JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

M. CHASLES

Note sur un cas particulier de la construction des tangentes aux projections des courbes, pour lequel les méthodes générales sont en défaut

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 2 (1837), p. 293-298.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1837_1_2__293_0>

NOTE

Sur un cas particulier de la construction des tangentes aux projections des courbes, pour lequel les méthodes générales sont en défaut;

PAR M. CHASLES.

Dans plusieurs questions de Géométrie descriptive, particulièrement dans quelques épures de coupe des pierres, il arrive que, pour certains points d'une ligne courbe provenant de l'intersection de deux surfaces, la tangente à cette courbe est perpendiculaire à l'un des plans de projection; alors la projection de cette tangente, sur ce plan, se réduit à un point, et ne fait plus connaître la tangente à la projection de la courbe.

La méthode générale pour construire les tangentes aux projections des courbes situées dans l'espace, en les regardant comme les projections des tangentes à ces courbes, est donc absolument en défaut pour ces cas particuliers, et une méthode spéciale devient nécessaire

Cette question a occupé, il y a une vingtaine d'années, MM. Binet et Hachette, qui, l'un et l'autre, sans la résoudre dans la généralité où nous venons de la proposer, ont imaginé des moyens particuliers propres à déterminer les tangentes dans quelques-uns des cas dont il s'agit. (Voir la *Correspondance sur l'École Polytechnique*, tome III, pages 197 à 201, année 1815.)

La construction de M. Binet est fondée sur une belle méthode, autre que celle de Monge suivie jusqu'alors, pour déterminer les tangentes à la courbe d'intersection de deux surfaces. Au lieu de mener les plans tangents aux deux surfaces en un point de cette courbe, et de prendre leur commune intersection qui est la tangente cherchée, M. Binet mène les normales aux deux surfaces en ce point, et une perpendiculaire au plan déterminé par ces deux normales : cette perpendiculaire est la tangente cherchée, et ses projections sont perpendiculaires aux traces de ce plan sur les plans de projection.

Cette méthode est générale comme la première; mais elle est aussi en défaut dans le cas particulier qui nous occupe. Car si la tangente en un point de la courbe est perpendiculaire à l'un des plans de projection, les normales aux deux surfaces seront parallèles à ce plan, et conséquemment la trace du plan qu'elles déterminent sera à l'infini, et ne pourra point servir pour la construction de la tangente à la projection de la courbe.

Cependant il est un cas où, par une circonstance particulière, M. Binet a pu faire usage de cette méthode. C'est dans l'épure de la courbe d'intersection de deux surfaces de révolution dont les deux axes se rencontrent. Le plan des deux axes étant pris pour l'un des plans de projection, en chaque point de la courbe d'intersection des deux surfaces situé dans ce plan, la tangente à cette courbe est perpendiculaire à ce plan; par conséquent les méthodes générales sont en défaut. Néanmoins, par des considérations particulières, celle de M. Binet conduit encore, dans cette question, à la construction de la tangente. En effet, les normales aux deux surfaces, en un point quelconque m de leur intersection, rencontrent le plan des deux axes de révolution, pris pour plan de projection, précisément aux points où elles rencontrent respectivement les deux axes; il faut donc joindre ces deux points par une droite, et mener une perpendiculaire à cette droite par le point qui est la projection du point m. Cette perpendiculaire est la tangente à la projection de la courbe d'intersection des deux surfaces. Cette construction subsiste encore quand le point m est situé dans le plan des deux axes, bien que les considérations géométriques sur lesquelles elle repose ne soient plus applicables; mais on en conclut, *par la loi de continuité*, qu'elle doit encore donner la tangente à la courbe.

Telle est la méthode de M. Binet, qui a été reproduite depuis dans les traités de Géométrie descriptive, mais toujours pour la même question de deux surfaces de révolution dont les axes se rencontrent.

Les solutions que M. Hachette a données aussi pour quelques cas semblables consistent à remplacer les deux surfaces proposées par deux autres dont la courbe d'intersection ait la même projection que les deux premières sur le plan où l'on veut avoir les tangentes à cette projection. Alors ce sont les tangentes à la courbe d'intersection de ces deux nouvelles surfaces qui font connaître les tangentes à la projection de cette courbe. Et l'on prend les deux nouvelles surfaces de manière que pour le point de leur courbe d'intersection, qui répond au point de projection pour lequel la méthode des tangentes était en défaut, les plans tangents à ces deux surfaces ne soient pas perpendiculaires au plan de projection. M. Hachette détermine ces surfaces par l'analyse, dans les deux applications qu'il a faites de ce procédé. Mais, outre cet inconvénient qui fait que ce procédé ne convient pas à la Géométrie descriptive, on voit qu'il ne constitue point une méthode, puisqu'il n'y a aucun moyen certain pour trouver, même avec le secours de l'analyse, les deux nouvelles surfaces.

