JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

COMBES

Mémoire sur une méthode générale d'évaluer le travail dû au frottement, entre les pièces des machines qui se meuvent ensemble, en se pressant mutuellement. - Application aux engrenages cylindriques, coniques, et à la vis sans fin

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 2 (1837), p. 109-129.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1837_1_2__109_0>

MÉMOIRE

SUR

Une méthode générale d'évaluer le travail dû au frottement, entre les pièces des machines qui se meuvent ensemble, en se pressant mutuellement. — Application aux engrenages cylindriques, coniques, et à la vis sans fin;

PAR M. COMBES.

Lorsque deux corps A et B se meuvent, en se pressant mutuellement par des points de leurs surfaces, le travail résistant développé par le frottement, pendant un temps infiniment petit, est égal à l'intensité du frottement multipliée par l'étendue du glissement des deux surfaces l'une sur l'autre, pendant ce même temps. Or l'étendue du glissement ne sera point changée, si l'on ajoute au mouvement effectif des deux corps A et B, un mouvement commun de translation dans une direction quelconque, un mouvement de rotation commun autour d'un axe donné, ou à la fois un mouvement commun de translation et de rotation. Ce mouvement commun ajouté aux mouvements effectifs des deux corps ne changera point en effet leur mouvement relatif, et ne saurait en conséquence altérer l'étendue du glissement.

Cela posé, si l'on connaît d'avance le mouvement de chacun des corps A et B, comme cela a lieu généralement pour les pièces qui entrent dans la composition des machines, on pourra ajouter au mouvement effectif, un mouvement commun de translation et de rotation, égal et directement opposé à celui du corps A. Celui-ci sera ainsi réduit à l'immobilité. Le mouvement du corps B, résultant de son mouvement effectif et du mouvement ajouté, pourra être déterminé, d'après les lois connues de la composition des mouvements de translation et de rotation. Le chemin décrit, pendant un instant infiniment petit, dans ce mouvement composé, par l'élément de la surface de B en contact avec la surface de A, sera aussi déterminé, sans difficulté, dès que le mouvement résultant sera connu : et il est évident que ce chemin sera l'étendue du glissement des deux surfaces l'une sur l'autre, dans le mouvement relatif du corps B par rapport à A considéré comme immobile, et par conséquent aussi l'étendue du glissement, dans le mouvement effectif et simultané des deux corps A et B. C'est par ce chemin qu'il faudra multiplier l'intensité du frottement, pour avoir l'expression du travail résistant élémentaire dû à cette force.

Cette méthode est d'une application facile, générale et sûre, ainsi qu'on pourra le voir par l'application que nous en avons faite au cas de l'engrenage de deux roues d'angle, et d'une vis sans fin avec une roue. Pour l'appliquer, il faut se familiariser avec les lois de la composition des mouvements de rotation. On sait que ces lois sont les mêmes que celles de la composition des forces et des couples de forces, ce qui peut se démontrer par les notions les plus simples de la Géométrie. Voici l'énoncé des théorèmes dont chacun de nos lecteurs pourra facilement trouver la démonstration.

1°. Si un corps est animé de deux mouvements de rotation simultanés, (Pl. I, fig. 1) autour de deux axes AB, AC qui se rencontrent en A, et que des longueurs Aa, Ab respectivement proportionnelles aux vitesses angulaires soient portées sur ces axes, à partir du point A, le mouvement résultant sera un mouvement de rotation autour de l'axe AD, diagonale du parallélogramme construit sur les lignes Aa, Ab, avec une vitesse angulaire proportionnelle à la longueur Ad de cette diagonale.

Les deux axes qui se rencontrent, formant ensemble quatre angles égaux deux à deux, on portera les longueurs Aa et Ab sur les côtés comprenant entre eux un de ces quatre angles, choisi de façon qu'un observateur qui serait placé debout sur le plan des deux axes, et aurait la face tournée vers l'ouverture de cet angle, vît le corps tourner dans le même sens, c'est-à-dire de sa gauche à sa droite, ou de sa droite à sa gauche, autour de chacun d'eux. La rotation du corps autour de la diagonale, dans le mouvement résultant, sera dans le même sens que la rotation autour de chacun des axes primitifs, c'est-à-dire de la gauche à la droite ou de la droite à la gauche de l'observateur.

2°. Si un corps est animé de deux mouvements (Pl. I, fig. 2) simultanés de rotation autour de deux axes parallèles AB, CD, et si ces mouvements sont dans le même sens, le mouvement résultant est une rotation autour d'un axe EF, parallèle à chacun des deux premiers, situé dans le même plan, et partageant la distance IK qui les sépare, en parties IO et KO inversement proportionnelles aux vitesses angulaires autour des axes AB et CD. La vitesse angulaire autour de l'axe EF, dans le mouvement résultant, est égale à la somme des vitesses angulaires autour des axes primitifs AB, CD.

(Pl. I, fig. 3). Si les deux rotations composantes sont de sens contraire, la rotation résultante a lieu autour d'un axe parallèle à chacun des deux axes donnés, situé dans leur plan et qui coupe la ligne IK sur son prolongement au-delà de l'axe, autour duquel la vitesse angulaire est la plus grande : la vitesse angulaire de la rotation résultante est égale à la différence entre les vitesses angulaires des rotations composantes. Elle est dans le même sens que la plus grande de ces vitesses. Enfin les distances IO et OK sont entre elles dans le rapport inverse des vitesses angulaires composantes autour des axes AB, CD.

