JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

POISSON

Note de M. Poisson relative au mémoire précédent

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 2 (1837), p. 184-188.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1837_1_2__184_0>

NOTE DE M. POISSON

RELATIVE AU MÉMOIRE PRÉCÉDENT.

La première équation du paragraphe XIV, savoir :

$$(1)\qquad \int_0^b\int_c^b \frac{(y^2-x^2)dydx}{\sqrt{(b^2-x^2)(c^2-x^2)(y^2-b^2)(c^2-y^2)}}=\tfrac{1}{2}\pi,$$

peut se changer en celle-ci,

$$(2)\qquad \int_0^b \frac{dx}{\sqrt{(b^2-x^2)(c^2-x^2)}}\int_b^c \frac{y^2dy}{\sqrt{(y^2-b^2)(c^2-y^2)}}$$
$$-\int_0^b \frac{x^2dx}{\sqrt{(b^2-x^2)(c^2-x^2)}}\int_b^c \frac{dy}{\sqrt{(y^2-b^2)(c^2-y^2)}}=\tfrac{1}{2}\pi$$

Pour la vérifier, je fais d'abord

$$x=b\sin\varphi,\qquad dx=b\cos\varphi d\varphi,\qquad b=ac;$$

les limites relatives à φ, qui répondent à $x=0$ et $x=b$, seront $\varphi=0$ et $\varphi=\frac{1}{2}\pi$; et d'après les notations connues de Legendre, il en résultera

$$\int_0^b \frac{dx}{\sqrt{(b^2-x^2)(c^2-x^2)}}=\frac{1}{c}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-a^2\sin^2\varphi}}=\frac{1}{c}\mathrm{F}_1a,$$

$$\int_0^b \frac{x^2dx}{\sqrt{(b^2-x^2)(c^2-x^2)}}=c\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-a^2\sin^2\varphi}}$$
$$-c\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sqrt{1-a^2\sin^2\varphi}\,d\varphi=c(\mathrm{F}_1a-\mathrm{E}_1a).$$

Je fais ensuite

$$\frac{y^2-b^2}{c^2-y^2}=\cot^2.\theta,\qquad y^2=c^2-(c^2-b^2)\sin^2\theta,$$

$$dy=-\frac{(c^2-b^2)\sin\theta\cos\theta d\theta}{\sqrt{c^2-(c^2-b^2)\sin^2\theta}},\qquad c^2-b^2=c^2\alpha^2,$$

les limites relatives à y, qui répondent à $y=b$ et $y=c$, seront $\theta=\frac{1}{2}\pi$ et $\theta=0$; en les intervertissant et changeant le signe de l'intégrale, on aura

$$\int_b^c \frac{dy}{\sqrt{(y^2-b^2)(c^2-y^2)}}=\frac{1}{c}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\theta}{\sqrt{1-\alpha^2\sin^2\theta}}=\frac{1}{c}\mathrm{F}_{1}\alpha,$$

$$\int_b^c \frac{y^2dy}{\sqrt{(y^2-b^2)(c^2-y^2)}}=c\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sqrt{1-\alpha^2\sin^2\theta}\,d\theta=c\mathrm{E}_{1}\alpha.$$

Au moyen de ces transformations, l'équation (2) devient

$$(3)\qquad \mathrm{F}_{1}a\mathrm{E}_{1}\alpha+\mathrm{F}_{1}\alpha\mathrm{E}_{1}a-\mathrm{F}_{1}a\mathrm{F}_{1}\alpha=\tfrac{1}{2}\pi;$$

et en observant que les modules a et α sont complémentaires, on voit qu'elle coïncide avec une équation trouvée par Legendre (*).

