JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

JOSEPH LIOUVILLE

Mémoire sur un nouvel usage des fonctions elliptiques dans les problèmes de Mécanique céleste

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 1 (1836), p. 445-458.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1836_1_1__445_0>

MÉMOIRE

Sur un nouvel usage des fonctions elliptiques dans les problèmes de mécanique céleste;

PAR JOSEPH LIOUVILLE.

(Présenté à l'Académie le 11 juillet 1836.)

---

1. Pour résoudre le problème difficile des perturbations planétaires, les géomètres ont successivement imaginé diverses méthodes. La plus remarquable est sans doute celle où l'on regarde les constantes arbitraires du mouvement elliptique comme devenues variables sous l'influence des forces perturbatrices, en conservant d'ailleurs entre la longitude, la latitude, le rayon vecteur de la planète troublée et le temps t, toutes les relations algébriques propres au cas où l'on tient compte de la seule action du soleil. On peut trouver à la rigueur dans les ouvrages de Newton l'idée première de cette méthode dont Lagrange est le principal inventeur et que M. Poisson a simplifiée en quelques points. La détermination des inégalités périodiques du mouvement des planètes se trouve ainsi ramenée au développement en série et à l'intégration d'une certaine quantité, nommée R dans la *Mécanique céleste*, ou plutôt des différentielles partielles de cette quantité, prises par rapport aux éléments de la planète troublée.

Dans la théorie des principales planètes, les excentricités $e, e', \ldots$ de ces planètes, et leurs inclinaisons $\lambda, \lambda', \ldots$ sur l'écliptique ont des valeurs très petites. Il est naturel de développer alors la fonction R en série ordonnée suivant les puissances croissantes de e, e', λ, λ', etc., ce qui conduit à une série rapidement convergente. Mais les divers termes de R, dans ce développement, contiennent en dénominateur les puissances successives de la distance moyenne Δ de la planète troublée à la planète perturbatrice, ce qui rend l'intégration impossible sous forme finie. On est donc contraint de développer de nouveau les puissances négatives de Δ en séries de cosinus d'arcs proportionnels au temps t. L'intégration par rapport à cette variable t, s'effectue ensuite immédiatement. La série que l'on obtient en développant ainsi chaque terme de R est peu convergente en elle-même. Euler a observé qu'elle le devient davantage par l'intégration; et, au jugement de d'Alembert, cette simple remarque doit être comptée parmi les plus belles découvertes de ce grand analyste. Toutefois j'ai pensé qu'il serait utile d'éviter ce développement nouveau des divers termes de R, ou du moins de donner une méthode pour calculer avec beaucoup d'approximation le reste qu'on néglige lorsque après l'intégration on prend seulement un certain nombre des termes de la série, les dix premiers par exemple, en omettant tous les autres. J'espère y être parvenu à l'aide des fonctions elliptiques dont mon mémoire va présenter une application curieuse au problème des perturbations. Déjà, dans la solution de ce problème, Legendre avait introduit les fonctions elliptiques définies, c'est-à-dire les fonctions elliptiques dont l'amplitude est égale à une constante. Je montrerai qu'on peut se servir aussi avec avantage des fonctions elliptiques indéfinies dont l'amplitude dépend de la variable t. Mes formules devront surtout être employées, lorsque les moyennes distances de la planète troublée et de la planète perturbatrice au soleil différeront peu l'une de l'autre.

2. Pour faire comprendre en peu de mots le but que je me suis proposé, j'observe qu'en développant R en série ordonnée suivant les puissances ascendantes des excentricités et des inclinaisons, on ramène le calcul des inégalités périodiques du mouvement des planètes à la détermination numérique, pour une valeur quelconque du temps t, d'intégrales de cette forme,

$$\int Q \cos gt dt, \quad \int Q \sin gt dt, \quad \int dt \int Q \cos gt dt, \quad \int dt \int Q \sin gt dt,$$