3°. Si les deux vitesses angulaires autour de deux axes parallèles sont égales et de sens contraire, elles forment alors *un couple de rotations*. Le mouvement résultant est un mouvement de translation, dans une direction perpendiculaire au plan commun des deux axes, avec une vitesse égale au produit de la vitesse angulaire, autour de chacun des axes donnés, par leur distance. Le sens du mouvement de translation est d'ailleurs donné par le sens des rotations composantes. Ainsi, si l'on se représente le plan des deux axes donnés comme horizontal, le mouvement de translation sera vertical ascendant, ou vertical descendant, suivant que la rotation autour de l'un des axes tendra à élever au-dessus du plan, ou à abaisser au-dessous de lui, les points situés sur le second axe.

4°. Une rotation autour d'un axe peut être remplacée par une rotation égale et de même sens autour d'un axe parallèle, et par un couple de rotations, équivalent à une translation dans une direction perpendiculaire au plan des deux axes. Cela permet de composer ensemble deux rotations autour d'axes non situés dans le même plan, ou plus généralement, de composer un nombre quelconque de rotations autour d'axes qui ne se coupent pas, et de les réduire à une rotation autour d'un axe, et à un couple de rotations équivalent à un mouvement de translation.

Il est avantageux pour l'étude des machines de se rendre ces théorèmes familiers; et comme leur démonstration n'exige pas d'autres connaissances que celles de la Géométrie élémentaire, il serait utile de les répandre dans l'enseignement inférieur, et de les placer à la suite des lois de composition des vitesses, ou mouvements de translation. Nous les avons appliqués au calcul du travail résistant développé par le frottement, entre des pièces qui entrent habituellement dans la composition des machines. On pourra comparer cette méthode à celle suivie par les auteurs qui ont traité le même sujet avant nous. Voir (Mémoire sur les engrenages, par MM. Lamé et Clapeyron; *Annales des Mines*, 1re série, tome IX, p. 601. — Mémoire sur l'évaluation du travail dû aux frottements dans les engrenages coniques, par M. Coriolis; *Journal de l'École Polytechnique*, cahier XXV, page 44).

L'évaluation du frottement dans les engrenages cylindriques se trouve aussi dans les leçons lithographiées de M. Navier pour l'École des Ponts et Chaussées, et de M. Poncelet pour l'École de Metz; j'ai également donné, depuis quatre ans, dans mes leçons à l'École des Mines, le frottement dans les engrenages coniques, mais par une méthode moins simple que celle que j'expose dans ce Mémoire.

Frottement dans les engrenages cylindriques.

(Pl. I, fig. 4). Soient C et O les traces des axes des deux roues d'engrenage sur le plan commun des deux roues :

$CA = R$ et $OA = R'$ les rayons des circonférences primitives :

am, *an* les contours de deux dents appartenant la première à la roue (c), la seconde à la roue (o); ces dents, dans la position actuelle des roues, se touchent le long de la génératrice dont la trace sur le plan des roues est en a.

La forme des dents doit être telle que, dans le mouvement du système, les points situés sur les circonférences primitives qui ont pour rayons CA et OA prennent des vitesses égales.

Il suit de là, que si nous désignons par u la vitesse d'un point à la circonférence primitive de l'une et de l'autre roue, la vitesse augulaire de la roue (c) autour de son axe sera $\frac{u}{R}$, et la vitesse angulaire de la roue (o) autour de son axe sera $\frac{u}{R'}$.

Le mouvement relatif des deux roues ne sera point changé si nous imprimons à chacune d'elles un mouvement de rotation autour d'un axe fixe, qui se composera avec le mouvement de rotation qu'elle possède autour de son axe. Or, si nous imprimons aux deux roues un mouvement de rotation autour de l'axe C, avec une vitesse angulaire égale à $\frac{u}{R}$ dirigée en sens contraire du mouvement de rotation de la roue (c) autour de son axe, cette dernière roue sera réduite au repos, et la roue (o) sera animée de deux mouvements de rotation, l'un autour de l'axe C avec une vitesse angulaire égale à $\frac{u}{R}$, et l'autre autour de son axe propre avec une vitesse angulaire égale à $\frac{u}{R'}$. Ces deux mouvements sont de même sens et se composent en un seul. L'axe autour duquel a lieu le mouvement résultant est parallèle aux deux axes C et O et sa trace sur le plan des deux roues est en A, au point de contact des deux circonférences primitives ; car on a

$$CA : OA :: \frac{u}{R'} : \frac{u}{R}.$$

La vitesse angulaire autour de cet axe est égale à la somme $\frac{u}{R} + \frac{u}{R'}$ des vitesses angulaires composantes. On voit que le mouvement relatif de la roue (o) par rapport à la roue (c) regardée comme immobile, est un roulement de la circonférence (o) sur la circonférence (c), sans glissement, puisque l'axe autour duquel tourne la circonférence (o) est toujours au point de contact des deux circonférences.

