JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

A.-M. FAVRE-ROLLIN

Note sur une Méthode d'élimination pour certaines classes d'équations différentielles linéaires

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 1 (1836), p. 88-92.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1836_1_1__88_0>

NOTE

Sur une Méthode d'élimination pour certaines classes d'équations différentielles linéaires;

Par A.-M. FAVRE-ROLLIN.

I.

Soient deux équations de la forme

$$M\,\frac{d^m y}{dt^m} + N\,\frac{d^n y}{dt^n} + P\,\frac{d^p y}{dt^p} + \text{etc.} = V, \qquad (1)$$

$$M_1\,\frac{d^{m_1} y}{dt^{m_1}} + N_1\,\frac{d^{n_1} y}{dt^{n_1}} + P_1\,\frac{d^{p_1} y}{dt^{p_1}} + \text{etc.} = V_1, \qquad (2)$$

dans lesquelles V et V_1 sont des fonctions quelconques de la variable indépendante t et d'une ou plusieurs autres variables, ainsi que de leurs coefficients différentiels. Si les coefficients $M, N, P, \ldots\ldots$ $M_1, N_1, P_1, \ldots\ldots$ sont constants, il suffira, pour éliminer y et ses différentielles, d'écrire à la place de y, V_1 dans le premier membre de l'équation (1), et V dans le premier membre de l'équation (2), et d'égaler les résultats, en sorte que l'équation finale sera

$$M\,\frac{d^m V_1}{dt^m} + N\,\frac{d^n V_1}{dt^n} + P\,\frac{d^p V_1}{dt^p} + \text{etc.} = M_1\,\frac{d^{m_1} V}{dt^{m_1}} + N_1\,\frac{d^{n_1} V}{dt^{n_1}} + P_1\,\frac{d^{p_1} V}{dt^{p_1}} + \text{etc.}$$

En effet, si l'on différentie séparément m_1 fois, n_1 fois, p_1 fois, etc., l'équation (1), il viendra

$$(a)\qquad M\frac{d^{m+m_1}y}{dt^{m+m_1}}+N\frac{d^{n+m_1}y}{dt^{n+m_1}}+P\frac{d^{p+m_1}y}{dt^{p+m_1}}+\text{etc.}=\frac{d^{m_1}V}{dt^{m_1}},$$

$$(b)\qquad M\frac{d^{m+n_1}y}{dt^{m+n_1}}+N\frac{d^{n+n_1}y}{dt^{n+n_1}}+P\frac{d^{p+n_1}y}{dt^{p+n_1}}+\text{etc.}=\frac{d^{n_1}V}{dt^{m_1}},$$

$$(c)\qquad M\frac{d^{m+p_1}y}{dt^{m+p_1}}+N\frac{d^{n+p_1}y}{dt^{n+p_1}}+P\frac{d^{p+p_1}y}{dt^{p+p_1}}+\text{etc.}=\frac{d^{p_1}V}{dt^{p_1}},$$

etc.

Je multiplie l'équation (a) par M_1, l'équation (b) par N_1, l'équation (c) par P_1, etc., et j'ajoute ensuite membre à membre toutes ces équations: en écrivant les uns à la suite des autres tous les termes contenus dans la même colonne verticale et observant que la somme des termes de chacune de ces colonnes peut se mettre sous la forme

$$M\frac{d^m}{dt^m}\left(M_1\frac{d^{m_1}y}{dt^{m_1}}+N_1\frac{d^{n_1}y}{dt^{n_1}}+P_1\frac{d^{p_1}y}{dt^{p_1}}+\text{etc.}\right),$$

$$N\frac{d^n}{dt^n}\left(M_1\frac{d^{m_1}y}{dt^{m_1}}+N_1\frac{d^{n_1}y}{dt^{n_1}}+P_1\frac{d^{p_1}y}{dt^{p_1}}+\text{etc.}\right),$$

$$P\frac{d^p}{dt^p}\left(M_1\frac{d^{m_1}y}{dt^{m_1}}+N_1\frac{d^{n_1}y}{dt^{n_1}}+P_1\frac{d^{p_1}y}{dt^{p_1}}\right),$$

