^n.6Q$, 6 étant un nombre qui surpasse toutes les quantités α, $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ prises positivement, et qu'on pourra prendre aussi petit qu'on voudra, en donnant à x' des valeurs assez petites, pour que α, α_1, $\alpha_2 \ldots \alpha_n$ soient encore moindres que 6.

En joignant à ces termes la partie $\theta t'^{n+1}$, on voit que la valeur précédente de u pourra se mettre sous cette forme

$$u(\xi + x',\quad \tau + t') = \left(\frac{kt'}{g}\right)^n . A(Q + \varepsilon).$$

ε est une quantité positive ou négative, fonction de z et de t', qu'on rendra aussi petite qu'on voudra, en prenant t' suffisamment petite et donnant d'ailleurs à z des valeurs finies, positives et négatives, qui ne soient pas tellement grandes que les valeurs correspondantes de x' ou de $z\sqrt{\left(\frac{kt'}{g}\right)}$ sortent des limites que nous avons assignées à cette variable x'. On pourra donc donner à z des valeurs d'autant plus grandes que t' sera plus petite. Nous désignerons par $-a$ et $+b$ les limites entre lesquelles x' devra rester comprise pour que la quantité ε soit moindre qu'une quantité donnée aussi petite qu'on voudra.

Cela posé, pour toutes les valeurs de z, le polynome Q est constamment positif et plus grand que son dernier terme $\frac{1}{1.2.3\ldots n}$, qui est lui même plus grand que ε, qu'on peut diminuer à volonté. Donc pour toutes les valeurs de x' comprises entre $-a$ et $+b$, la fonction $u(\xi+x', \tau+t'$

sera différente de zéro et de même signe que A, la quantité positive t' étant très petite.

Supposons maintenant m impair et $= 2n + 1$. En substituant dans la série de Taylor (35) les valeurs de $Y, Y_1, Y_2 \ldots Y_n$, on aura

$$u(\xi + x', \ \tau + t') = (A + \alpha)\frac{x'^{2n+1}}{1.2.3\ldots(2n+1)} + (A + \alpha')\frac{x'^{2n-1}}{1.2.3\ldots(2n-1)}\left(\frac{kt'}{g}\right)$$

$$+ (A + \alpha_2)\frac{x'^{2n-3}}{1.2.3\ldots(2n-3)}\cdot\frac{\left(\frac{kt'}{g}\right)^2}{1.2} + \ \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ (A + \alpha_n)\frac{x'}{1}\cdot\frac{\left(\frac{kt'}{g}\right)^n}{1.2.3\ldots n} + \theta t'^{n+1}.$$

Si l'on fait encore

$$x' = z\sqrt{\left(\frac{kt'}{g}\right)}$$

et $$Q = \frac{z^{2n+1}}{1.2.3\ldots(2n+1)} + \frac{z^{2n-1}}{1.2\ldots(2n-1)\times 1} + \frac{z^{2n-3}}{1.2.3\ldots(2n-3)\times 1.2} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{z^3}{1.2.3\times 1.2\ldots(n-1)} + \frac{z}{1\times 1.2.3\ldots n}$$

on aura

$$u(\xi + x', \ \tau + t') = \sqrt{\left(\frac{kt'}{g}\right)^{2n+1}}\cdot A(Q + \varepsilon),$$

la quantité ε sera comme précédemment aussi petite qu'on voudra, pourvu que x' reste comprise entre des limites $-a$ et $+b$ suffisamment petites.

Cela posé, le polynome Q est nul pour $z = 0$, positif quand z est positive, et négatif quand z est négative. On voit d'ailleurs que la fonction $u(\xi + x', \ \tau + t')$ a le même signe que AQ pour toute valeur finie de z qui n'est pas très petite, puisque alors Q surpasse ε. Donc, Q changeant de signe pour $z = 0$, la fonction $u(\xi + x', \tau + t')$ doit aussi changer de signe au moins une fois, tandis que x' varie entre les limites $-a$ et $+b$. Je dis de plus qu'elle ne peut s'évanouir qu'une seule fois dans cet intervalle, parce que sa dérivée $\frac{du}{dx'}$ ne s'évanouit pas et conserve constamment le signe de A dans ce même intervalle. En effet, on a, d'après la formule (35),

$$\frac{du}{dx'} = \frac{dY}{dx'} + \frac{dY_1}{dx'}\,t' + \frac{dY_2}{dx'}\,\frac{t'^2}{1.2} + \ldots + \frac{dY_n}{dx'}\,\frac{t'^n}{1.2.3\ldots n} + \frac{d\theta}{dx'}\,t'^{n+1}, \quad (36)$$

On trouve d'ailleurs

$$\frac{dY}{dx'} = (A+\alpha')\frac{x'^{m-1}}{1.2.3\ldots(m-1)},\quad \frac{dY_1}{dx'} = \left(\frac{k}{g}\right)(A+\alpha'_1)\,\frac{x'^{m-3}}{1.2.3\ldots(m-3)},\ \text{etc.},$$

α', $\alpha'_1\ldots$ étant très petites et nulles en même temps que x'.

Substituant ces valeurs de $\frac{dY}{dx'}$, $\frac{dY_1}{dx'}\ldots$ dans la formule précédente, remplaçant m par $2n+1$, et faisant ensuite

$$x' = z\sqrt{\left(\frac{kt'}{g}\right)}$$

on trouvera

$$\frac{du}{dx'} = \left(\frac{kt'}{g}\right)^n.A\left[\frac{z^{2n}}{1.2.3\ldots 2n} + \frac{z^{2n-2}}{1.2.3\ldots(2n-2)\times 1} + \ldots + \frac{1}{1.2.3\ldots n} + \varepsilon'\right],$$

ε' étant comme ε une quantité qu'on rendra aussi petite qu'on voudra en prenant t' et x' suffisamment petites.

On voit par cette expression de $\frac{du}{dx'}$ que cette dérivée conserve constamment le signe de A quand x' varie entre les limites très petites $-a$ et $+b$, et qu'ainsi la fonction $u(\xi+x', \tau+t')$ croît ou décroît continuellement dans cet intervalle; de sorte qu'elle s'y évanouit une seule fois en changeant de signe.

On peut encore démontrer ces propositions sans employer les développements précédents. Lorsque m est pair et $=2n$, on a $Y_n = \left(\frac{k}{g}\right)$. A pour $x'=0$, et les autres fonctions Y, Y_1, $Y_2, \ldots Y_{n-1}$ sont nulles pour $x'=0$. D'après les relations qui existent entre Y, $Y_1, \ldots Y_n$, et leurs différentielles, il est aisé de voir que toutes ces fonctions Y, $Y_1, \ldots Y_n$ sont différentes de zéro et de même signe que A pour des valeurs de x' suffisamment petites, soit positives, soit négatives; donc alors tous les termes de la formule de Taylor (35) qui renferment ces fonctions sont de même signe que A et comme le dernier $Y_n\,\frac{t'^n}{1.2.3\ldots n}$ surpasse $\theta t'^{n+1}$, on voit que $u(\xi+x', \tau+t')$ ne s'annulle pas et conserve le signe de A dans l'intervalle suffisamment petit où l'on fait varier x'.