Il suit de là que la normale commune en a aux deux contours am et an qui se pressent mutuellement, doit passer, pour une position quelconque du système, par le point de contact A des circonférences primitives.

En effet, lorsque la roue (c) est réduite au repos, sans que le mouvement relatif soit altéré, l'élément a de la dent an appartenant à la roue mobile (o) doit glisser sur le contour de la dent am appartenant à la roue fixe (c). Or cet élément a de la dent an décrit alors un arc de cercle infiniment petit dont le centre est en A, et dont le rayon est Aa. Aa doit donc être la normale commune en a aux contours des deux dents en prise, sans quoi elles cesseraient de se toucher, dans le mouvement relatif, et aussi dans le mouvement effectif du système. Nous pouvons en outre, connaissant la vitesse angulaire de la roue mobile (o) autour de l'axe instantané A, déterminer quelle sera l'étendue du glissement de l'élément a de la dent an sur le contour de la dent immobile an. En effet, dans un instant infiniment petit dt, l'élément a décrit un arc de cercle égal à

$$\left(\frac{u}{R} + \frac{u}{R}\right)dt \times Aa = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) Aa \times udt.$$

Or si l'on désigne par ds l'arc infiniment petit de la circonférence mobile (o) qui s'applique pendant l'instant dt sur un arc égal de la circonférence fixe (c), nous aurons $udt = ds$: donc l'étendue du glissement des contours de deux dents en prise, l'une sur l'autre, pour un arc infiniment petit ds parcouru par un point de la circonférence primitive de l'une ou de l'autre roue, est égale à $Aa\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{F'}\right)ds$, expression dans laquelle Aa est le rayon vecteur variable, qui va du point de contact des circonférences primitives au point de contact des deux dents en prise. Si donc nous désignons par p la pression mutuelle des deux contours am et an, par f le rapport du frottement à la pression, par z le rayon vecteur variable Aa, l'expression du travail résistant élémentaire dû au frottement, pour un arc ds dont chacune des circonférences primitives aura tourné, sera

$$fp\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)zds,$$

et l'intégrale

$$f\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)\int_0^S pzds \qquad (a)$$

exprimera le travail résultant du frottement correspondant à l'arc S dont tourne chacune des circonférences primitives, depuis le moment où deux dents commencent à se pousser dans la ligne des centres, jusqu'à ce qu'elles se quittent.

Supposons que la roue (c) conduise la roue (o), et que la résistance agissant sur la roue (o) soit une force Q agissant tangentiellement à la circonférence primitive. Appelons α l'angle aAT, compris entre la normale commune Aa et la tangente commune AT aux deux circonférences primitives, d la distance Ai du point A au point où la tangente commune en a aux dents en prise coupe la ligne des centres OC; nous aurons, pour déterminer la pression p, l'équation suivante :

$$Q \times R' = pR'\cos\alpha + fp(R'-d)\sin\alpha, \qquad (1)$$

qui exprime que la force Q, la pression p et le frottement fp qui résulte de cette pression, se font équilibre autour de l'axe fixe O. $R'-d$ peut être positif, négatif ou nul. Comme l'angle α demeure toujours très petit, quand les dents des roues sont petites, et comme le rapport f est lui-même une petite fraction, on peut généralement négliger le dernier terme du second membre de l'équation précédente, et poser simplement

$$Q \times R' = pR'\cos\alpha, \quad \text{d'où} \quad p = \frac{Q}{\cos\alpha}.$$

Cette valeur de p portée dans l'expression du travail résistant (a) donne

$$fQ\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)\int_0^S \frac{zds}{\cos\alpha}.$$

Si les contours des dents sont de petites portions d'épicycloïdes engendrées par une circonférence de cercle dont nous désignerons le rayon par r, il est facile de voir que l'on aura

$$z = 2r\sin\alpha \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{s}{2r}.$$

Ces valeurs de z et α étant portées dans l'expression précédente, elle devient

$$fQ\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)2r\int_0^S \frac{\sin\frac{s}{2r}\,ds}{\cos\frac{s}{2r}} =$$
$$-fQ\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) \times 4r^2 \log.\cos\frac{S}{2r}.$$

Or, quand S est un petit arc, on peut développer $\log\cos\frac{S}{2r}$ en une série très convergente, et l'on a

$$\log\cos\frac{S}{2r} = -\frac{S^2}{8r^2},$$

en s'en tenant au premier terme de la série, et négligeant la quatrième puissance et les puissances supérieures de $\frac{S}{2r}$.

L'expression du travail résistant dû au frottement devient par la substitution de cette valeur

$$\frac{1}{2}fQ\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)S^2:$$

l'arc parcouru par la circonférence de la roue (o) correspondant à cette quantité de travail étant égal à S, il s'ensuit que le frottement donne lieu au même travail résistant qu'une force égale à $\frac{1}{2}fQ\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)S$, qui serait appliquée tangentiellement à la circonférence primitive de la roue (o). La valeur du frottement rapporté à la circonférence de la roue primitive augmente donc proportionnellement à l'arc S correspondant à une dent de chaque roue. Si m est le nombre de dents de la roue (c), et n le nombre des dents de la roue (o), on a

$$2\pi R = mS, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{1}{R} = \frac{2\pi}{mS},$$
$$2\pi R' = nS, \qquad \qquad \frac{1}{R'} = \frac{2\pi}{nS},$$

et

$$\frac{1}{2} f Q\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) S = \pi f Q\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right).$$

Telle est l'expression dont on fait usage ordinairement, pour représenter la force résistante moyenne résultante du frottement, rapportée à la circonférence de la roue conduite. Elle est généralement trop petite : mais elle approche d'autant plus d'être exacte que les dents sont plus petites.

