JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

JOSEPH LIOUVILLE

Solution d'un problème d'analyse

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 2 (1837), p. 1-2.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1837_1_2__1_0>

JOURNAL
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

SOLUTION D'UN PROBLÈME D'ANALYSE ;

PAR JOSEPH LIOUVILLE.

1. Soient x une variable indépendante comprise entre deux limites réelles x, X, et $\varphi(x)$ une fonction de x déterminée, mais inconnue, qui ne devienne jamais infinie lorsque x croît de x à X. Cela posé, le problème que je veux résoudre est le suivant : quelle doit être la valeur de la fonction $\varphi(x)$ pour que l'on ait constamment

$$(1) \qquad \int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{X}} x^n \varphi(x) dx = 0,$$

n étant un quelconque des nombres entiers $0, 1, 2, 3, \ldots$? Je dis que la fonction $\varphi(x)$ qui résout ce problème est identiquement nulle, en sorte que l'on a $\varphi(x)=0$ depuis $x=\mathrm{x}$ jusqu'à $x=\mathrm{X}$. En effet, si la fonction $\varphi(x)$ n'est pas nulle depuis $x=\mathrm{x}$ jusqu'à $x=\mathrm{X}$, il faut que dans cet intervalle elle change de signe un certain nombre de fois, sans quoi les éléments de l'intégrale placée au premier membre de l'équation (1) seraient tous de même signe et ne pourraient avoir zéro pour somme. Supposons donc que la fonction $\varphi(x)$ change de signe m fois, et soient x_1, $x_2, \ldots x_m$, les m valeurs de x pour lesquelles ce changement s'effectue. Faisons.......... $\psi(x)=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_m)$: en développant le produit des facteurs binomes, $\psi(x)$ prendra la forme $x^m+A_1x^{m-1}+\ldots+A_{m-1}x+A_m$. Si donc on fait, dans l'équation (1), successivement $n=m$, $n=m-1,\ldots$ $n=1$, $n=0$, et qu'on ajoute membre à membre les équations ainsi obtenues, après les avoir multipliées par les facteurs respectifs 1, $A_1,\ldots$ A_{m-1}, A_m, on obtiendra

$$(2) \qquad \int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{X}} \psi(x)\varphi(x)\,dx = 0:$$

or l'équation (2) est absurde, puisque les deux fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ changeant de signe en même temps, l'élément $\psi(x)\varphi(x)\,dx$ doit au contraire conserver toujours le même signe. Ainsi, lorsque x croît de x à X, il est absurde d'attribuer à $\varphi(x)$ une valeur autre que zéro, C. Q. F. D. Cette démonstration subsiste même lorsqu'on attribue à $\varphi(x)$ une valeur imaginaire $P+Q\sqrt{-1}$, car alors l'équation (1) se décompose en deux autres équations qui donnent séparément $P=0$, $Q=0$ (*).

2. Si l'équation (1) est satisfaite, non pas pour toutes les valeurs de n, mais seulement pour les valeurs suivantes 0, 1, 2,.... $(p-1)$, je dis que la fonction $\varphi(x)$ (supposée réelle) change de signe au moins p fois; car si elle ne changeait de signe que m fois, m étant $<p$, on arriverait comme ci-dessus à l'équation (2) dont l'absurdité vient d'être démontrée. L'analyse précédente est fondée sur un principe semblable à celui dont j'ai fait usage dans un de mes mémoires (tome I^{er} de ce Journal, page 253); mais il m'a paru qu'il était utile de donner de ce principe une application nouvelle et simple.

(*) Soient $B_0, B_1,\ldots B_n,\ldots$ des constantes données à volonté. Si l'on cherche une fonction $\varphi(x)$ qui satisfasse à l'équation (3) $\int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{X}} x^n\varphi(x)dx = B_n$, n étant un quelconque des nombres compris dans la série $0, 1, 2, 3,\ldots,$ ce problème n'aura jamais plusieurs solutions. En effet si toutes les équations contenues dans la formule (3) sont satisfaites en prenant $\varphi(x)=f(x)$, on pourra poser en général $\varphi(x)=f(x)+\varpi(x)$, et il en résultera $\int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{X}} x^n\varpi(x)\,dx = 0$, et par suite $\varpi(x)=0$, ce qui démontre notre théorème.