Q désignant une fonction périodique de t, et g une constante. L'expression de Q est comprise dans la formule

$$Q = \frac{1}{[A + A' \cos (g't + g_{,})]^{\frac{\mu}{2}}},$$

μ étant un nombre entier impair, et A, A′, g', g_1, des constantes : $g't$ représente la différence des moyens mouvements de la planète troublée m et de la planète perturbatrice m'. Si a et a' sont les demi-grands axes des ellipses décrites par m et m', on aura $A = a^2 + a'^2$, $A' = -2aa'$, ou mieux $A' = -2aa'(1-\lambda^2)$, en représentant par λ le sinus de la moitié de l'angle compris entre les plans des deux orbites, et en évitant de développer le terme très petit $2aa'\lambda^2\cos(g't+g_1)$. On simplifiera un peu l'expression de la fonction Q en prenant une unité de temps convenable et telle que l'on ait $g' = 1$; en fixant ensuite l'origine du temps à une époque convenable, on peut rendre la constante g_1 égale à zéro. Cela revient au fond à remplacer le binome $g't + g_1$ par une seule lettre t. On a ainsi

$$Q = \frac{1}{(A + A'\cos t)^{\frac{\mu}{2}}},$$

valeur que nous adopterons désormais. Désignons maintenant par q la partie entière de g et par l le reste positif ou négatif $g - q$, dont la valeur est comprise entre $-\frac{1}{2}$ et $+\frac{1}{2}$: nous aurons $g = q + l$; il en résultera

$$\cos gt = \cos qt \cos lt - \sin qt \sin lt,$$
$$\sin gt = \cos qt \sin lt + \sin qt \cos lt;$$

la détermination des intégrales simples ou doubles de

$$Q\cos gt, \quad Q\sin gt,$$

dépend donc des intégrales des quatre quantités suivantes :

$$Q\cos qt\cos lt, \quad Q\cos qt\sin lt, \quad Q\sin qt\sin lt, \quad Q\sin qt\cos lt.$$

Considérons, par exemple, la première de ces quatre quantités, savoir $Q\cos qt\cos lt$; nous la mettrons sous la forme $P\cos lt$, en posant $P = Q\cos qt$. La fonction P se développe en une série de cosinus d'arcs multiples de t, et les coefficients numériques des divers termes de cette série s'expriment en fonctions elliptiques. Nommons P′ l'ensemble des premiers termes de P, des $(i-1)$ premiers, si l'on veut, et P'' la différence P — P'; on aura

$$\int P\cos lt\,dt = \int P'\cos lt\,dt + \int P''\cos lt\,dt,$$
$$\int dt\int P\cos lt\,dt = \int dt\int P'\cos lt\,dt + \int dt\int P''\cos lt\,dt.$$

On calcule immédiatement les termes $\int P'\cos lt\,dt$, $\int dt\int P'\cos lt\,dt$ qui donnent déjà une valeur approchée des intégrales demandées. Cela posé, lorsque l'on prend le nombre i assez grand, je prouve que les valeurs des restes $\int P''\cos lt\,dt$, $\int dt\int P''\cos lt\,dt$ s'expriment très simplement en quantités finies et en fonctions elliptiques, et cela avec tel degré d'approximation qu'on veut. Les théorèmes auxquels je suis arrivé à ce sujet rendront, ce me semble, à la fois plus exact et plus simple le calcul des intégrales $\int P\cos lt\,dt$, $\int dt\int P\cos lt\,dt$, dans lesquelles $P = Q\cos qt$. Ce que je viens de dire des intégrales.... $\int Q\cos qt\cos lt\,dt$, $\int dt\int Q\cos qt\cos lt\,dt$ peut se dire aussi des intégrales

$$\int Q\cos qt\sin lt\,dt,\quad \int dt\int Q\cos qt\sin lt\,dt,\ \text{etc.}$$

à la détermination desquelles se réduit, comme on l'a vu, le calcul des inégalités périodiques du mouvement des planètes. Dans tous les cas possibles, la marche à suivre est la même. Au reste, on doit s'attendre à trouver ici l'exposé rapide des principes sur lesquels ma méthode repose, et non l'exposition détaillée de ces principes à la théorie des planètes. Le lecteur suppléera sans peine aux détails que j'ai cru devoir supprimer.