Dans le cas où les contours des dents seraient engendrés, par un cercle d'un rayon infini, roulant sur l'une et l'autre circonférence, c'est-à-dire où ils deviendraient des développantes de cercle, le point de contact serait constamment situé sur la tangente commune aux deux circonférences primitives. On aurait $\alpha = 0$ et $z = s$: l'expression

$$f Q\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) \int_0^S \frac{z ds}{\cos \alpha}$$

deviendrait

$$f Q\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) \int_0^S s ds = \frac{1}{2} f Q\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) S^2,$$

c'est-à-dire que la valeur donnée précédemment, pour la force résistante équivalente au frottement, serait rigoureusement exacte, dans ce cas, si nous n'avions pas négligé d'abord le second terme du deuxième membre de l'équation (1).

Il est aisé de voir que, dans le cas dont il s'agit, la valeur exacte de la pression p est

$$p = \frac{QR'}{R' - fs}.$$

L'expression de la force équivalente au frottement est donc encore, pour ce cas, un peu trop faible.

Engrenage d'une roue et d'une lanterne.

(Pl. I, fig. 5). Soit O l'axe de la lanterne, c le centre, ou la trace de l'axe de l'un des fuseaux dont nous représenterons le rayon par r, am le contour de la dent qui presse le fuseau. L'élément par lequel se toucheront la dent et le fuseau, doit être normal au rayon vecteur Ac, mené du point A au centre c du fuseau; ainsi cet élément est situé en a. Conservant d'ailleurs les mêmes notations que dans l'article précédent, voyons ce que devient l'intégrale $\int \frac{zds}{\cos \alpha}$.

L'angle α est la moitié de l'angle A0c; la corde.......... $Ac = z + r = 2 \sin \frac{1}{2} AOc \times R'$: on a donc

$$z + r = 2R' \sin \alpha. \qquad (1)$$

Si un arc infiniment petit ds de la circonférence (O) s'applique sur un arc égal de la circonférence (C), le centre c de la lanterne viendra en c', cc' étant l'arc infiniment petit ds, la corde Ac deviendra Ac', et si l'on prolonge l'élément cc' suivant la tangente cb, il est évident que l'on aura $dz = Ac' - Ac = ds \cos Acb = ds \cos \alpha$.

D'où

$$ds = \frac{dz}{\cos \alpha}.$$

On a donc $\int \frac{zds}{\cos \alpha} = \int \frac{zdz}{\cos^2 \alpha}$; et en substituant à $\cos^2 \alpha$ sa valeur $\frac{4R'^2 - (z+r)^2}{4R'^2}$, tirée de l'équation (1), il vient

$$\int \frac{zds}{\cos \alpha} = 4R'^2 \int_0^Z \frac{zdz}{4R'^2 - (z+r)^2}.$$

La valeur de cette intégrale est

$$2R'^2 \left[\log. \frac{4R'^2 - r^2}{4R'^2 - (Z+r)^2} - \frac{r}{R'} \log. \frac{2R' + r + Z}{2R' - r - Z} \times \frac{2R' - r}{2R' + r} \right].$$

Il est permis de négliger le second terme écrit dans la parenthèse, d'une part parce que sa valeur est très petite, quand Z est lui-même petit par rapport à $2R' - r$, et ensuite parce que l'omission de ce terme donnera pour le frottement une valeur un peu trop grande.

L'expression précédente devient alors

$$2R'^2 \log . \frac{4R'^2 - r^2}{4R'^2 - (Z+r)^2}.$$

Pour qu'elle coïncide avec celle obtenue dans le cas des engrenages épicycloïdaux, il faut, en prenant pour la valeur du logarithme, le premier terme de son développement en série, qui est

$$\frac{Z(2r+Z)}{4R'^2 - (r+Z)^2},$$

négliger au dénominateur $(r+Z)^2$ par rapport à $4R'^2$ et poser au numérateur

$$Z(2r+Z) = S^2.$$

On commet ainsi deux erreurs, généralement dans le même sens, qui diminuent l'expression du frottement.

Et l'on a

$$2R'^2 \log \frac{4R'^2 - r^2}{4R'^2 - (Z+r)^2} = \frac{1}{2} S^2.$$

Je ne m'arrêterai pas à discuter l'engrenage d'une roue et d'une crémaillère, qui est un cas particulier de l'engrenage de deux roues planes; je passe à l'engrenage de deux roues non situées dans le même plan, mais dont les axes se rencontrent.

Engrenage de deux roues d'angle.