La dernière équation du paragraphe XIV devant subsister pour toutes les valeurs de μ, et ayant lieu évidemment pour $\mu=0$, il suffira de vérifier sa différentielle par rapport à μ, ou, ce qui est la même chose, l'équation

$$\int_0^b\int_b^c \frac{(\mu^2-x^2)(\mu^2-y^2)(y^2-x^2)dydx}{\sqrt{(b^2-x^2)(c^2-x^2)(y^2-b^2)(c^2-y^2)}}=\tfrac{1}{2}\pi\mu^4-\tfrac{1}{3}\pi\mu^2(b^2+c^2)+\tfrac{1}{6}\pi b^2c^2.$$

Elle se décompose en trois autres, savoir :

$$\int_0^b\int_b^c \frac{(y^2-x^2)dydx}{\sqrt{(b^2-x^2)(c^2-x^2)(y^2-b^2)(c^2-y^2)}}=\tfrac{1}{2}\pi,$$

$$\int_0^b\int_b^c \frac{(y^4-x^4)dydx}{\sqrt{(b^2-x^2)(c^2-x^2)(y^2-b^2)(c^2-y^2)}}=\tfrac{1}{3}\pi(b^2+c^2),$$

$$\int_0^b\int_b^c \frac{x^2y^2(y^2-x^2)dydx}{\sqrt{(b^2-x^2)(c^2-x^2)(y^2-b^2)(c^2-y^2)}}=\tfrac{1}{6}\pi b^2c^2.$$

La première est la même que l'équation (1), qu'on vient de vérifier; les deux autres peuvent s'écrire ainsi :

(*) *Traité des fonctions elliptiques*, tome Ier, page 60.

$$(4)\left\{\begin{aligned}&\int_0^b \frac{dx}{\sqrt{(b^2-x^2)(c^2-x^2)}}\int_b^c \frac{y^4dy}{\sqrt{(y^2-b^2)(c^2-y^2)}}\\ &-\int_0^b \frac{x^4dx}{\sqrt{(b^2-x^2)(c^2-x^2)}}\int_0^c \frac{dy}{\sqrt{(y^2-b^2)(c^2-y^2)}}=\tfrac{1}{3}\pi(b^2+c^2),\\ &\int_0^b \frac{x^2dx}{\sqrt{(b^2-x^2)(c^2-x^2)}}\int_b^c \frac{y^4dy}{\sqrt{(y^2-b^2)(c^2-y^2)}}\\ &-\int_0^b \frac{x^4dx}{\sqrt{(b^2-x^2)(c^2-x^2)}}\int_b^c \frac{y^2dy}{\sqrt{(y^2-b^2)(c^2-y^2)}}=\tfrac{1}{6}\pi b^2c^2.\end{aligned}\right.$$

D'après les transformations précédentes, on a

$$\int_0^b \frac{x^4dx}{\sqrt{(b^2-x^2)(c^2-x^2)}}=a^4c^3\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\sin^4\varphi d\varphi}{\sqrt{1-a^2\sin^2\varphi}},$$

$$\int_b^c \frac{y^4dy}{\sqrt{(y^2-b^2)(c^2-y^2)}}=c^3\int_0^{\frac{1}{2}\pi}(1-a^2\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}\,d\theta.$$

En intégrant par parties, et ayant égard aux limites, on a aussi

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi d\varphi}{\sqrt{1-a^2\sin^2\varphi}}=\frac{1}{a^2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)\sqrt{1-a^2\sin^2\varphi}\,d\varphi,$$

et, par conséquent,

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\sin^4\varphi d\varphi}{\sqrt{1-a^2\sin^2\varphi}}&=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\sin^2\varphi d\varphi}{\sqrt{1-a^2\sin^2\varphi}}\\ &\quad-\frac{1}{a^2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{(1-2\sin^2\varphi)(1-a^2\sin^2\varphi)d\varphi}{\sqrt{1-a^2\sin^2\varphi}}\\ &=\frac{2(1+a^2)}{a^2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\sin^2\varphi d\varphi}{\sqrt{1-a^2\sin^2\varphi}}-\frac{1}{a^2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-a^2\sin^2\varphi}}\\ &\quad-2\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\sin^4\varphi d\varphi}{\sqrt{1-a^2\sin^2\varphi}},\end{aligned}$$

d'où l'on déduit

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^4\varphi d\varphi}{\sqrt{1-a^2\sin^2\varphi}} = \frac{2(1+a^2)}{3a^2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^2\varphi d\varphi}{\sqrt{1-a^2\sin^2\varphi}} - \frac{1}{3a^2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-a^2\sin^2\varphi}}$$

$$= \frac{2+a^2}{3a^4}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-a^2\sin^2\varphi}} - \frac{2(1+a^2)}{3a^4}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{1-a^2\sin^2\varphi}\, d\varphi.$$