5. Soit $P = Q\cos qt$; et considérons les deux intégrales

$$(1)\qquad \varphi(t) = \int P\cos lt\,dt,$$
$$(2)\qquad \psi(t) = \int P\sin lt\,dt,$$

dont il s'agit de déterminer les valeurs numériques. En adoptant cette valeur de P, les intégrales $\int P\sin t\,dt$, $\int P\sin 2t\,dt$,... que nous nommerons P_1, P_2,... s'expriment immédiatement sous forme finie, tandis que les intégrales $\int P_1 dt$, $\int P_2 dt$,... $\int P dt$, $\int P\cos t\,dt$,... s'expriment en fonctions elliptiques et se calculent à l'aide des tables de Legendre On peut développer P en une série de cosinus d'arcs multiples de t : les coefficients numériques de ce développement se transformeront en fonctions elliptiques et seront aisés à calculer comme Legendre l'a fait voir dans son ouvrage. Le développement de P étant opéré, on effectue immédiatement les intégrations indiquées dans les formules (1) et (2), et l'on obtient ainsi les valeurs de $\varphi(t)$, $\psi(t)$ développées en séries. Quand les séries qui expriment $\varphi(t)$, $\psi(t)$ sont très convergentes, on peut s'arrêter là et regarder notre problème comme résolu. Mais nous supposerons ici que cela n'a pas lieu ; et nous chercherons à tenir compte approximativement du reste que l'on néglige en prenant pour valeurs exactes de $\varphi(t)$, $\psi(t)$ les $(i-1)$ premiers termes des séries en question. On pourra, si l'on veut, pour fixer les idées, prendre $i-1=9$ ou $i=10$; mais notre analyse sera exacte pour un nombre i quelconque, pourvu qu'il soit suffisamment grand.

Désignons par P″ la valeur de P dans laquelle on a supprimé les $(i-1)$ premiers termes, et par $P'+P''$ la valeur complète de P : il s'agit, comme on voit, d'estimer approximativement les quantités d'abord négligées

$$X = \int P'' \cos lt dt, \quad Y = \int P'' \sin lt dt.$$

Soit p un nombre entier qui prenne successivement toutes les valeurs comprises depuis $p=i$ jusqu'à $p=\infty$: la fonction P″ aura, d'après ce qui précède, un développement de la forme

$$P'' = \Sigma H \cos pt :$$

cela donne

$$X = \cos lt \Sigma \frac{pH \sin pt}{p^2-l^2} - \sin lt \Sigma \frac{lH \cos pt}{p^2-l^2},$$

$$Y = \sin lt \Sigma \frac{pH \sin pt}{p^2-l^2} + \cos lt \Sigma \frac{lH \cos pt}{p^2-l^2},$$

ou bien

$$\begin{aligned} X &= U \cos lt - V \sin lt, \\ Y &= U \sin lt + V \cos lt, \end{aligned}$$

U et V ayant les valeurs suivantes

$$U = \Sigma \frac{p\mathrm{H} \sin pt}{p^2 - l^2}, \quad V = \Sigma \frac{l\mathrm{H} \cos pt}{p^2 - l^2}.$$

La lettre p désigne successivement tous les nombres entiers i, $i + 1$, $i + 2, \ldots$. Si donc i était un très grand nombre, l^2 étant $< \frac{1}{4}$, on pourrait poser à peu près

$$\frac{p}{p^2 - l^2} = \frac{1}{p}, \quad \frac{l}{p^2 - l^2} = 0 :$$

il en résulterait

$$U = \Sigma \frac{\mathrm{H} \sin pt}{p} = \int_0^t \mathrm{P}'' dt, \quad V = 0,$$

et par suite

$$X = \cos lt \int_0^t \mathrm{P}'' dt, \qquad Y = \sin lt \int_0^t \mathrm{P}'' dt.$$

Les restes négligés dépendraient donc alors de la seule intégrale $\int_0^t \mathrm{P}'' dt$, et celle-ci se réduit aux fonctions elliptiques, en remplaçant P'' par $\mathrm{P} - \mathrm{P}'$.

Les valeurs que nous venons de trouver pour U et V ou pour X et Y ne sont pas en général suffisamment exactes quand on donne à i une valeur peu considérable, telle que $i = 10$. Mais par l'analyse même dont nous venons de faire usage, on en obtiendra de plus approchées. En effet, au lieu de négliger tout-à-fait la quantité $\frac{l}{p^2 - l^2}$ dont le développement, suivant les puissances de p^2, est $\frac{l}{p^2} + \frac{l^3}{p^4} + \ldots$, remplaçons-la par cette autre quantité $\frac{l}{p^2 - 1}$, dont le développement... $\frac{l}{p^2} + \frac{l}{p^4} + \ldots$ a une valeur numérique peu différente lorsque p est grand, puisque le premier terme $\frac{l}{p^2}$ est le même de part et d'autre. L'erreur que l'on commet en posant ainsi

$$\frac{l}{p^2 - l^2} = \frac{l}{p^2 - 1},$$

ne porte que sur des termes divisés par p^4 : aux termes près divisés par p^5, on peut poser de même

$$\frac{p}{p^2 - l^2} = \frac{1 - l^2}{p} + \frac{pl^2}{p^2 - 1} :$$

on conclura de là pour U et V les valeurs que voici :

$$\mathrm{U} = (1 - l^2)\,\Sigma\,\frac{\mathrm{H}\sin pt}{p} + l^2\,\Sigma\,\frac{p\mathrm{H}\sin pt}{p^2 - 1},$$
$$\mathrm{V} = l\Sigma\,\frac{\mathrm{H}\cos pt}{p^2 - 1}.$$