(Pl. I, fig. 6). Soient MC et MO les deux axes qui se coupent en M:

u la vitesse que prennent dans le mouvement du système, les points situés à la circonférence de l'une et de l'autre roue, R, R' les rayons CA et OA des circonférences primitives :

γ l'angle compris entre les plans des deux roues; cet angle γ peut varier de 0 à 180°; il est nul quand les deux roues sont intérieures l'une à l'autre; il est de 180°, lorsqu'elles sont placées extérieurement l'une à l'autre dans un même plan.

$\frac{u}{R}$, $\frac{u}{R'}$, seront les vitesses angulaires des deux roues autour de leurs axes respectifs.

Si l'on imprime aux deux roues un mouvement de rotation, autour de l'axe MC, avec une vitesse angulaire égale à $\frac{u}{R}$, et en sens contraire du mouvement de la roue (c), celle-ci sera réduite au repos. Le mouvement de la seconde roue sera le mouvement résultant de sa rotation autour de son axe MO et de la rotation autour de MC; portons sur les axes MC et MO deux longueurs Ma et Mb, respectivement proportionnelles aux vitesses angulaires $\frac{u}{R}$, $\frac{u}{R'}$. La diagonale du parallélogramme Maib, construit sur ces lignes, sera suivant l'axe autour duquel aura lieu le mouvement de rotation résultant, et la grandeur de cette diagonale sera égale à la vitesse angulaire dans ce mouvement; or il est clair que la diagonale sera suivant la génératrice MA, le long de laquelle se touchent les deux surfaces coniques, ayant leur sommet commun en M et pour bases les circonférences primitives; en effet les sinus des angles compris entre la diagonale, et les côtés Ma, Mb doivent être entre eux dans le rapport inverse de ces mêmes côtés, c'est-à-dire dans le rapport de $\frac{u}{R'}$ à $\frac{u}{R}$, ou de R à R': or on a $\sin \mathrm{AMC} = \frac{R}{MA}$, $\sin \mathrm{AMO} = \frac{R'}{MA}$: ces sinus étant entre eux comme R est à R', il en résulte que la diagonale du parallélogramme, où l'axe du mouvement de rotation résultant, est suivant MA. La vitesse angulaire autour de cet axe est égale à la longueur Mi de la diagonale, c'est-à-dire à

$$\begin{aligned}
&\sqrt{\overline{Ma}^2 + \overline{Mb}^2 - 2Ma \times Mb \cos iaM} \\
&= \sqrt{\frac{u^2}{R^2} + \frac{u^2}{R'^2} - \frac{2u^2}{RR'}\cos\gamma} \\
&= u\sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{R'^2} - \frac{2\cos\gamma}{RR'}}.
\end{aligned}$$

On voit donc que le mouvement relatif de la roue (o) par rapport à la roue (c), est le même que si le cône ayant son sommet en M et pour base la circonférence OA, roulait, sans glisser, sur le cône ayant même sommet et pour base la circonférence CA.

Il suit de là que si *am* et *an* sont les contours de deux dents en prise (ces dents sont ici des portions de surfaces coniques attachées aux deux roues, et ayant leur sommet en M, lesquelles se touchent le long d'une génératrice; *am* et *an*, représentent dans la figure, les directrices de ces surfaces), la normale commune au point de contact aux deux contours, devra être perpendiculaire à la génératrice MA par laquelle se touchent les cônes ayant pour bases les cercles primitifs des deux roues. Appelant z la longueur de la perpendiculaire abaissée du point a, pris au milieu de la longueur de l'élément de contact, sur MA, l'étendue du glissement de la dent *an* sur la dent *am* sera, pendant un instant dt, égale à

$$u\sqrt{\frac{1}{R^2}+\frac{1}{R'^2}-\frac{2\cos\gamma}{RR'}}\times z\,dt:$$

si ds est l'arc infiniment petit de la circonférence (o), qui s'applique pendant l'instant dt sur un arc égal de la circonférence (c), l'étendue du glissement correspondant à l'arc ds, dont chacune des circonférences a tourné dans le mouvement effectif du système, sera exprimée par

$$\sqrt{\frac{1}{R^2}+\frac{1}{R'^2}-\frac{2\cos\gamma}{RR'}}\,z\,ds;$$

p désignant la pression mutuelle des dents en prise l'une sur l'autre,

$$fp\sqrt{\frac{1}{R^2}+\frac{1}{R'^2}-\frac{2\cos\gamma}{RR'}}\,z\,ds$$

sera le travail résistant élémentaire développé par le frottement, et l'intégrale

$$f\sqrt{\frac{1}{R^2}+\frac{1}{R'^2}-\frac{2\cos\gamma}{RR'}}\int_0^S pz\,ds,$$

sera le travail résistant pour l'arc S parcouru par un point de la circonférence de l'une ou de l'autre roue, depuis le moment où deux dents commencent à se pousser dans le plan des axes des roues, jusqu'à ce qu'elles se quittent.