En même temps, on a

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (1-\alpha^2\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}\, d\theta = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{1-\alpha^2\sin^2\theta}} - 2\alpha^2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^2\theta d\theta}{\sqrt{1-\alpha^2\sin^2\theta}} + \alpha^4\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^4\theta d\theta}{\sqrt{1-\alpha^2\sin^2\theta}},$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^4\theta d\theta}{\sqrt{1-\alpha^2\sin^2\theta}} = \frac{2(1+\alpha^2)}{3\alpha^2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^2\theta d\theta}{\sqrt{1-\alpha^2\sin^2\theta}} - \frac{1}{3\alpha^2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{1-\alpha^2\sin^2\theta}};$$

d'où l'on conclut

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (1-\alpha^2\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}\, d\theta = \frac{3-\alpha^2}{3}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{1-\alpha^2\sin^2\theta}} + \frac{2\alpha^2(\alpha^2-2)}{3}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^2\theta d\theta}{\sqrt{1-\alpha^2\sin^2\theta}}$$

$$= \frac{2(1+\alpha^2)}{3}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{1-\alpha^2\sin^2\theta}\, d\theta - \frac{\alpha^2}{3}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{1-\alpha^2\sin^2\theta}}$$

Cela étant, en employant les notations de Legendre, on aura

$$\int_0^b \frac{x^4dx}{\sqrt{(b^2-x^2)(c^2-x^2)}} = \frac{c^3(2+a^2)}{3}\,\mathrm{F}_1 a - 2\,\frac{c^3(1+a^2)}{3}\,\mathrm{E}_1 a,$$

$$\int_b^c \frac{y^4dy}{\sqrt{(y^2-b^2)(c^2-y^2)}} = \frac{2c^3(1+a^2)}{3}\,\mathrm{E}_1 a - \frac{a^2c^3}{3}\,\mathrm{F}_1 a;$$

et comme on a trouvé précédemment

$$\int_0^b \frac{dx}{\sqrt{(b^2-x^2)(c^2-x^2)}} = \frac{1}{c}\,\mathrm{F}_1 a,$$
$$\int_0^b \frac{x^2 dx}{\sqrt{(b^2-x^2)(c^2-x^2)}} = c(\mathrm{F}_1 a - \mathrm{E}_1 a),$$
$$\int_b^0 \frac{dy}{\sqrt{(y^2-b^2)(c^2-y^2)}} = \frac{1}{c}\,\mathrm{F}_1 \alpha,$$
$$\int_b^0 \frac{y^2 dy}{\sqrt{(y^2-b^2)(c^2-y)^2}} = c\,\mathrm{E}_1 \alpha,$$

les équations (4) deviendront

$$\frac{c^2}{3}(1+a^2)(\mathrm{F}_1 a \mathrm{E}_1 \alpha + \mathrm{F}_1 \alpha \mathrm{E}_1 a - \mathrm{F}_1 a \mathrm{F}_1 \alpha) = \tfrac{1}{3}\pi(b^2+c^2),$$
$$\frac{c^4 a^2}{3}(\mathrm{F}_1 a \mathrm{E}_1 \alpha + \mathrm{F}_1 \alpha \mathrm{E}_1 a - \mathrm{F}_1 a \mathrm{F}_1 \alpha) = \tfrac{1}{6}\pi b^2 c^2;$$

ce qui coïncide, à cause de $b = ac$, avec l'équation (3) citée plus haut.