Nous avons déjà observé ci-dessus que la quantité

$$\Sigma\,\frac{\mathrm{H}\sin pt}{p} \quad \text{ou} \quad \int_0^t \mathrm{P}''dt$$

peut s'exprimer par des fonctions elliptiques : on peut réduire de même aux fonctions elliptiques les deux séries

$$\Sigma\,\frac{p\mathrm{H}\sin pt}{p^2 - 1}, \quad \Sigma\,\frac{\mathrm{H}\cos pt}{p^2 - 1},$$

et par suite les valeurs de U, V et de X, Y : c'est ce que nous allons démontrer.

Pour plus de généralité, considérons les deux séries

$$\Sigma\,\frac{p\mathrm{H}\sin pt}{p^2 - p_1^2}, \quad \Sigma\,\frac{\mathrm{H}\cos pt}{p^2 - p_1^2},$$

dans lesquelles p_1 représente un nombre entier déterminé et < 1. Quand on a $p_1 = 1$, ces nouvelles séries coïncident avec celles dont nous avons à nous occuper.

On a, comme il est aisé de le vérifier,

$$\int_0^t P''\cos p_1 t dt = \cos p_1 t\,\Sigma\frac{pH\sin pt}{p^2-p_1^2} - p_1\sin p_1 t\,\Sigma\frac{H\cos pt}{p^2-p_1^2},$$
$$\int_0^t P''\sin p_1 t dt = C + \sin p_1 t\,\Sigma\frac{pH\sin pt}{p^2-p_1^2} + p_1\cos p_1 t\,\Sigma\frac{H\cos pt}{p^2-p_1^2},$$

C désignant une constante choisie convenablement et que nous déterminerons tout à l'heure. En résolvant ces équations par rapport aux quantités

$$\Sigma\frac{pH\sin pt}{p^2-p_1^2},\quad \Sigma\frac{H\cos pt}{p^2-p_1^2},$$

il vient

$$\Sigma\frac{pH\sin pt}{p^2-p_1^2} = \cos p_1 t\int_0^t P''\cos p_1 t dt - \sin p_1 t\left(C - \int_0^t P''\sin p_1 t dt\right),$$
$$\Sigma\frac{H\cos pt}{p^2-p_1^2} = -\frac{\sin p_1 t}{p_1}\int_0^t P''\cos p_1 t dt - \frac{\cos p_1 t}{p_1}\left(C - \int_0^t P''\sin p_1 t dt\right).$$

Mais les intégrales $\int_0^t P''\sin p_1 t dt$, $\int_0^t P''\cos p_1 t dt$ ou $\int_0^t (P-P')\sin p_1 t dt$, $\int_0^t (P-P')\cos p_1 t dt$ s'expriment en termes finis ou se ramenent aux fonctions elliptiques : donc il en est de même des deux séries

$$\Sigma\frac{pH\sin pt}{p^2-p_1^2},\quad \Sigma\frac{H\cos pt}{p^2-p_1^2},$$

et par suite des valeurs approchées de X et Y.

Reste à déterminer la constante C. Pour cela nommons P'', l'intégrale $\int_0^t P''\sin p_1 t dt$ qui s'obtient toujours sous forme finie, et observons que l'intégrale $\int_0^t P''_1 dt$ se ramène aux fonctions elliptiques. Cela posé, multiplions par dt et intégrons entre les limites $t = 0$, $t = \pi$, les deux membres de l'équation

$$P''_1 = C + \sin p_1 t \Sigma \frac{pH \sin pt}{p^2 - p_1^2} + p_1 \cos p_1 t \Sigma \frac{H \cos pt}{p^2 - p_1^2} :$$

puisque p et p_1 sont des nombres entiers inégaux, on a

$$\int_0^\pi \sin p_1 t \sin pt dt = 0, \quad \int_0^\pi \cos p_1 t \cos pt dt = 0.$$

Le second membre de l'équation qu'on intègre se réduira donc à $C\pi$, et l'on obtiendra sur-lec-hamp

$$\int_0^\pi P''_1 dt = C \cdot \pi \quad \text{d'où} \quad C = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi P''_1 dt,$$

ce qui détermine la constante C.