Voilà, je crois, tout ce qui a été fait au sujet du cas particulier des tangentes qui nous occupe. Il y a donc encore à trouver la méthode générale qui lui convient, et à dire aussi la raison *à priori* pour laquelle les méthodes ordinaires devaient être en défaut dans ce cas.

La réponse à ces deux questions découlera naturellement du théorème suivant :

Quand une ligne courbe tracée sur une surface cylindrique est tangente, en un point, à l'une des arètes du cylindre, le plan tangent au cylindre suivant cette arète est le plan osculateur à la courbe au point qu'on considère.

Cela est évident, car la courbe a un premier élément compris sur l'arète du cylindre, puisqu'elle lui est tangente, et l'élément suivant aboutit à l'arète infiniment voisine de cette première ; il s'ensuit que le plan tangent au cylindre, lequel est le plan des deux arètes, contient les deux éléments de la courbe ; il est donc son plan osculateur : ce qu'il fallait démontrer.

D'après cela, remarquons que quand une courbe située dans l'espace a sa tangente en un point perpendiculaire au plan de projection, cette courbe est tangente, en ce point, à l'arète du cylindre projetant ; donc le plan tangent à ce cylindre, dont la trace sur le plan de projection sera la tangente à la projection de la courbe, est le plan osculateur à la courbe. Donc

Quand la tangente en un point m *d'une courbe située dans l'espace* *est perpendiculaire au plan de projection, la tangente à la projection de cette courbe, au point correspondant au point* m, *est la trace, sur le plan de projection, du plan osculateur de la courbe au point* m.

Ainsi le problème des tangentes, dans ce cas, se change en celui du plan osculateur.

Cette solution est générale, et rentre dans une des théories que considère la Géométrie descriptive où l'on sait mener le plan osculateur en chaque point d'une courbe à double courbure.

Ce problème a été introduit dans la Géométrie descriptive par M. Hachette, qui en a donné une belle et savante solution, qui est celle que nous proposerons ici pour le cas de la construction des tangentes qu'il s'agit de résoudre. Comme cette solution, quoique bien remarquable, n'est pas celle néanmoins que l'on a adoptée dans les traités de Géométrie descriptive, nous allons la rappeler ici.

Pour construire le plan osculateur d'une courbe à double courbure en un point, on mène, par les différents points de cette courbe, les normales aux deux surfaces dont elle est l'intersection. Ces deux séries de normales forment deux surfaces gauches. Par le point pour lequel on veut le plan osculateur, on mène le plan normal à la courbe; il touche les deux surfaces gauches en deux points qu'on joint par une droite; par la tangente à la courbe on mène un plan perpendiculaire à cette droite, ce qui est possible, parce qu'elle est dans le plan normal; *ce plan est le plan osculateur cherché*; et, de plus, le point où il rencontre la droite est le *centre de courbure* de la courbe que que l'on considère (*).

(*) M. Hachette a donné cette solution dans le *Bulletin des Sciences* de la Société philomatique (année 1816, p. 88), et dans ses *Élémens de Géométrie à trois dimensions* (partie synthétique), in-8°, 817. Dans quelques notes que j'avais adressées à M. Hachette, en réponse à la communication qu'il me faisait de sa solution, notes que ce géomètre a eu la bonté d'insérer dans son ouvrage, j'ai indiqué une seconde manière de construire le plan osculateur. Elle consiste à mener les tangentes à la courbe proposée, et à chercher les points où elles percent un plan quelconque; ces points forment une courbe dont les tangentes sont situées dans les plans osculateurs de la courbe proposée. On n'a donc, pour déterminer ces plans osculateurs, qu'à mener les tangentes à cette nouvelle courbe.

C'est cette construction qu'on a reproduite depuis dans les traités de Géométrie

Pour déterminer le point où un plan mené par une génératrice d'une surface gauche touche la surface, on construit la courbe suivant laquelle ce plan coupe la surface : cette courbe rencontre la génératrice au point de contact cherché.