Soit (Pl. I, fig. 6 *bis*), le point de contact des deux dents, dans le plan moyen de la roue conduite (o). Mo représentant l'axe de cette roue, et MA la génératrice de contact des cônes primitifs, z est la perpendiculaire am abaissée du point a sur MA. Or, quand les dents sont petites, cette ligne am ou z se confond sensiblement avec la ligne Aa, menée du point a au point de contact des circonférences primitives, et contenue dans le plan moyen de la roue (o). En effet, si nous menons la ligne ak, dans le plan de la roue, perpendiculaire au rayon Ao, et si nous joignons les points m et k, la ligne mk sera une perpendiculaire commune aux lignes MA et ak. Appelant α l'angle compris entre la ligne Aa, et la tangente commune AT aux deux circonférences primitives, et δ le demi-angle au centre du cône AMo, nous aurons les relations

$$\overline{am}^2 = z^2 = \overline{ak}^2 + \overline{mk}^2,$$
$$mk = \mathrm{A}k \cos\delta = \mathrm{A}a \sin\alpha \cos\delta,$$
$$ak = \mathrm{A}a \cos\alpha,$$

d'ou

$$z^2 = \overline{\mathrm{A}a}^2 (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha \cos^2\delta),$$

et

$$\cos a\mathrm{A}m = \frac{am}{\mathrm{A}a} = \sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha \cos^2\delta}:$$

dans l'engrenage cylindrique, l'angle $\delta = 0$, $\cos\delta = 1$; et l'on a $z = \mathrm{A}a$, $\cos \mathrm{A}am = 1$; les deux lignes aA et am se confondent.

Dans l'engrenage conique, si les dents sont petites, l'angle α demeurera toujours très petit. Son sinus sera presque nul et son cosinus égal à 1, de sorte que les lignes am et aA seront encore très près de se confondre, et pourront être prises, sans erreur sensible, l'une pour l'autre.

Si nous appelons Q la résistance agissant tangentiellement à la roue conduite (o), la valeur approchée de p, dans l'hypothèse que z se confond avec Aa, sera, comme pour l'engrenage cylindrique, $p = \frac{\mathrm{Q}}{\cos\alpha}$, et l'expression du frottement sera

$$f\mathrm{Q}\sqrt{\frac{1}{\mathrm{R}^2} + \frac{1}{\mathrm{R}'^2} - \frac{2\cos\gamma}{\mathrm{RR}'}} \int_0^{\mathrm{S}} \frac{z\,ds}{\cos\alpha}.$$

Cette expression coïncide avec celle obtenue pour l'engrenage plan de deux roues extérieures l'une à l'autre, lorsque l'on y pose $\gamma = 180^\circ$ et $\cos\gamma = -1$.

Dans le cas où les deux roues sont intérieures l'une à l'autre, on a $\gamma = 0$, $\cos\gamma = 1$, et l'expression précédente devient

$$fQ\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}\right)\int_0^S \frac{zds}{\cos\alpha}.$$

Lorsque les directrices *am* et *an* des portions de surfaces coniques, formant les contours des dents, sont des courbes engendrées par une circonférence de cercle située dans le plan de la roue (o), ce qui donne pour la courbe *an* une épicycloïde plane et pour la courbe *am* une épicycloïde sphérique, on trouvera pour la valeur moyenne du frottement, considéré comme une force appliquée à la circonférence primitive de la roue conduite,

$$\frac{1}{2} fQ\sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{R'^2} - \frac{2\cos\gamma}{RR'}} \times S:$$

m et n étant les nombres de dents des deux roues, on a

$$\frac{1}{R} = \frac{2\pi}{mS}, \quad \frac{1}{R'} = \frac{2\pi}{nS},$$

et l'expression précédente devient

$$\pi fQ\sqrt{\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} - \frac{2\cos\gamma}{mn}}.$$

Pour $\gamma = 180^\circ$, $\cos\gamma = -1$, la résistance du frottement est la plus grande. C'est le cas de l'engrenage de deux roues situées extérieurement dans le même plan.

Pour $\gamma = 0$, $\cos\gamma = 1$, la résistance du frottement est la plus petite. Elle est exprimée par

$$\pi fQ\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right):$$

c'est le cas où les deux roues sont dans le même plan, et situées intérieurement l'une à l'autre.

Frottement dans la vis sans fin.

(Pl. I, fig. 7 et 7 bis). Soient O l'axe de la vis sans fin, que nous supposerons vertical :

C l'axe horizontal de la roue :

CA $=$ R le rayon de la circonférence primitive de la roue (le point de contact du filet de la vis et de la dent pressée par ce filet, est toujours situé sur un point de la tangente AT à cette circonférence, parallèle à l'axe de la vis).

OA $= r$ le rayon du cylindre sur lequel est enveloppée l'hélice ou l'élément héliçoïdal, qui presse les dents de la roue : i l'inclinaison constante de cette hélice sur le plan horizontal.

Le filet serpente sur le noyau de la vis et s'élève en tournant dans le sens xy. Lorsque la vis entière tourne sur son axe dans ce même sens, le filet de la vis presse successivement les dents de la roue de haut en bas et fait tourner celle-ci dans le sens yz. La condition de ce mouvement est que la vitesse d'un point de la circonférence CA, soit à la vitesse d'un point du filet situé sur la circonférence OA comme le pas de la vis est à la circonférence qui a pour rayon OA. Ainsi en désignant par u la vitesse d'un point de la circonférence OA tournant autour de l'axe vertical MO, u tang i sera la vitesse d'un point de la circonférence CA, tournant autour de l'axe C. Les vitesses angulaires de la vis et de la roue, autour de leurs axes, seront donc respectivement égales à $\frac{u}{r}$ et $\frac{u \operatorname{tang} i}{\mathrm{R}}$.