Les formules auxquelles on arriverait en poussant jusqu'au bout le calcul que nous avons seulement indiqué sont, je crois, celles dont on fera le plus souvent usage dans les applications pour réduire en nombres X et Y. Mais en continuant à raisonner, comme nous venons de le faire, on en obtiendra d'autres plus exactes encore.

En effet, puisque p_1 étant un nombre entier quelconque $< i$, les deux séries

$$\Sigma \frac{pH \sin pt}{p^2 - p_1^2}, \quad \Sigma \frac{H \cos pt}{p^2 - p_1^2}$$

s'expriment par des fonctions elliptiques, tout se réduit à ramener à des séries de ce genre-là les valeurs de U et de V : on y parviendra, au moins par approximation, si l'on met les quantités $\frac{p}{p^2 - l^2}$, $\frac{l}{p^2 - l^2}$ sous la forme

$$(\alpha) \begin{cases} \frac{p}{p^2 - l^2} = \frac{G}{p} + \frac{G_1 p}{p^2 - 1} + \frac{G_2 p}{p^2 - 4} + \text{etc.} \\ \frac{l}{p^2 - l^2} = \frac{G'l}{p^2 - 1} + \frac{G''l}{p^2 - 4} + \text{etc.}; \end{cases}$$

et c'est ce qu'on peut toujours faire aux quantités près de lordre $\frac{1}{p^{2n+1}}$, pour la première équation, et aux quantités près de l'ordre $\frac{1}{p^{2n+2}}$, pour la seconde, en désignant par n le nombre des constantes indéterminées

G, G_1,.... ou G', G'',.... qui entrent dans les seconds membres des équations (α) : il suffira, en effet, de développer, dans chacune de ces équations, les deux membres en séries ordonnées suivant les puissances descendantes de p, puis d'égaler de part et d'autre les coefficients des n premières puissances de p. Toutefois, pour que cette méthode réussisse, il faut que le nombre ι, limite inférieure de la variable p qui s'étend depuis $p = i$ jusqu'à $p = \infty$, soit pris suffisamment grand par rapport à n.

Dans ce numéro, nous avons toujours regardé le nombre l comme compris entre $-\frac{1}{2}$ et $+\frac{1}{2}$ et comme différent de zéro. Si par hasard ce nombre l est nul, ce qui peut arriver, on aura $\int P \sin ltdt = 0$ et $\int P \cos ltdt = \int Pdt =$ *une fonction elliptique.*

4. Les méthodes que nous venons d'appliquer à la détermination numérique des intégrales simples

$$\begin{aligned} &(1) \qquad \varphi(t) = \int P \cos ltdt, \\ &(2) \qquad \psi(t) = \int P \sin ltdt, \end{aligned}$$

s'étendent d'elles-mêmes aux intégrales doubles

$$\begin{aligned} &(3) \qquad \varphi_1(t) = \int dt \int P \cos ltdt, \\ &(4) \qquad \psi_1(t) = \int dt \int P \sin ltdt, \end{aligned}$$

dans lesquelles on a, comme ci-dessus, $P = Q \cos qt$. En effet conservons aux deux lettres P', P'' la signification que nous leur avons attribuée dans le numéro précédent, et nous aurons

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= \int dt \int P' \cos ltdt + \int dt \int P'' \cos ltdt, \\ \psi_1(t) &= \int dt \int P' \sin ltdt + \int dt \int P'' \sin ltdt : \end{aligned}$$

les deux quantités $\int dt \int P' \cos ltdt$, $\int dt \int P' \sin ltdt$, dont la détermination n'offre aucune difficulté, fournissent déjà des valeurs approchées de $\varphi_1(t)$, $\psi_1(t)$: tout se réduit donc à calculer approximativement les deux restes

$$X_1 = \int dt \int P'' \cos ltdt, \quad Y_1 = \int dt \int P'' \sin ltdt.$$

Soit $\Sigma\, H \cos pt$ le développement de P'' : il viendra, en effectuant les intégrations indiquées,