etc.,

ou bien

$$M\frac{d^mV_1}{dt^m},\quad N\frac{d^nV_1}{dt^n},\quad P\frac{d^pV_1}{dt^p},\ \text{etc.},$$

on aura donc

$$M\frac{d^mV_1}{dt^m}+N\frac{d^nV_1}{dt^n}+P\frac{d^pV_1}{dt^p}+\text{etc.}=M_1\frac{d^{m_1}V}{dt^{m_1}}+N_1\frac{d^{n_1}V}{dt^{n_1}}+P_1\frac{d^{p_1}V}{dt^{p_1}}+\text{etc.},$$

comme on l'avait annoncé.

II.

Si les deux équations proposées sont linéaires en x et y, et ne contiennent que ces deux variables et la variable indépendante t, on pourra former à volonté par le moyen précédent l'équation finale en y ou en x, et, chose remarquable, ces deux équations finales différeront seulement par le terme fonction de t qui ne contiendra que cette dernière variable. On peut vérifier cette proposition sur l'exemple suivant, et il serait facile de la démontrer en général.

Soient les deux équations

$$M\frac{d^m y}{dt^m} + N\frac{d^n y}{dt^n} = T - P\frac{d^p x}{dt^p} - Q\frac{d^q x}{dt^q},$$
$$M_1\frac{d^{m_1} y}{dt^{m_1}} + N_1\frac{d^{n_1} y}{dt^{n_1}} = T_1 - P_1\frac{d^{p_1} x}{dt^{p_1}} - Q_1\frac{d^{q_1} x}{dt^{q_1}}.$$

En éliminant successivement x et y, on peut remplacer ces équations par les suivantes

$$\left(M\frac{d^m}{dt^m} + N\frac{d^n}{dt^n}\right)\left(T_1 - P_1\frac{d^{p_1} x}{dt^{p_1}} - Q_1\frac{d^{q_1} x}{dt^{q_1}}\right)$$
$$= \left(M_1\frac{d^{m_1}}{dt^{m_1}} + N_1\frac{d^{n_1}}{dt^{n_1}}\right)\left(T - P\frac{d^p x}{dt^p} - Q\frac{d^q x}{dt^q}\right),$$
$$\left(P\frac{d^p}{dt^p} + Q\frac{d^q}{dt^q}\right)\left(T_1 - M_1\frac{d^{m_1} y}{dt^{m_1}} - N_1\frac{d^{n_1} y}{dt^{n_1}}\right)$$
$$= \left(P_1\frac{d^{p_1}}{dt^{p_1}} + Q_1\frac{d^{q_1}}{dt^{q_1}}\right)\left(T - M\frac{d^m y}{dt^m} - N\frac{d^n y}{dt^n}\right).$$

Celles-ci développées donnent

$$(A)\quad\left\{\begin{aligned} &PM_1\frac{d^{p+m_1} x}{dt^{p+m_1}} + QM_1\frac{d^{q+m_1} x}{dt^{q+m_1}} + PN_1\frac{d^{p+n_1} x}{dt^{p+n_1}} + QN_1\frac{d^{q+n_1} x}{dt^{q+n_1}} \\ &-\left(MP_1\frac{d^{m+p_1} x}{dt^{m+p_1}} + MQ_1\frac{d^{m+q_1} x}{dt^{m+q_1}} + NP_1\frac{d^{n+p_1} x}{dt^{n+p_1}} + NQ_1\frac{d^{n+q_1} x}{dt^{n+q_1}}\right) \\ &= M_1\frac{d^{m_1} T}{dt^{m_1}} + N_1\frac{d^{n_1} T}{dt^{n_1}} - \left(M\frac{d^m T_1}{dt^m} + N\frac{d^n T_1}{dt^n}\right), \end{aligned}\right.$$