Au mouvement de rotation de la roue autour de l'axe C, nous pouvons substituer un mouvement de rotation autour d'un axe parallèle OY passant par le point O, de même sens et avec même vitesse angulaire, et un couple de rotations équivalent à un mouvement de translation dans le sens vertical, qui sera ici de haut en bas, avec une vitesse égale au produit de la distance CO par la vitesse angulaire $\frac{u \operatorname{tang} i}{\mathrm{R}}$, c'est-à-dire à $(\mathrm{R}+r)\frac{u \operatorname{tang} i}{\mathrm{R}}$.

Si maintenant nous réduisons la vis au repos, en superposant aux mouvements effectifs un mouvement commun de rotation autour de l'axe vertical de la vis, avec une vitesse angulaire égale et de sens contraire à celle $\frac{u}{r}$ que la vis possède, le mouvement de la roue se composera:

1°. Du mouvement de translation de haut en bas, avec une vitesse égale à $(R+r)\frac{u \tang i}{R}$;

2°. D'un mouvement de rotation autour de l'axe horizontal OY avec une vitesse angulaire $\frac{u \tang i}{R}$, et dans lequel le corps tournera de l'axe OZ vers l'axe OX;

3°. D'un mouvement de rotation autour de l'axe vertical OZ avec une vitesse angulaire égale à $\frac{u}{r}$, dans lequel le corps tournera en sens contraire du mouvement effectif de la vis, c'est-à-dire de OY vers OX.

Cela posé, soit a, dans la projection verticale, la situation actuelle du point de contact du filet de la vis et d'une dent de la roue. Ce point est sur la verticale AT et se projette horizontalement en A. Menons la ligne aO, la ligne mn perpendiculaire à aO, contenue dans le plan, passant par l'axe de la vis et perpendiculaire à l'axe de la roue, enfin la tangente AU, projection de la tangente en a à la circonférence que décrirait le point a s'il tournait autour de l'axe MOZ. Posons $a\mathrm{O} = z$, l'angle $a\mathrm{OA} = \alpha$.

La vitesse du point a due à la rotation autour de l'axe oY est dirigée suivant am, et égale à

$$a\mathrm{O} \times \frac{u \tang i}{R} = \frac{u \tang i}{R} \times z.$$

Elle a pour composante horizontale suivant ao'

$$\frac{u \tang i}{R} z \sin \alpha,$$

pour composante verticale dirigée de bas en haut, suivant aT

$$\frac{u \tang i}{R} z \cos \alpha.$$

La vitesse du point a due à la rotation autour de l'axe vertical OZ est égale à $\frac{u}{r} \times ao' = u$. Sa projection horizontale est suivant la tangente AU.

La vitesse verticale du point a de haut en bas due au mouvement de translation est $(R+r)\frac{u \tang i}{R}$. Ainsi, les composantes parallèles aux trois axes OX, OY et OZ de la vitesse du point a sont :

Suivant	OX.......	$u \frac{\tang i}{R} . z \sin \alpha$,
Suivant	OY.......	u
Suivant	OZ.......	$\frac{u}{R} \tang i \ (R+r-z\cos\alpha)$.

Cette dernière composante est dirigée de haut en bas. La vitesse du point a, dans le mouvement relatif du filet de la vis et de la dent de la roue, est donc

$$u\sqrt{1+\frac{\tang^2 i}{R^2}[(R+r)^2+z^2-2(R+r)z\cos\alpha]}.$$

Si ds désigne l'arc infiniment petit que décrit, dans le mouvement effectif du système, pendant un instant dt, un point de la circonférence qui a pour rayon CA, on aura $ds = u \tang i dt$ et

$$\begin{aligned} udt\sqrt{1+\frac{\tang^2 i}{R^2}[(R+r)^2+z^2-2(R+r)z\cos\alpha]} \\ = \frac{1}{\tang i}\sqrt{1+\frac{\tang^2 i}{R^2}[(R+r)^2+z^2-2(R+r)z\cos\alpha)]}ds \end{aligned}$$

sera l'étendue du glissement du point a de la roue sur le filet de la vis correspondant à l'arc infiniment petit ds.

Si nous désignons par p la pression mutuelle du filet de la vis et de la dent de la roue,

$$\int_0^S \frac{fp}{\tang i}\sqrt{1+\frac{\tang^2 i}{R^2}[(R+r)^2+z^2-2(R+r)z\cos\alpha]}ds$$

sera l'expression du travail résistant dû au frottement, pour l'arc S dont tourne la circonférence CA, depuis le moment où le filet de la vis vient appuyer sur une dent de la roue, jusqu'à ce qu'il cesse de la presser, ce qui arrive, quand le point de contact mutuel est sur la ligne CO.

Il est d'ailleurs facile de voir que l'on a

$$z \cos \alpha = r, \quad z^2 = r^2 + s^2,$$

on a, pour déterminer p, l'équation

$$QR = p \cos i \times R, \quad \text{d'où} \quad p = \frac{Q}{\cos i},$$

en désignant par Q la résistance appliquée à la roue rapportée à l'extrémité du rayon CA, et négligeant, dans cette relation, l'effet du frottement, ce qui est permis, lorsque i est un petit angle.