Lorsque $m=2n+1$, $Y, Y_1 \ldots Y_n$ ont toutes le signe de A, quand x' est positive, et le signe contraire, quand x' est négative; d'où l'on conclut d'abord que la fonction $u(\xi+x',\ \tau+t')$ change de signe dans le petit intervalle où l'on fait varier x'. Mais elle ne peut s'évanouir qu'une seule fois dans cet intervalle, parce que $\frac{du}{dx'}$ ne s'y annulle pas. En effet, $\frac{du}{dx'}$ étant exprimée par la formule (36), on trouve que $\frac{dY}{dx'}$, $\frac{dY_1}{dx'}, \ldots \frac{dY_n}{dx'}$ ont constamment le signe de A et que $\frac{dY_n}{dx'} = \left(\frac{k}{g}\right)^n . A$ pour $x'=0$.

XXII.

Considérons maintenant la fonction $u(\xi+x',\ \tau-t')$. En changeant dans les formules qui précèdent t' en $-t'$ et faisant encore

$$x' = z\sqrt{\left(\frac{kt'}{g}\right)},$$

on trouvera, si m est pair et $=2n$,

$$u(\xi+x',\quad \tau-t') = \left(\frac{kt'}{g}\right)^n . A.(P+\varepsilon), \qquad (37)$$

P désignant le polynome (38)

$$\frac{z^{2n}}{1.2.3\ldots 2n} - \frac{z^{2n-2}}{1.2.3\ldots(2n-2)\times 1} + \frac{z^{n-4}}{1.2.3\ldots(2n-4)\times 1.2}$$
$$\ldots\ldots \mp \frac{z^2}{1.2\times 1.2\ldots(n-1)} \pm \frac{1}{1.2.3\ldots n}$$

Si m est pair et $=2n+1$, on obtiendra

$$u(\xi+x',\quad \tau-t') = \sqrt{\left(\frac{kt'}{g}\right)^{2n+1}} . A(P+\varepsilon) \qquad (39)$$

en posant (40)

$$P = \frac{z^{2n+1}}{1.2.3\ldots(2n+1)} - \frac{z^{2n-1}}{1.2.3\ldots(2n-1)\times 1} + \frac{z^{2n-3}}{1.2.3\ldots(2n-3)\times 1.2}$$
$$\ldots\ldots \pm \frac{z}{1\times 1.2.3\ldots n}$$

la quantité ε remplit les mêmes conditions que dans le numéro précédent.

Nous allons montrer que le polynome P (39) ou (40) s'évanouit en changeant de signe pour autant de valeurs de z qu'il y a d'unités dans son degré m qui est $2n$ ou $2n+1$.

Il est à remarquer d'abord que quel que soit le degré m pair ou impair de ce polynome, ses fonctions dérivées $\frac{dP}{dz}$, $\frac{d^2P}{dz^2}$, etc., peuvent se déduire de P en y remplaçant successivement m par $m-1$, $m-2$, etc.

Si l'on divise P par $\frac{dP}{dz}$, on trouve la partie entière du quotient égale à $\frac{1}{m}z$ et le reste égal à $-\frac{2}{m}\cdot\frac{d^2P}{dz^2}$, de sorte qu'on a identiquement

$$mP = z\frac{dP}{dz} - 2\frac{d^2P}{dz^2}. \qquad (41)$$

En différentiant cette équation par rapport à z, on en conclura

$$\left.\begin{array}{l}(m-1)\dfrac{dP}{dz} = z\dfrac{d^2P}{dz^2} - 2\dfrac{d^3P}{dz^3}\\ (m-2)\dfrac{d^2P}{dz^2} = z\dfrac{d^3P}{dz^3} - 2\dfrac{d^4P}{dz^4}\\ \text{etc.}\end{array}\right\} \quad (41).$$

Enfin l'on a

$$\frac{d^mP}{dz^m} = +1.$$

On peut aussi déduire ces équations de la première

$$mP = z\frac{dP}{dz} - 2\frac{d^2P}{dz^2}$$

sans la différentier, puisque cette équation a lieu, quel que soit le degré m, et que si dans l'expression de P on change successivement m en $m-1$, $m-2$, etc., P se change en $\frac{dP}{dz}$, $\frac{d^2P}{dz^2}\ldots$, comme on l'a observé tout à l'heure.

Les fonctions P, $\frac{dP}{dz}$, $\frac{d^2P}{dz^2}$, $\frac{d^3P}{dz^3}, \ldots \frac{d^mP}{dz^m}$ étant liées entre elles par les équations (41), deux fonctions consécutives de cette suite ne peuvent pas s'évanouir pour une même valeur de z; car ces équations (41) font voir qu'une valeur de z qui annullerait deux fonctions consécutives réduirait aussi à zéro toutes les autres jusqu'à $\frac{d^mP}{dz^m}$ inclusivement, ce qui ne peut être, puisque $\frac{d^m P}{dz^m}$ est égale à $+1$. Il suit de là que l'équation $P = 0$ n'a pas de racines égales.

De plus, les équations (41) montrent que pour toute valeur de z qui annulle l'une quelconque des fonctions dérivées $\frac{dP}{dz}$, $\frac{d^2P}{dz^2}$, etc., les deux fonctions adjacentes ont des valeurs de signes contraires : on en conclut d'après un théorème connu que l'équation $P = 0$ a ses m racines à la fois réelles et inégales. On peut tirer la même conclusion du théorème de Fourier et aussi de celui que j'ai donné pour la résolution des équations numériques, en ayant égard, dans leur application, aux relations (41).

Le polynome P s'évanouit donc et change de signe pour des valeurs finies de z en nombre égal à son degré m; l'une de ces racines est zéro quand m est impair, les autres racines sont deux à deux égales et de signes contraires, quel que soit m. Toutes ces racines sont comprises entre $-m$ et $+m$, car en faisant $z = m$ ou $> m$, on voit que chaque terme positif de P surpasse le terme négatif qui le suit immédiatement.

Puisque P change de signe m fois, on peut donner à z, $m+1$ valeurs (entre $-m$ et $+m$), pour lesquelles P aura des valeurs alternativement positives et négatives, qui d'ailleurs surpasseront les valeurs correspondantes de ε, attendu qu'on peut rendre ε moindre que toute quantité donnée, en prenant t' et x' suffisamment petites.

Il résulte de là que la fonction $u(\xi + x', \tau - t')$ exprimée par l'une des formules (37), (39) change de signe au moins autant de fois que P, c'est-à-dire m fois, tandis que x' croît depuis $-a$ jusqu'à $+b$.

Je dis de plus que cette fonction ne peut s'évanouir plus de m fois dans cet intervalle. En effet, si elle s'évanouissait $m+1$ fois, sa dérivée première $\frac{du}{dx'}(\xi + x', \tau - t')$ changerait de signe au moins m fois dans cet intervalle, donc sa dérivée seconde $\frac{d^2u}{dx'^2}$ changerait de signe au moins $m-1$ fois, puis $\frac{d^3u}{dx'^3}$ en changerait au moins $m-2$ fois, et ainsi de suite; de sorte qu'enfin $\frac{d^mu}{dx'^m}(\xi + x', \tau - t')$ changerait de signe au moins une fois dans le même intervalle. Or c'est ce qui ne peut arriver, si l'on prend cet intervalle suffisamment petit, aussi bien que t'; car en diminuant t', $\frac{d^m u}{dx'^m}(\xi + x', \tau - t')$ diffère aussi peu qu'on veut de $\frac{d^m u}{dx'^m}(\xi + x', \tau)$ pour une même valeur de x', et cette dernière fonction ne s'annulle pas et conserve le signe de A dans l'intervalle dont il s'agit, si on le prend suffisamment petit.

Les m valeurs consécutives de z ou de x' qui annulent..... $u(\xi + x', t - t')$, en comprennent d'autres qui annulent $\frac{du}{dx'}$, ainsi $\frac{du}{dx'}$ doit s'évanouir $m - 1$ fois, ni plus ni moins, tandis que x' croit depuis $-a$ jusqu'à $+b$, on en conclut que $\frac{du}{dx'}$ ne peut pas être nulle en même temps que u, et que u n'a point de valeurs *minima* dans cet intervalle.