Dans le cas où la courbe proposée est l'intersection de deux surfaces de révolution, les normales qui forment les deux surfaces gauches s'appuient respectivement sur les deux axes de révolution ; le plan normal en un point m de la courbe touche ces deux surfaces aux points où les deux normales, menées par le point m, rencontrent les deux axes. Il suffit donc, pour construire les deux surfaces gauches, de joindre ces deux points par une droite, et de mener par le point m un plan perpendiculaire à cette droite : c'est le plan osculateur.

---

descriptive : je ne sais pourquoi ; car celle de M. Hachette est infiniment préférable sous tous les rapports, notamment comme donnant le centre du cercle osculateur, en même temps que son plan. Pour déterminer ce centre, on est obligé de recourir à d'autres constructions. On projette la courbe proposée sur son plan osculateur ; on a une courbe plane dont on cherche le cercle osculateur par une méthode graphique particulière donnée par M. Bergery, dans son excellent ouvrage intitulé : *Géométrie des courbes appliquée à l'industrie* (in-8°, Metz, 1826).

J'avais donné aussi une méthode pour construire le centre du cercle osculateur, après avoir déterminé le plan osculateur ; la voici : *Que par chaque point de la courbe proposée on mène sa normale comprise dans son point osculateur ; toutes ces normales forment une surface gauche. Le plan normal à la courbe, en un de ses points, touche la surface en un point qui est le centre de courbure cherché*. (Voir *Eléments de Géométrie à trois dimensions ;* par M. Hachette, p. 112).

Enfin, pour dire ici tout ce qui a été fait au sujet du problème du plan osculateur et du centre de courbure d'une courbe à double courbure, nous ajouterons que MM. Ch. Dupin et Poncelet l'ont aussi résolu. Leurs solutions, quoique différentes, consistent l'une et l'autre à chercher les centres de courbure des deux courbes planes qui sont les projections de la courbe proposée, et à faire usage de ces deux centres de courbure (et c'est en ce point qu'elles diffèrent), pour arriver à la connaissance du plan osculateur et du centre de courbure cherchés. (Voir *Annales de Mathématiques*, t. 7, p. 18, année 1816 ; et t. 15, p. 245, année 1825).

Ces solutions ne sont pas applicables à la question actuelle, puisque, loin de connaître le centre de courbure de la projection de la courbe proposée, on veut déterminer la tangente de cette projection.

Cette construction a lieu quelle que soit la position des axes des deux surfaces de révolution dans l'espace. Si on l'applique au cas particulier où les axes se rencontrent, elle conduit à la construction même de M. Binet; elle rattache à une méthode générale cette construction obtenue par induction, et dont la légitimité ne reposait que sur le principe de continuité.

Les considérations précédentes font bien voir pourquoi les méthodes générales pour la construction des tangentes aux projections des courbes devaient être en défaut pour le cas en question; c'est que, dans ce cas, la tangente à la projection de la courbe fait connaître immédiatement le plan osculateur à la courbe, et que la considération de ce plan implique nécessairement la considération de deux éléments consécutifs de la courbe, ou, en analyse, des infiniment petits du second ordre, tandis que les méthodes générales pour la construction des tangentes ne demandent que la considération d'un seul élément de la courbe, et, en analyse, des infiniment petits du premier ordre seulement. Ces méthodes devaient donc être en défaut pour le cas en question, sans quoi elles eussent fait connaître, par la considération des infiniment petits du premier ordre seulement, les plans osculateurs aux différents points d'une courbe à double courbure : ce qui est contraire à la nature des choses.

Le cas de la construction des tangentes, qui fait l'objet de cette note, ne se présente pas seulement dans les épures de la géométrie descriptive proprement dite. Il peut se présenter dans plusieurs questions de perspective où l'on aura à faire la perspective d'une courbe dont une des tangentes passera par l'œil. Cette tangente ne suffira plus pour faire connaître la tangente à la perspective de la courbe. Pour construire celle-ci, il faudra mener le plan osculateur de la courbe; sa trace sur le tableau sera la tangente cherchée.

Cette construction servira aussi pour déterminer les tangentes à la perspective du contour apparent d'une surface, pour les points où le rayon visuel est tangent à ce contour; circonstance qui se présente, et qui a été remarquée expressément dans plusieurs dessins, particulièrement dans la perspective du piédouche, où les points en question deviennent, en perspective, des points de rebroussement.