Effectuant ces substitutions et les réductions possibles, le travail du frottement devient

$$f \frac{Q}{\cos i} \int_0^S \sqrt{\frac{1}{\sin^2 i} + \frac{s^2}{R^2}}\, ds.$$

On sait intégrer l'expression précédente, mais le résultat se présente sous une forme trop compliquée, pour être de quelque usage dans la pratique. D'ailleurs on peut remarquer que i est en général un petit angle, et que par conséquent $\frac{1}{\sin^2 i}$ est très grand, tandis que $\frac{s^2}{R^2}$, est une petite fraction, quand la roue a un grand nombre de dents, de telle sorte que $\frac{s^2}{R^2}$ est négligeable par rapport à $\frac{1}{\sin^2 i}$. On peut même, d'après un théorème donné par M. Poncelet, déterminer dans chaque cas la limite de l'erreur commise. Supposons par exemple, que $\sin i$ soit égal à $\frac{1}{3}$; supposons en même temps que le nombre des dents de la roue, soit égal à 20. On aura $20S = 2\pi R$; d'où $\frac{S}{R} = \frac{2\pi}{20} = 0.34$: ainsi le rapport de $\frac{S}{R}$ à $\frac{1}{\sin i}$ sera égal à $\frac{0,34}{3} = 0.11$. Comme S est la plus grande valeur de l'arc variable s, le rapport de $\frac{s}{R}$ à $\frac{1}{\sin i}$ sera constamment inférieur à 0.11; or, d'après le théorème cité de M Poncelet, un radical de la forme $\sqrt{P^2 + Q^2}$ a pour expression linéaire approchée

$$\frac{2}{1+\cos\frac{\varphi}{2}}\left(P\cos\frac{\varphi}{2}+Q\sin\frac{\varphi}{2}\right),$$

φ désignant l'angle dont la tangente est égale à la valeur maximum que puisse avoir le rapport $\frac{Q}{P}$. La limite de l'erreur commise, en substituant l'expression linéaire ci-dessus au radical, est exprimée par le radical multiplié par la fraction $\dfrac{1-\cos\frac{\varphi}{2}}{1+\cos\frac{\varphi}{2}}$.

Posant donc $P=\frac{1}{\sin i}$, $Q=\frac{s}{R}$, $\tang\varphi=0.11$: il vient pour la valeur de $\sqrt{\frac{1}{\sin^2 i}+\frac{s^2}{R^2}}$,

$$0{,}999\times\frac{1}{\sin i}+0{,}055\,\frac{s}{R},$$

et cette valeur est approchée à $\frac{7}{10000}$ près. Substituant au radical la valeur approchée sous le signe $\int$, le travail résistant du frottement sera

$$\frac{fQ}{\cos i}\left(\frac{0.999\,S}{\sin i}+0.055\,\frac{S^2}{2R}\right);$$

la valeur moyenne de la force équivalente au frottement, rapportée à la circonférence primitive de la roue, sera donc

$$\frac{fQ}{\cos i}\left(\frac{0.999}{\sin i}+0{,}055\,\frac{S}{2R}\right).$$

Si m désigne le nombre des dents de la roue, $\frac{S}{2R}=\frac{\pi}{m}$, et cette expression devient

$$\frac{fQ}{\cos}\left(\frac{0.999}{\sin i}+0.055\,\frac{\pi}{m}\right).$$

Si $m=20$, on aura $0.055\,\frac{\pi}{m}=0.0086$, tandis que $\frac{0.999}{\sin i}$ se ra égal à 3, en supposant que $\sin i = \frac{1}{3}$. En négligeant donc $0.055\,\frac{\pi}{m}$ par rapport à $\frac{0.999}{\sin i}$, l'erreur commise sera moins de $\frac{1}{300}$. On voit que, généralement, il sera permis d'adopter pour la valeur moyenne de la force équivalente au frottement, rapportée à la circonférence primitive de la roue,

$$\frac{0{,}999\,fQ}{\sin i \cos i} \text{ ou simplement } \frac{fQ}{\sin i \cos i} = \frac{2fQ}{\sin 2i}.$$

Lorsque l'inclinaison i de l'élément héliçoïdal, qui presse la dent de la roue est considérable, la valeur $p = \frac{Q}{\cos i}$ n'est pas suffisamment approchée. Il faut alors, dans l'équation d'équilibre de la roue, tenir compte de la force produite par le frottement du filet et de la dent, ce qui donne

$$Q \times R = (p \cos i - fp \sin i) R,$$

d'où

$$p = \frac{Q}{\cos i - f \sin i}.$$

Cette valeur de p substituée à $\frac{Q}{\cos i}$, dans les calculs précédents, donnera pour l'expression de la résistance moyenne du frottement rapportée à la circonférence de la roue dont le rayon est R,

$$\frac{fQ}{\cos i - f \sin i}\left(\frac{\alpha}{\sin i} + \frac{T\pi}{m}\right):$$

α et T sont des coefficients numériques que l'on déterminera par le théorème de M. Poncelet.