$$X_1 = -\cos lt\,\Sigma\,\frac{(l^2+p^2)\,H\cos pt}{(p^2-l^2)^2} - 2\sin lt\,\Sigma\,\frac{lpH\sin pt}{(p^2-l^2)^2},$$
$$Y_1 = -\sin lt\,\Sigma\,\frac{(l^2+p^2)\,H\cos pt}{(p^2-l^2)^2} + 2\cos lt\,\Sigma\,\frac{lpH\sin pt}{(p^2-l^2)^2},$$

ce qui donne

$$X_1 = -U_1\cos lt - 2V_1\sin lt,$$
$$Y_1 = -U_1\sin lt + 2V_1\cos lt,$$

si l'on pose

$$U_1 = \Sigma\,\frac{(l^2+p^2)\,H\cos pt}{(p^2-l^2)^2},$$
$$V_1 = \Sigma\,\frac{lpH\sin pt}{(p^2-l^2)^2}.$$

Rappelons-nous maintenant que si p_1 désigne un nombre entier quelconque $< i$, les deux séries

$$\Sigma\,\frac{H\cos pt}{p^2-p_1^2},\quad \Sigma\,\frac{pH\sin pt}{p^2-p_1^2},$$

s'exprimeront en quantités finies et en fonctions elliptiques : ce théorème a été démontré n° 3. Cela étant, on ramènera aussi les restes U_1, V_1 aux fonctions elliptiques, si l'on parvient à mettre les deux fractions

$$\frac{l^2+p^2}{(p^2-l^2)^2},\quad \frac{lp}{(p^2-l^2)^2},$$

sous la forme

$$\frac{l^2+p^2}{(p^2-l^2)^2} = \frac{G'}{p^2-1} + \frac{G''}{p^2-4} + \text{etc.},$$
$$\frac{lp}{(p^2-l^2)^2} = \frac{G}{p} + \frac{G_1 p}{p^2-1} + \frac{G_2 p}{p^2-4} + \text{etc.};$$

et c'est ce qu'on peut toujours faire, au moins par approximation, en disposant convenablement des constantes $G', G'', \ldots\, G, G_1, G_2, \ldots,$ et en supposant la plus petite valeur de p, savoir i, suffisamment grande.

Lorsque la valeur adoptée pour i est très grande, on peut se contenter de poser

$$\frac{l^2+p^2}{(p^2-l^2)^2}=\frac{1}{p^2-1},\quad \frac{lp}{(p^2-l^2)^2}=0:$$

les termes négligées sont alors respectivement de l'ordre $\frac{1}{p^4}$ et de l'ordre $\frac{1}{p^3}$. Et si l'on ne trouve pas ces expressions assez approchées, on en forme sans peine d'autres plus exactes. La marche à suivre ici est la même que celle indiquée n° 3 pour une recherche toute semblable.

Le cas particulier où l'on a $l=0$ mérite d'être traité à part. Il vient alors

$$X_1=-\Sigma\frac{\mathrm{H}\cos pt}{p^2},\quad Y_1=0:$$

tout se réduit donc à mettre $\frac{1}{p^2}$ sous la forme

$$\frac{1}{p^2}=\frac{G'}{p^2-1}+\frac{G''}{p^2-4}+\text{etc. }:$$

or, aux quantités près de l'ordre $\frac{1}{p^6}$, on a

$$\frac{1}{p^2}=\frac{1}{p^2-1},$$

aux quantités près de l'ordre $\frac{1}{p^6}$, on a

$$\frac{1}{p^2}=\frac{4}{3(p^2-1)}-\frac{1}{3(p^2-4)},$$

et ainsi de suite.

5. Occupons-nous maintenant des deux intégrales simples

$$(5)\qquad \varphi(t)=\int \mathrm{P}\cos ltdt,$$
$$(6)\qquad \psi(t)=\int \mathrm{P}\sin ltdt,$$

dans lesquelles nous supposerons $\mathrm{P}=\mathrm{Q}\sin qt$. En adoptant cette valeur de P, les intégrales $\int \mathrm{P}dt, \int \mathrm{P}\cos tdt, \int \mathrm{P}\cos 2tdt, \ldots$ que nous désignerons par $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3, \ldots$ s'exprimeront sous forme finie tandis que les intégrales $\int \mathrm{P}_1 dt, \int \mathrm{P}_2 dt, \int \mathrm{P}_3 dt, \ldots \int \mathrm{P}\sin tdt$, $\int \mathrm{P}\sin 2tdt, \ldots$ se réduiront à des fonctions elliptiques. La fonction P peut se développer en une série de sinus d'arcs multiples de t : désignons par P' l'ensemble des $(i-1)$ premiers termes de ce développement, et par P'' la différence $P - P'$: nous aurons