$$(B)\quad\left\{\begin{aligned} &PM_1\frac{d^{p+m_1} y}{dt^{p+m_1}} + QM_1\frac{d^{q+m_1} y}{dt^{q+m_1}} + PN_1\frac{d^{p+n_1} y}{dt^{p+n_1}} + QN_1\frac{d^{q+n_1} y}{dt^{q+n_1}} \\ &-\left(MP_1\frac{d^{m+p_1} y}{dt^{m+p_1}} + MQ_1\frac{d^{m+q_1} y}{dt^{m+q_1}} + NP_1\frac{d^{n+p_1} y}{dt^{n+p_1}} + NQ_1\frac{d^{n+q_1} y}{dt^{n+q_1}}\right) \\ &= P_1\frac{d^p T}{dt^p} + Q\frac{d^q T_1}{dt^q} - \left(P_1\frac{d^{p_1} T}{dt^{p_1}} + Q_1\frac{d^{q_1} T}{dt^{q_1}}\right); \end{aligned}\right.$$

égalités qui ne diffèrent que par les termes fonctions de t seulement, et pour lesquelles par conséquent, dans le cas des équations différentielles à indices entiers et positifs, sera applicable la même formule générale d'intégration, en sorte que les valeurs de x et de y seront de la forme

$$x = C_1\, e^{\mu_1 t} + C_2\, e^{\mu_2 t} + C_3\, e^{\mu_3 t} + \text{etc.},$$
$$y = C'_1\, e^{\mu_1 t} + C'_2\, e^{\mu_2 t} + C'_3\, e^{\mu_3 t} + \text{etc.};$$

C_1, C_2, etc., étant des fonctions de t que l'on saura déterminer par les méthodes connues, dans chaque cas particulier, et les quantités μ_1, μ_2, μ_3, etc., étant déterminées par l'équation commune

$$PM_1\mu^{p+m_1} + QM_1\mu^{q+m_1} + \text{etc.} = 0.$$

III.

Si l'on a m équations entre $m+1$ variables, à coefficients constants pour toutes ces variables moins une qui sera la variable indépendante, il suffira, pour éliminer l'une d'elles, d'ordonner le premier membre de chaque équation par rapport à ses coefficients différentiels, après avoir fait passer tous les autres termes dans le second membre. On comparera ensuite l'une quelconque de ces équations avec les $m-1$ autres. On formera ainsi $m-1$ couples d'équations entre lesquelles on éliminera la variable en question, comme il a été dit ci-dessus, et l'on n'aura plus que $m-1$ équations entre m variables. En continuant de la même manière, on arrivera à une équation entre deux variables seulement. On conçoit qu'il sera dès lors facile, par ce procédé, de remplacer les m équations proposées par m autres équations dans chacune desquelles entreront seulement la variable indépendante et l'une des autres variables qu'il s'agit de déterminer.

IV.

D'après ce qui précède on peut conclure *a priori* l'ordre de l'équation finale. Si, par exemple, on a m équations du premier ordre, le procédé indiqué conduira à $m-1$ équations du second ordre, et de là à $m-2$ équations du troisième ordre, et enfin à $m-(m-1)$, ou une équation du $m^{\text{ième}}$ ordre; et en général si m, n, p, etc., sont les plus forts indices de différentiation pour chaque variable,

$m+n+p+$ etc., sera le nombre indiquant l'ordre de chaque équation finale.

V.

Tout ce qui a été établi ci-dessus l'ayant été indépendamment de toute valeur particulière attribuée aux indices m, n, p, q, etc., sera dès lors vrai, quels qu'ils soient, et conviendra par conséquent au cas des équations différentielles à indices quelconques. On n'aurait pu arriver à ce résultat par les méthodes ordinaires, qui reposent sur la différentiation sous forme finie d'un produit tel que θx de deux variables, ce qu'on ne peut supposer pour des différentielles à indices quelconques. Cette méthode a aussi l'avantage de dispenser du recours à des variables auxiliaires, et n'exige que des opérations fort simples d'addition et de soustraction. Enfin elle pourrait s'appliquer également bien aux équations linéaires à coefficients constants dans le calcul aux différences finies.