En résumé, si la fonction u et plusieurs de ses dérivées successives $\frac{du}{dx}$, $\frac{d^2u}{dx^2}$ jusqu'à $\frac{d^{m-1}u}{dx^{m-1}}$ sont nulles pour $t = \tau$ et $x = \xi$, en prenant la quantité positive t' assez petite et faisant varier x dans un intervalle suffisamment petit renfermant la valeur ξ, la fonction $u(x, \tau + t')$ ne s'évanouira pas dans ce petit intervalle, si m est pair, et s'y évanouira une seule fois en changeant de signe si m est impair; mais la fonction $u(x, \tau - t')$ s'évanouira et changera de signe précisément m fois dans le même intervalle, quel que soit m, la dérivée $\frac{du}{dx'}$ ne s'évanouira pas en même temps que u.

Il en sera de même pour chacune des valeurs de x, telles que ξ comprises entre x et X, qui annulleront la fonction $u(x, \tau)$.

Les petits intervalles qui renfermeront ces différentes valeurs de x et qui jouiront des propriétés précédentes seront séparés les uns des autres, ou de l'une des extrémités de la barre par d'autres intervalles plus ou moins grands, dans lesquels la fonction $u(x, \tau)$ ne s'annullera pas; dans ces derniers, les fonctions $u(x, \tau - t')$ et $u(x, \tau + t')$ ne s'annulleront pas non plus, si t' est suffisamment petite, puisqu'alors elles diffèrent aussi peu qu'on veut de $u(x, \tau)$, qui n'est pas nulle.

XXIII.

Nous avons supposé jusqu'ici que la fonction $u(x, \tau)$ n'était nulle ni pour $x = \mathrm{x}$ ni pour $x = \mathrm{X}$. Examinons maintenant le cas où elle serait nulle à l'une de ces limites.

Si $u(x; \tau)$ est nulle pour $x = \mathrm{x}$, $\frac{du}{dx}(\mathrm{x}, \tau)$ est nulle en même temps, à cause de l'équation $k\frac{du}{dx} - hu = 0$ qui a lieu pour $x = \mathrm{x}$, quel que soit t. Si $\frac{d^2u}{dx^2}$ n'est pas nulle aussi, on a déjà vu au n° XX, qu'en faisant croître x depuis x jusqu'à une valeur un peu plus grande que x, la fonction $u(x, \tau + t')$ ne s'évanouit pas et a le même signe que $\frac{d^2u}{dx^2}(\mathrm{x}, \tau)$ et que $u(x, \tau - t')$ s'évanouit en changeant de signe une seule fois dans ce petit intervalle, sa dérivée $\frac{du}{dx}(x, \tau - t')$ ne pouvant pas y être nulle.

Mais il peut arriver que plusieurs dérivées consécutives $\frac{du}{dx}, \frac{d^2u}{dx^2}, \ldots$ jusqu'à $\frac{d^{m-1}u}{dx^{m-1}}$ soient nulles en même temps que u pour $x = \mathrm{x}$ et $t = \tau$. On va voir qu'alors la première dérivée $\frac{d^mu}{dx^m}$ qui n'est pas nulle est d'un ordre pair.

Faisons $t = \tau + t'$ et $x = \mathrm{x} + x'$, et désignons, comme précédemment par Y_n ce que devient la fonction $\frac{d^nu}{dt^n}$ ou $\frac{d^nu}{dt'^n}$ quand on fait $t = \tau$ ou $t' = 0$. On a vu n° XXI que cette fonction Y_n est nulle pour $x' = 0$, si $2n$ est $< m$. En outre, on a en général, quel que soit n, pourvu que $m - 2n$ soit positif,

$$\frac{d^{m-2n}\mathrm{Y}_n}{dx'^{m-2n}} = \left(\frac{k}{g}\right)^n.\mathrm{A} \quad \text{pour } x' = 0,$$

A étant la valeur de $\frac{d^mu}{dx^m}$ pour $x' = 0$, qui est par hypothèse différente de zéro

Donc, si l'on suppose le nombre m impair et $= 2n + 1$, on aura

$$Y_n = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dY_n}{dx'} = \left(\frac{k}{g}\right)^n . A \quad \text{pour } x' = 0.$$

Ainsi $Y_n = 0$ sera nulle pour $x' = 0$ et $\frac{dY_n}{dx'}$ ne le sera pas. Or, au contraire, il résulte de l'équation $k\frac{du}{dx} - hu = 0$ qui a lieu pour $x = \mathrm{x}$, quel que soit t, que Y_n ne peut pas être nulle sans que $\frac{d}{dx}$ le soit en même temps. En effet, cette équation revient à la suivante

$$k\frac{du}{dx'} - hu = 0 \quad \text{pour} \quad x' = 0,$$

qui différentiée n fois, par rapport à t', donne

$$k\frac{d\left(\frac{d^n u}{dt'^n}\right)}{dx'} - h\frac{dt'^n}{d^n u} = 0 \quad \text{pour} \quad x' = 0.$$

t' étant quelconque.

En faisant dans cette dernière $t' = 0$, on aura donc

$$k\frac{dY_n}{dx'} - hY_n = 0 \quad \text{pour} \quad x' = 0.$$

On ne peut donc pas avoir en même temps $Y_n = 0$ et $\frac{dY_n}{dx'} = \left(\frac{k}{g}\right)^n A$, ce qui résulterait de l'hypothèse de $m = 2n + 1$.

Ainsi m ne peut être qu'un nombre pair $2n$; alors Y_n est égale à $\left(\frac{k}{g}\right)^n A$ pour $x' = 0$.

Cela posé, on conclut de ce qui a été démontré dans les n^{os} XXI et XXII, qu'en prenant la quantité positive t' suffisamment petite et faisant croître x depuis la limite x jusqu'à une valeur un peu plus grande que x, la fonction $u(x, \tau + t')$ ne s'évanouira pas et que $u(x, \tau - t')$ s'évanouira n fois en changeant de signe. Au-delà de ce petit intervalle, ces deux fonctions ne s'évanouiront pas, jusqu'à ce que x en croissant atteigne un autre petit intervalle comprenant la valeur ξ la plus voisine de x qui annulle $u(x, \tau)$.

On arriverait à une conclusion semblable, si u et plusieurs de ses dérivées successives $\frac{du}{dx}$, $\frac{d^2u}{dx^2}$.... étaient nulles à la fois pour $t=\tau$ et $x=\mathrm{X}$.

XXIV.

De tout ce qui précède, résulte l'énoncé suivant :

Concevons que t croisse par degrés insensibles, à partir d'une valeur quelconque. Aussi long-temps que pour des valeurs croissantes de t, la fonction $u(x, t)$ et sa dérivée $\frac{du}{dx}$ ne s'évanouiront pas simultanément pour quelque valeur de x comprise entre les limites x et X, et que $u(x, t)$ ne deviendra pas nulle à l'une de ces limites, cette fonction $u(x, t)$ s'évanouira toujours le même nombre de fois entre ces limites, en changeant de signe chaque fois. Quand t dépassera une valeur τ telle que $u(x, \tau)$ et quelques-unes de ses dérivées successives $\frac{du}{dx}$, $\frac{d^2u}{dx^2}$,... jusqu'à $\frac{d^{m-1}u}{dx^{m-1}}$ deviendront nulles à la fois pour une valeur ξ de x comprise entre x et X, la fonction $u(x, t)$ perdra, si m est pair, un nombre m de changements de signe ou de valeurs nulles qu'elle possédait avant que t atteignît cette valeur τ et qui répondaient à des valeurs de x très voisines de ξ; mais si m est impair, elle en perdra $m-1$, de sorte qu'elle ne s'évanouira plus qu'une seule fois en changeant de signe près de la valeur ξ, et $\frac{du}{dx}$ ne sera pas nulle en même temps. Il en sera de même pour toute autre valeur de x comprise entre x et X qui annullera à la fois $u(x, \tau)$ et quelques-unes de ses dérivées $\frac{du}{dx}$, $\frac{d^2u}{dx^2}$. ...