$$\varphi(t) = \int P' \cos lt dt + \int P'' \cos lt dt,$$
$$\psi(t) = \int P' \sin lt dt + \int P'' \sin lt dt :$$

les intégrales $\int P' \cos lt dt$, $\int P' \sin lt dt$, que l'on réduit aisément en nombres, fournissent des valeurs approchées de $\varphi(t)$, $\psi(t)$. Pour estimer approximativement les restes

$$X = \int P'' \cos lt dt, \quad Y = \int P'' \sin lt dt,$$

représentons par $\Sigma\, H \sin pt$ le développement de P'' : il viendra

$$X = -\sin lt\, \Sigma \frac{lH \sin pt}{p^2 - l^2} - \cos lt\, \Sigma \frac{pH \cos pt}{p^2 - l^2},$$
$$Y = \cos lt\, \Sigma \frac{lH \sin pt}{p^2 - l^2} - \sin lt\, \Sigma \frac{pH \cos pt}{p^2 - l^2},$$

ce qui donne

$$X = -U \sin lt - V \cos lt,$$
$$Y = U \cos lt - V \sin lt,$$

si l'on pose

$$U = \Sigma \frac{lH \sin pt}{p^2 - l^2}, \quad V = \Sigma \frac{pH \cos pt}{p^2 - l^2}.$$

Lorsque i est un très grand nombre, on a, à très peu près,

$$\frac{l}{p^2 - l^2} = 0, \quad \frac{p}{p^2 - l^2} = \frac{1}{p},$$

et il en résulte

$$U = 0, \quad V = \Sigma \frac{H \cos pt}{p} = C - \int_0^t P'' dt,$$

C étant une constante que l'on déterminera de la manière suivante. L'intégrale $\int_0^t P'' dt$, où l'on peut remplacer P'' par $P - P'$, s'exprime en quantités finies. Nous la représenterons par P''_1, et il est aisé de voir que l'intégrale nouvelle $\int P''_1 dt$ se réduira aux fonctions elliptiques. Or en multipliant par dt et intégrant, entre les limites $t = 0$, $t = \pi$, les deux membres de l'équation

$$\Sigma \frac{H \cos pt}{p} = C - P''_1,$$

le premier membre se réduit à zéro, et l'on en conclut

$$C = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi P''_1 dt :$$

la constante C est donc déterminée.

On aura des valeurs de U et V plus approchées en suivant une marche analogue à celle du n° 3, c'est-à-dire en mettant les fractions $\frac{l}{p^2-l^2}$, $\frac{p}{p^2-l^2}$ sous la forme

$$\frac{l}{p^2-l^2} = \frac{G'}{p^2-1} + \frac{G''}{p^2-4} + \text{etc.},$$
$$\frac{p}{p^2-l^2} = \frac{G}{p} + \frac{G_1 p}{p^2-1} + \frac{G_2 p}{p^2-4} + \text{etc.},$$

et en observant que si p_1 désigne un nombre entier $< i$, les séries

$$\Sigma\frac{H\sin pt}{p^2-p_1^2},\quad \Sigma\frac{pH\cos pt}{p^2-p_1^2},$$

peuvent toujours être sommées à l'aide de fonctions elliptiques, comme le lecteur s'en convaincra sans peine. Lorsque $l = 0$, on a $\psi(t) = 0$, et $\varphi(t)$ s'exprime sous forme finie.

Enfin il n'est pas moins facile d'appliquer des raisonnements semblables aux intégrales doubles

$$\varphi_1(t) = \int dt \int P\cos lt dt,$$
$$\psi_1(t) = \int dt \int P\sin lt dt,$$

P ayant toujours pour valeur Q $\sin qt$: ce qui complète notre travail. Lorsque $l = 0$, la seconde de ces intégrales se réduit à zéro, et la première se ramène aux fonctions elliptiques. Ce cas particulier se présente dans les applications, et il est remarquable par sa simplicité.

La méthode, qui m'a conduit aux résultats consignés dans ce Mémoire, me paraît assez élégante, et l'on peut en tirer parti pour certaines recherches d'analyse pure.