Quand u deviendra nulle pour $t=\tau$ à l'une des limites x, X, $\frac{du}{dx}$ s'évanouira en même temps, et s'il arrive que d'autres dérivées successives $\frac{d^2u}{dx^2}$, $\frac{d^3u}{dx^3}$,... s'annullent aussi, la première qui ne s'évanouira pas sera d'un ordre pair $2n$. Alors un peu avant que t atteigne la valeur τ, u s'évanouit en changeant de signe n fois près de la limite pour laquelle $u(x, \tau)$ est nulle, et quand t croît au-delà de τ, u cesse de s'évanouir en cet endroit.

Si t continue à croître, le nombre des valeurs nulles ou des changements de signe de $u(x, t)$ diminuera toujours de la même manière, chaque fois que u deviendra nulle à l'une des limites x, X, ou que u et quelques-unes de ses dérivées consécutives s'évanouiront simultanément entre ces limites.

Il est aisé de voir, en modifiant légèrement l'analyse précédente, que la fonction $u(x, t)$ jouirait encore des mêmes propriétés, lors même que g, k, l dans l'équation (1) seraient des fonctions des deux variables x et t, et que h et H dans les équations (2) et (3) seraient aussi des fonctions de t, toutes ces fonctions étant assujetties à la condition d'être constamment positives.

Si l'équation (2) se réduisait à $u = 0$ pour $x = \mathrm{x}$, on aurait encore les mêmes propositions, en ne tenant compte que des autres valeurs de x plus grandes que x qui annulleraient la fonction u.

De même, on n'aura pas égard dans l'énoncé à la valeur X, si l'équation (3) se réduit à $u = 0$ pour $x = \mathrm{X}$.

Dans tout ce qui précède, la variable t peut être négative aussi bien que positive, en supposant u égale à une fonction arbitraire de x pour $t = 0$, ou pour une valeur donnée de t.

Ces propositions pourraient ne plus subsister, si quelques-unes des quantités que nous avons considérées dans notre analyse pouvaient devenir infinies pour certaines valeurs de x qui annulleraient la fonction $u(x, t)$.

XXV.

On satisfait aux trois équations (1), (2) et (3), en posant

$$u = \mathrm{C}_i \mathrm{V}_i e^{-\rho_i t} + \mathrm{C}_{i+1} \mathrm{V}_{i+1} e^{-\rho_{i+1} t} + \ldots + \mathrm{C}_p \mathrm{V}_p e^{-\rho_p t}. \quad (42)$$

C_i, $\mathrm{C}_{i+1}, \ldots \mathrm{C}_p$ étant des constantes arbitraires.

Cette fonction u (42) jouit donc des propriétés qui viennent d'être énoncées. Il est aisé de voir combien de fois elle s'évanouit, quand on donne à t de très grandes valeurs positives ou négatives. Si l'on donne à t une valeur positive très grande, u devient sensiblement proportionnelle à son premier terme $\mathrm{C}_i \mathrm{V}_i e^{-\rho_i t}$, quand V_i n'est pas nulle, car les rapports des autres termes à celui-ci sont d'autant plus petits que la valeur de t est plus grande, comme on le voit en écrivant cette fonction de la manière suivante :

$$u = e^{-\rho_i t}[C_i V_i + C_{i+1} V_{i+1} e^{-(\rho_{i+1}-\rho_i)t} + \ldots C_p V_p e^{-(\rho_p-\rho_i)t}].$$

Or, la fonction V_i s'évanouit et change de signe $i-1$ fois entre les limites x et X sans que la dérivée $\frac{dV_i}{dx}$ s'annulle en même temps. Donc, t ayant une valeur positive très grande ou infinie, u doit aussi s'évanouir et changer de signe $i-1$ fois entre x et X pour des valeurs de x très peu différentes de celles qui annullent V_i et $\frac{du}{dx}$ ne s'annullera pas en même temps que u. Cette proposition peut être établie plus rigoureusement comme il suit:

Soit ξ l'une des valeurs de x entre x et X pour lesquelles V_i s'annulle. Comme $\frac{dV_i}{dx}$ n'est jamais nulle en même temps que V_i, on peut donner à x une valeur a plus petite que ξ et une valeur b plus grande que ξ telles que pour toutes les valeurs de x comprises entre a et b, $\frac{dV_i}{dx}$ ait constamment le même signe qu'elle a pour $x=\xi$. Alors V_i croîtra ou décroîtra continuellement dans cet intervalle et n'y deviendra nulle que pour $x=\xi$. Or, on a

$$\frac{du}{dx} = e^{-\rho_i t}\left(C_i \frac{dV_i}{dx} + C_{i+1} \frac{dV_{i+1}}{dx} e^{-(\rho_{i+1}-\rho_i)t} + \text{etc.}\right),$$

et le terme $C_i \frac{dV_i}{dx}$ qui n'est pas nul dans l'intervalle de a à b surpasse la somme de tous les termes suivants qui deviennent plus petits que toute quantité donnée, quand on donne à t une valeur positive suffisamment grande.

Donc, $\frac{du}{dx}$ a dans le même intervalle le signe constant de $C_i \frac{dV_i}{dx}$.

Mais pour $x=a$ comme pour $x=b$, u a le même signe que le terme $C_i V_i$ qui n'est pas nul et qui surpasse la somme de tous les termes suivants, quand la valeur de t est suffisamment grande. Donc u a comme V_i deux valeurs de signes contraires pour $x=a$ et pour $x=b$, et puisque $\frac{du}{dx}$ ne change pas de signe entre a et b, on voit que u s'évanouit et change de signe une seule fois dans cet intervalle.

De même u s'évanouit une seule fois dans chacun des petits intervalles semblables qui comprennent les autres valeurs de x pour lesquelles V_i est nulle. Hors de ces intervalles, V_i n'étant pas nulle, u ne le sera pas et aura le même signe que C_iV_i, pourvu que la valeur de t soit assez grande pour que ce terme qui n'est pas nul surpasse la somme de tous les autres.

On verra de même qu'en donnant à t une valeur négative très grande, u s'évanouira et changera de signe $p-1$ fois pour des valeurs de x comprises entre x et X très peu différentes de celles qui annullent la fonction V_p, $\frac{du}{dx}$ ne s'annullera pas en même temps que u.

Si l'on fait $t=0$, u devient

$$Y = C_iV_i + C_{i+1}V_{i+1} + \ldots + C_pV_p.$$

Cette fonction Y *doit changer de signe entre les limites* x *et* X *au moins* $i-1$ *fois*. En effet, d'après les numéros précédents, lorsque t croît depuis 0 jusqu'à $+\infty$, le nombre des changements de signe de la fonction $u(x, t)$ entre les limites x et X ne peut que diminuer ou rester le même; donc ce nombre, étant $i-1$ quand $t=+\infty$, doit être supérieur ou au moins égal à $i-1$ quand $t=0$. Ainsi Y change de signe au moins $i-1$ fois pour $i-1$ valeurs de x différentes comprises entre x et X; il peut arriver d'ailleurs que quelqu'une de ces $i-1$ valeurs annulle un nombre pair de dérivées consécutives $\frac{dY}{dx}$, $\frac{d^2Y}{dx^2}$,... en même temps que Y. En outre Y peut encore s'évanouir sans changer de signe pour d'autres valeurs de x comprises entre x et X et aussi être nulle à ces deux limites ou à l'une d'elles. Nous supposons ici qu'aucune des équations (2), (3) ne se réduit à $V=0$ pour $x=$ x ou $x=$ X.

On voit de même que le nombre des valeurs de x, depuis x jusqu'à X, qui annullent la fonction Y, ne peut surpasser $p-1$, en comptant x ou X parmi ces valeurs, si Y est nulle à l'une de ces limites. En effet, quand $t=-\infty$, u s'évanouit et change de signe $p-1$ fois pour $p-1$ valeurs de x comprises entre x et X infiniment peu différentes de celles qui annullent V_p: et quand t croît depuis $-\infty$ jusqu'à o, le nombre des valeurs nulles de $u(x, t)$ correspondantes à des valeurs de x comprises entre x et X, ou même égales à ces limites, ne peut que diminuer ou rester le même. Donc ce nombre est au plus $p - 1$ pour $u(x, 0)$ ou Y.

On peut même prouver que le nombre des valeurs différentes de x qui annullent Y doit être plus petit que $p - 1$, si x ou X est l'une de ces valeurs ou si parmi celles qui sont comprises entre x et X il s'en trouve qui annullent à la fois Y et $\frac{dY}{dx}$ ou Y et plusieurs dérivées consécutives $\frac{dY}{dx}$, $\frac{d^2Y}{dx^2} \ldots$

En effet, supposons que la valeur ξ comprise entre x et X annulle à la fois Y et les dérivées $\frac{dY}{dx}, \frac{d^2Y}{dx^2} \ldots$ jusqu'à $\frac{d^{m-1}Y}{dx^{m-1}}$ inclusivement. Si l'on donne à t une valeur négative très petite $-t'$, on vient de voir que la fonction $u(x, -t')$ s'évanouira pour un nombre de valeurs de x au plus égal à $p - 1$, en comprenant parmi ces valeurs x ou X, si elle est nulle à l'une de ces limites. Or à la valeur ξ qui annulle Y ou $u(x, 0)$ et ses dérivées, jusqu'à celle de l'ordre $m - 1$, correspondent m valeurs de x très peu différentes de ξ qui annullent $u(x, -t')$, comme on l'a prouvé dans les numéros précédents. Ainsi quand t passe de $-t'$ à o, m valeurs qui annullent $u(x, -t')$ deviennent toutes à la fois égales à la valeur ξ qui annulle Y. D'ailleurs à chacune des autres valeurs de x qui annullent Y correspond toujours au moins une valeur qui annulle $u(x, -t')$ différente des m valeurs très voisines de ξ, dont il vient d'être question. Donc le nombre total des racines x de l'équation $u(x, -t') = 0$ depuis x jusqu'à X, étant au plus $p - 1$, on voit que *le nombre des racines x de l'équation* $Y = 0$, *depuis* x *jusqu'à* X, *est aussi au plus* $p - 1$, *en comptant chaque valeur de x telle que ξ comprise entre* x *et* X *qui annulle à la fois* Y *et quelques-unes de ses dérivées consécutives* $\frac{dY}{dx}, \frac{d^2Y}{dx^2}, \ldots$ *pour autant de racines égales entre elles qu'il y a d'unités dans l'ordre de la première dérivée que cette valeur ξ n'annulle pas.* Quand aux autres valeurs de x qui annullent Y sans annuller en même temps $\frac{dY}{dx}$, ce sont les ra-

cines simples de l'équation $Y = 0$; chacune d'elles ne doit être comptée qu'une seule fois.

Le degré de multiplicité d'une racine de l'équation $Y = 0$, tel que nous venons de le définir, a, comme on voit, la même expression que dans les équations algébriques ordinaires, puisqu'il est égal au nombre des fonctions consécutives $Y, \frac{dY}{dx}, \frac{d^2Y}{dx^2}, \ldots$ que cette racine annulle à la fois.

Cette définition des racines égales de l'équation $Y = 0$ ne convient toutefois qu'aux valeurs de $x > \mathrm{x}$ et $< \mathrm{X}$. En supposant que l'équation (2) ne se réduise pas à $V = 0$ pour $x = \mathrm{x}$, si l'on a $Y = 0$ pour $x = \mathrm{x}$, on a vu que cette valeur de x doit annuller en même temps $\frac{dY}{dx}$ ou un nombre impair de dérivées $\frac{dY}{dx}$, $\frac{d^2Y}{dx^2}, \ldots$ La première de ces dérivées, qui n'est pas nulle pour $x = \mathrm{x}$ étant alors d'un ordre pair $2n$, je dis *que le nombre des racines x de l'équation* $Y = 0$ *sera encore au plus égal à* $p - 1$, *en comptant la racine* x *pour* n *racines égales entre elles;* de sorte que le degré de multiplicité de cette racine x n'est que la moitié de l'ordre $2n$ de la première dérivée qui n'est pas nulle pour $x = \mathrm{x}$. La raison en est qu'à cette valeur x qui annulle Y ou $u(x, 0)$ correspondent n valeurs un peu plus grandes que x qui annullent $u(x, -t')$; et comme le nombre total des valeurs de x qui annullent $u(x, -t')$ est au plus $p - 1$, il s'ensuit que le nombre des racines x de l'équation $Y = 0$ sera toujours au plus égal à $p - 1$, en comptant la valeur x pour n racines égales entre elles.

En supposant que l'équation (3) ne se réduise pas à $V = 0$ pour $x = \mathrm{X}$, si l'on a $Y = 0$ pour $x = \mathrm{X}$, on estimera de la même manière le degré de multiplicité de la racine X.

En admettant ces conventions, le nombre des racines x de l'équation $Y = 0$, x variant depuis x jusqu'à X, ne surpassera jamais $p - 1$.

Si l'équation (2) $k\frac{dV}{dx} - hV = 0$ pour $x = \mathrm{x}$ se réduisait à $V = 0$ pour $x = \mathrm{x}$, on aurait aussi $Y = 0$ pour $x = \mathrm{x}$ et en général

$u(x, t) = 0$ pour $x = \mathrm{x}$. Il est aisé de voir que, dans ce cas, notre théorème subsisterait toujours en ne comptant pas la valeur x parmi les racines de l'équation $\mathrm{Y} = 0$, mais en comptant X pour une racine simple ou pour plusieurs racines égales, comme on l'a expliqué plus haut, si l'on a $\mathrm{Y} = 0$ pour $x = \mathrm{X}$, et si l'équation (3) ne se réduit pas à $\mathrm{V} = 0$ pour $x = \mathrm{X}$.

De même, si l'équation (3) est $\mathrm{V}=0$ pour $x=\mathrm{X}$, et que l'équation (2) ne soit pas $\mathrm{V} = 0$ pour $x = \mathrm{x}$, le théorème aura lieu en ne comptant pas la racine X, mais en comptant x quand on aura $\mathrm{Y} = 0$ pour $x = \mathrm{x}$.

Enfin, si les deux équations (2) et (3) se réduisent à la fois à $\mathrm{V} = 0$ pour $x = \mathrm{x}$ et $x = \mathrm{X}$, auquel cas on a aussi $\mathrm{Y} = 0$ pour $x = \mathrm{x}$ et $x = \mathrm{X}$, le même théorème aura lieu en faisant abstraction des deux racines x et X; parce que V_i s'annulle encore $p - 1$ fois entre ces limites.

XXVI.

M. Liouville a démontré directement le théorème du numéro précédent (dans le cahier d'août de son journal) sans employer la considération de la variable auxiliaire t qui entre dans la fonction u (42) dont j'ai fait usage. Il n'a pas tenu compte toutefois de la racine x ou X lorsqu'elle existe. Je vais donner ici une autre démonstration directe du même théorème, indépendante de celui du n° XXIV.

Soit

$$\mathrm{Y} = \mathrm{C}_i\mathrm{V}_i + \mathrm{C}_{i+1}\mathrm{V}_{i+1} + \ldots + \mathrm{C}_p\mathrm{V}_p. \qquad (43)$$

On a

$$\frac{d.\left(k\frac{d\mathrm{V}_i}{dx}\right)}{dx} + (g\rho_i - l)\mathrm{V}_i = 0,$$

$$\frac{d\left(k\frac{d\mathrm{V}_{i+1}}{dx}\right)}{dx} + (g\rho_{i+1} - l)\mathrm{V}_{i+1} = 0,$$

etc.

En multipliant ces équations par C_i, $\mathrm{C}_{i+1} \ldots \mathrm{C}_p$, ajoutant et posant

$$\mathrm{Y}_1 = -(\mathrm{C}_i\rho_i\mathrm{V}_i + \mathrm{C}_{i+1}\rho_{i+1}\mathrm{V}_{i+1} + \ldots + \mathrm{C}_p\rho_p\mathrm{V}_p),$$

on aura

$$gY_1 = \frac{d\left(k\frac{dY}{dx}\right)}{dx} - lY,$$

ou

$$gY_1 = k\frac{d^2Y}{dx^2} + \frac{dk}{dx}\cdot\frac{dY}{dx} - lY. \qquad (44)$$

On voit par l'expression même de la fonction Y(43) qu'elle satisfait aux deux équations

$$k\frac{dY}{dx} - hY = 0 \text{ pour } x = \text{x},$$
$$k\frac{dY}{dx} + HY = 0 \text{ pour } x = X,$$

puisque chacun de ses termes satisfait séparément aux deux équations (2) et (3).

Je vais prouver que si l'équation $Y = 0$ a un certain nombre μ de racines x tant égales qu'inégales, plus grandes que x et plus petites que X, les racines égales étant définies comme dans le numéro précédent, l'équation $Y_1 = 0$ aura au moins μ racines tant égales qu'inégales, comprises entre les mêmes limites x et X.

Soit ξ une valeur de $x >$ x et $<$ X pour laquelle Y s'annulle et change de signe. Supposons que cette valeur ξ ne soit ni la plus petite ni la plus grande de celles qui annullent Y. Il y aura entre ξ et la valeur de x immédiatement inférieure à ξ qui annulle Y au moins une valeur a qui rendra Y *maximum*, et pour laquelle $\frac{dY}{dx}$ sera nulle, et $\frac{d^2Y}{dx^2}$ aura une signe contraire à celui de Y ou sera nulle. L'équation (44) fait voir que pour $x = a$, et pour les valeurs de x un peu plus grandes que a, la fonction Y_1 sera différente de zéro et aura le même signe que $\frac{d^2Y}{dx^2}$ ou un signe contraire à celui de la valeur *maximum* de Y dont il s'agit (quand même la fonction l serait nulle pour $x = a$ ou nulle identiquement). De même entre ξ et la valeur de x immédiatement supérieure à ξ qui annulle Y, il y aura au moins une valeur b qui rendra Y *maximum* et pour laquelle

$\frac{dY}{dx}$ sera nulle et $\frac{d^2Y}{dx^2}$ aura un signe contraire à celui de Y ou sera nulle. D'après l'équation (44) Y_1 aura encore pour $x=b$ un signe contraire à celui de cette valeur *maximum* de Y. Mais les deux valeurs *maxima* de Y pour $x=a$ et $x=b$, sont de signes contraires, puique par hypothèse Y change de signe en s'évanouissant pour $x=\xi$. Donc Y_1 a deux valeurs de signes contraires pour $x=a$ et $x=b$, et par conséquent Y_1 change de signe au moins une fois, tandis que x croît depuis a jusqu'à b.

Cette conclusion subsiste, quand la valeur de x immédiatement inférieure ou supérieure à ξ qui annulle Y est x ou X.

Si ξ est la plus petite racine de l'équation $Y=0$, Y n'étant pas alors nulle pour $x=\mathrm{x}$, il existe entre x et ξ au moins une valeur de x qui rend Y *maximum*. Car à cause de l'équation $k\frac{dY}{dx}-hY=0$ qui a lieu pour $x=\mathrm{x}$, Y et $\frac{dY}{dx}$ ont d'abord le même signe pour $x=\mathrm{x}$ et pour les valeurs de x un peu plus grandes que x ; donc, x croissant à partir de x, la fonction Y ne peut pas s'évanouir avant que $\frac{dY}{dx}$ change de signe et prenne un signe contraire à celui de Y. Donc Y doit atteindre une valeur *maximum* avant de s'annuller la première fois pour $x=\xi$. Ce *maximum* pourrait avoir lieu pour $x=\mathrm{x}$, si la constante h était nulle. Entre la valeur de x correspondante à ce *maximum* et celle immédiatement supérieure à ξ qui répond à un autre *maximum* de Y, il y aura au moins une valeur de x pour laquelle Y_1 s'évanouira et changera de signe, puisque d'après l'équation (44), Y_1 a toujours un signe contraire à celui de Y, chaque fois que Y devient *maximum*, et que les deux *maxima* dont il vient d'être question sont de signes contraires.

On verra de même que si ξ est la plus grande valeur de x qui annulle Y, il y a, à cause de l'équation $k\frac{dY}{dx}+HY=0$ pour $x=\mathrm{X}$, au moins une valeur de x comprise entre ξ et X qui rend Y maximum ; elle peut être égale à X, si H est nulle. Pour cette valeur et pour celle immédiatement inférieure à ξ, qui donne un autre maximum de Y, Y_1 a deux valeurs de signes contraires, de sorte que Y_1 change de signe au moins une fois dans cet intervalle.

Si ξ est la seule valeur de x qui annulle Y, cette fonction a encore au moins un maximum dans l'intervalle de x à ξ et un autre dans l'intervalle de ξ à X, d'où il suit que Y_1 change de signe dans l'intervalle compris entre ces deux maxima.

On peut déjà conclure de ce qui précède que Y_1 doit changer de signe au moins autant de fois que Y entre les limites x et X, Y étant ou n'étant pas nulle à chacune de ces limites.

Supposons maintenant que la valeur ξ toujours comprise entre x et X soit une racine multiple de l'ordre m de l'équation $Y=0$, c'est-à-dire qu'elle annulle à la fois les m fonctions consécutives Y, $\frac{dY}{dx}\ldots$ jusqu'à $\frac{d^{m-1}Y}{dx^{m-1}}$. En désignant par A la valeur de $\frac{d^mY}{dx^m}$ pour $x=\xi$ et faisant $x=\xi+x'$, on aura $\frac{d^mY}{dx^m}$ ou $\frac{d^mY}{dx'^m}=\mathrm{A}+\alpha_m$, α_m étant une fonction de x' qui deviendra très petite et nulle en même temps que x'. Puis par une suite d'intégrations, il viendra

$$\frac{d^{m-1}Y}{dx'^{m-1}} \text{ ou } \frac{d^{m-1}Y}{dx^{m-1}}=(\mathrm{A}+\alpha_{m-1})x',\quad \frac{d^{m-2}Y}{dx^{m-2}}=(\mathrm{A}+\alpha_{m-2})\frac{x'^2}{1.2},\ldots$$
$$\ldots\frac{dY}{dx}=(\mathrm{A}+\alpha_{1})\frac{x'^{m-1}}{1.2.3\ldots(m-1)},\quad Y=(\mathrm{A}+\alpha)\frac{x'^m}{1.2.3\ldots m},$$

les quantités $\alpha_{m-1}\ldots\alpha_1$, α étant comme α_m très petites et nulles en même temps que x'.

En mettant les valeurs de Y, $\frac{dY}{dx}$ et $\frac{d^2Y}{dx^2}$ dans l'équation (44), on voit que Y_1 est égale au produit de $\frac{\mathrm{A}x'^{m-2}}{1.2.3\ldots(m-2)}$ par une fonction de x' qui approche d'autant plus d'être égale à $\frac{k}{g}$ que x' est plus petite.

Par conséquent, si ξ est une racine double de $Y=0$, ξ n'est pas racine de $Y_1=0$, ce qu'on voit d'ailleurs immédiatement à l'inspection de l'équation (44). Si m est >2, ξ est racine de l'équation $Y_1=0$, et s'y trouve $m-2$ fois; car en supposant qu'elle s'y trouve un nombre s de fois, c'est-à-dire qu'elle annulle les s fonctions Y_1, $\frac{dY_1}{dx}\ldots\frac{d^{s-1}Y_1}{dx^{s-1}}$; Y_1 est égale au produit de $\frac{x'^s}{1.2.3\ldots s}$ par une fonction de x' qui ne devient pas très petite et nulle en même temps que x'; s est donc $= m - 2$.

L'expression de $Y_{,}$ en fonction de x' fait voir aussi que pour une valeur $\xi + x'$ un peu plus grande que ξ, Y_{1} doit avoir le même signe que $\frac{d^2Y}{dx^2}$ et par conséquent le même signe que Y attendu que pour $x = \xi + x'$ toutes les fonctions $Y, \frac{dY}{dx}, \ldots \frac{d^mY}{dx^m}$ ont le signe de A, x' étant positive et suffisamment petite. Or x croissant au-delà de ξ doit toujours atteindre une valeur (plus petite que X ou égale à X), pour laquelle Y est maximum et $Y_{,}$ a un signe contraire à celui de Y, qui n'a pas changé de signe en passant de zéro à ce maximum. Donc Y_{1} change de signe au moins une fois dans le même intervalle. On verra de même que $Y_{,}$ doit changer de signe au moins une fois dans l'intervalle compris entre la racine ξ et la valeur de x immédiatement inférieure à ξ (supérieure ou égale à x) qui rend Y maximum.

Il est donc prouvé que si l'équation $Y = 0$ a m racines égales à ξ, ξ étant comprise entre x et X, l'équation $Y_{1} = 0$ aura $m - 2$ racines égales à ξ, et en outre deux autres racines pour lesquelles Y_{1} changera de signe, l'une comprise entre ξ et la valeur de x immédiatement supérieure à ξ qui rend Y maximum, l'autre entre ξ et la valeur de x immédiatement inférieure à ξ qui rend Y maximum.

On conclut de ce qui précède, que si l'équation $Y = 0$ a μ racines tant égales qu'inégales comprises entre x et X, l'équation $Y_{1} = 0$ aura aussi au moins μ racines tant égales qu'inégales entre les mêmes limites, et renfermées entre les valeurs de x qui répondent à des valeurs maxima de Y_{1} alternativement positives et négatives. Ce théorème a lieu, comme on voit, en faisant abstraction de la racine x ou X que chacune des équations $Y = 0$, $Y_{1} = 0$ pourrait avoir.

On peut aussi comprendre dans l'énoncé de ce théorème, la racine x ou X que peut avoir $Y = 0$, en la comptant pour autant de racines égales entre elles qu'il y a d'unités dans la moitié du nombre des fonctions consécutives $Y, \frac{dY}{dx}, \frac{d^2Y}{dx^2} \ldots \frac{d^{m-1}Y}{dx^{m-1}}$ qu'elle annulle, ce nombre m étant nécessairement pair.

En effet, si l'on a $Y = 0$ pour $x = $ x, on aura en même temps

$\frac{dY}{dx} = 0$ à cause de l'équation $k\frac{dY}{dx} - hY = 0$ qui a lieu pour $x = \mathrm{x}$. Si $\frac{d^2Y}{dx^2}$ n'est pas nulle en même temps, Y_1 d'après l'équation (44) ne sera pas nulle pour $x = \mathrm{x}$ et aura le signe de $\frac{d^2Y}{dx^2}$. Entre x et la valeur de x immédiatement supérieure à x qui rend Y maximum il y en aura au moins une pour laquelle $Y_{,}$ changera de signe, comme on l'a vu plus haut. Ainsi en comptant x pour une racine simple de $Y = 0$, l'équation $Y_{,} = 0$ a au moins une racine correspondante plus grande que x.

Si la valeur x annulle les m fonctions consécutives Y, $\frac{dY}{dx} \dots \frac{d^{m-1}Y}{dx^{m-1}}$, le nombre m est pair. En effet, si l'on fait $x = \mathrm{x} + \xi'$, la fonction $Y_{,}$ ou $-(C_i\rho_iV_i + C_{i+1}\rho_{i+1}V_{i+1} + \dots + C_p\rho_pV_p)$ sera, d'après ce qu'on a vu plus haut, divisible par x'^{m-2}, c'est-à-dire égale au produit de x'^{m-2} multiplié par une fonction de x' qui ne sera ni nulle ni infinie pour $x' = 0$. Pareillement, si l'on multiplie les différents termes de $Y_{,}$ par ρ_i, ρ_{i+1}, etc., la nouvelle fonction...... $C_i\rho_i^2V_i + \dots + C_p\rho_p^2V_p$ sera divisible par x'^{m-4}, et en continuant ainsi on trouvera que la fonction $C_i\rho_i^nV_i + \dots + C_p\rho_p^nV_p$ est divisible par $x'^{\,m-2n}$.

Donc, si le nombre m est pair et $= 2n$, cette dernière fonction Y_n ne s'évanouira pas pour $x' = 0$. Si l'on suppose m impair et $= 2n + 1$, Y_n sera divisible par x'. Or on a l'équation $k\frac{dY_n}{dx'} - hY_n = 0$ pour $x' = 0$. Donc $\frac{dY_n}{dx'}$ serait nulle pour $x' = 0$ en même temps que Y_n, et il s'ensuivrait que Y_n serait divisible par une puissance de x' supérieure à la première; ce qui est contraire à ce que nous venons de trouver. Il est donc impossible que m soit un nombre impair $2n + 1$.

En supposant $m = 2n$, $Y_{,}$ est divisible par x'^{2n-2} et par conséquent la racine x annulle à la fois les $2n - 2$ fonctions consécutives $Y_{,}$ $\frac{dY_{,}}{dx} \dots \frac{d^{2n-3}Y_{,}}{dx^{2n-3}}$, et d'ailleurs entre x et la valeur de x immédiatement supérieure à x qui rend Y maximum, il y a au moins une racine de $Y_{,} = 0$.

Donc si l'on convient de compter la valeur x qui annulle les $2n$ fonctions $Y\frac{dY}{dx}\ldots\frac{d^{2n-1}Y}{dx^{2n-1}}$ pour n racines égales entre elles de l'équation $Y=0$, l'équation $Y_{1}=0$ aura, selon la même convention, $n-1$ racines égales à x, et de plus une racine comprise entre x et la valeur de x immédiatement supérieure qui rend Y maximum.

Les mêmes observations s'appliquent à l'autre limite X.

Nous avons donc démontré que si l'équation $Y=0$ ou $C_{i}V_{i}+\ldots+C_{p}V_{p}=0$ a un certain nombre μ de racines x tant égales qu'inégales depuis x jusqu'à X, sans exclure ces limites mêmes, l'équation $Y_{i}=0$ ou $C_{i}\rho_{i}V_{i}+\ldots+C_{p}\rho_{p}V_{p}=0$ aura aussi au moins μ racines tant égales qu'inégales, depuis x jusqu'à X, les racines égales étant définies comme nous l'avons dit précédemment.

En conséquence, il y aura aussi *à fortiori* au moins μ racines, soit inégales, soit égales, dans chacune des équations suivantes qui dérivent les unes des autres comme Y_{i} dérive de Y.

$$\begin{aligned}
C_{i}\rho_{i}^{2}V_{i}+\ldots+C_{p}\rho_{p}^{2}V_{p}&=0,\\
C_{i}\rho_{i}^{3}V_{i}+\ldots+C_{p}\rho_{p}^{3}V_{p}&=0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\\
C_{i}\rho_{i}^{n}V_{i}+\ldots+C_{p}\rho_{p}^{n}V_{p}&=0.
\end{aligned}$$

On peut même ajouter, d'après ce qu'on a vu plus haut, que chacune de ces fonctions change de signe entre les limites x et X, au moins autant de fois que la première $C_{i}V_{i}+\ldots+C_{p}V_{p}$, en faisant abstraction de la multiplicité des racines et de celles qui sont égales à x ou à X.

La dernière équation pouvant s'écrire ainsi

$$\left(\frac{C_{i}}{C_{p}}\right)\left(\frac{\rho_{i}}{\rho_{p}}\right)^{n}V_{i}+\left(\frac{C_{i+1}}{C_{p}}\right)\left(\frac{\rho^{i+1}}{\rho_{p}}\right)^{n}V_{i+1}+\ldots+V_{p}=0$$

se réduit à très peu près à $V_{p}=0$ quand on suppose le nombre n très grand ou infini, et alors elle a $p-1$ racines inégales, comprises entre x et X; ce qu'on peut au surplus établir plus rigoureusement par le raisonnement déjà employé au commencement du n° XXIV.

Donc on a $\mu<p-1$ ou au plus égal à $p-1$; ce qu'il fallait démontrer.

On peut prouver par la même méthode que *l'équation*... $C_iV_i + \ldots + C_pV_p = 0$ *a au moins* $i - 1$ *racines différentes comprises entre* x *et* X *et pour lesquelles la fonction* $C_iV_i +$ etc... $+ C_pV_p$ *change de signe.*

En effet, on a vu tout-à-l'heure que la fonction

$$C_i\rho_i^n V_i + \ldots + C_p\rho_p^n V_p$$

a au moins autant de changements de signe entre x et X que

$$C_iV_i + \ldots + C_pV_p.$$

On en conclut, en remplaçant C_i par $\frac{C_i}{\rho_i^n}$, C_{i+1} par $\frac{C_{i+1}}{\rho_{i+1}^n}$, etc. que

$$C_iV + \ldots + C_pV_p$$

a au moins entre x et X autant de changements de signe que la fonction

$$\frac{C_i}{\rho_i^n}V_i + \ldots + \frac{C_p}{\rho_p^n}V_p$$

qui en a $i - 1$ lorsqu'on fait n infini, puisqu'alors elle est proportionnelle à V_i (*).

Les fonctions $Y, Y_1 \ldots Y_n$, dont je viens de m'occuper ne sont autre chose que la fonction u (42) et ses dérivées $\frac{du}{dt} \ldots \frac{d^nu}{dt^n}$ où l'on fait $t = 0$. Au lieu de Y et Y_1, j'aurais pu aussi bien considérer la fonction $u(x, t)$ et sa dérivée $\frac{du}{dt}$ définies par les équations (1), (2), (3), et prouver à l'aide de ces équations, que l'équation $\frac{du}{dt} = 0$, a au moins autant de racines x tant égales qu'inégales depuis x jus-

(*) J'ai admis dans ces derniers n^{os} qu'une fonction Y de la forme $C_iV_i + C_{i+1}V_{i+1} + \ldots + C_pV_p$ ne peut pas être identiquement nulle pour toute valeur de x comprise entre x et X, quand les coefficients $C_iC_{i+1} \ldots C_p$ ne sont pas tous nuls. On reconnaît aisément cette propriété en observant qu'on a $\int_x^X gV_iY\,dx = C_i\int_x^X gV_i^2dx + C_{i+1}\int_x^X gV_iV_{i+1}dx + \ldots + C_p\int_x^X gV_iV_pdx$, ou simplement

$$\int_x^X gV_iY\,dx = C_i\int_x^X gV_i^2dx,$$

d'où il résulte que Y ne peut pas être identiquement nulle.

qu'à X que l'équation $u(x, t) = 0$, d'où j'aurais conclu le théorème relatif à $C_i V_i + \ldots + C_p V_p = 0$.

Ce théorème a lieu, comme on l'a déjà vu dans la démonstration du n° XXIV, quand même la fonction l ne serait pas constamment positive entre les limites x et X. Il est aisé d'étendre à ce cas où l est quelconque, la démonstration que je viens de donner dans ce dernier numéro, en la modifiant de la manière suivante.

Ayant désigné par Y la fonction $C_i V_i + C_{i+1} V_{i+1} + \ldots + C_p V_p$, je prends

$$Y_1 = -[C_i V_i(\rho_i + c) + C_{i+1} V_{i+1}(\rho_{i+1} + c) + \ldots + C_p V_p(\rho_p + c)],$$

c étant une constante arbitraire. J'ai alors au lieu de l'équation (44), la suivante $gY_1 = k\dfrac{d^2Y}{dx^2} + \dfrac{dk}{dx}\dfrac{dY}{dx} - (gc + l)\,Y$.

Au moyen de cette équation, en prenant la constante c positive et assez grande pour que la fonction $gc + l$ reste positive entre les limites x et X, je prouve comme précédemment, que si l'équation $Y = 0$ a μ racines x tant égales qu'inégales depuis x jusqu'à X, sans exclure ces limites mêmes, l'équation $Y_1 = 0$ doit avoir aussi au moins μ racines égales ou inégales depuis x jusqu'à X, ce qui suffit pour établir le théorème en question.

Il faut ajouter ici les remarques qui terminent le n° XXIV (*).

L'équation (44) fait voir d'ailleurs que si Y était constamment nulle, entre les limites x et X, la fonction

$$Y_1 \text{ ou } -(C_i\rho_i V_i + \ldots + C_p\rho_p V_p)$$

serait nulle aussi, et par conséquent la fonction

$$C_i\rho_i^n V_i + \ldots + C_p\rho_p^n V_p,$$

ou celle-ci

$$\left(\frac{C_i}{C_p}\right)\left(\frac{\rho_i}{\rho_p}\right)^n V_i + \ldots + V_p$$

le serait encore, tandis qu'au contraire cette dernière fonction se réduit à V_p quand on fait n infini.

(*) Le défaut d'espace m'oblige à supprimer quelques détails relatifs à la sphère et au cylindre que j'ai annoncés dans l'introduction et auxquels le lecteur peut suppléer aisément.