JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

POISSON

Remarques sur l'intégration des équations différentielles de la Dynamique

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 2 (1837), p. 317-336.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1837_1_2__317_0>

REMARQUES

Sur l'intégration des équations différentielles de la Dynamique ;

PAR M. POISSON.

En combinant le principe de d'Alembert avec celui des *vitesses virtuelles*, Lagrange est parvenu à une formule générale d'où il a déduit, sous la forme la plus simple, les équations différentielles du mouvement d'un système quelconque de points matériels. Certains coefficients qu'il introduit dans ces équations font connaître, en grandeur et en direction, les forces *intérieures* qui naissent de la liaison mutuelle des points du système, exprimée par des équations données entre leurs coordonnées. La considération de la surface sur laquelle chaque mobile doit demeurer, en vertu de chacune de ces équations, détermine seulement la direction de la force correspondante à cette équation, et qui doit être normale à cette surface. Les intensités des forces intérieures ne seraient donc pas connues d'après cette seule considération; mais le principe de d'Alembert montre qu'elles sont dues aux *forces perdues* à chaque instant, et les mêmes, d'ailleurs, dans l'état de mouvement que dans l'état d'équilibre; en sorte qu'on doit les déterminer au moyen du principe des vitesses virtuelles, appliqué à ces dernières forces. La combinaison de ces deux principes, dont Lagrange a fait la base de la *Mécanique analytique*, était donc nécessaire pour la détermination complète des forces intérieures. Quant aux *forces extérieures*, appliquées aux mobiles, elles proviennent, dans la nature, d'attractions ou de répulsions qui émanent de points fixes ou mobiles, et sont alors données par hypothèse; ou bien elles résultent, comme dans les fluides et les corps élastiques, d'actions moléculaires qui ne s'étendent qu'à des distances insensibles; et c'est, dans ce dernier cas, un problème appartenant à la *Mécanique physique*, de déterminer leurs résultantes. Quelle que soit l'origine des forces extérieures, si on les suppose données, le problème de la Dynamique est aujourd'hui complétement résolu, en ce sens qu'il est réduit à une question de pure analyse, c'est-à-dire à l'intégration d'un système d'équations différentielles du second ordre. Mais presque toujours on est obligé de recourir à des méthodes d'approximation très compliquées, pour effectuer cette intégration; et il est singulier que dans les questions qui paraissent très simples, dans le cas, par exemple, du mouvement de trois points qui s'attirent mutuellement, on ne connaisse pas d'autres intégrales exactes de ces équations, que celles qui sont communes à tous les problèmes, et qui sont fournies par les principes généraux du mouvement du centre de gravité, des aires, des forces vives. Cependant la forme remarquable des équations différentielles de la Dynamique, semblerait devoir donner quelque facilité pour leur intégration. Un examen approfondi de ce point d'analyse est l'objet des réflexions suivantes. Elles m'ont été suggérées par la lecture d'un mémoire fort intéressant que M. Hamilton, astronome royal de Dublin, a inséré dans les *Transactions philosophiques* de Londres (*), et qui a pour titre : *On a general Method in Dynamics.*

I.

Considérons un système de points matériels en mouvement, dont les masses seront représentées par m, $m_{,}$, $m_{,,}$, etc., et qui pourront être entièrement libres, ou liés entre eux d'une manière quelconque. Au bout d'un temps t, écoulé depuis que le mouvement a commencé, soient x, y, z, les trois coordonnées rectangulaires de m, et x', y', z', les composantes de sa vitesse suivant leurs directions, de sorte qu'on ait

$$\frac{dx}{dt} = x', \quad \frac{dy}{dt} = y', \quad \frac{dz}{dt} = z'.$$

(*) Année 1834, seconde partie.

Désignons aussi par les mêmes lettres avec des accents inférieurs, les coordonnées et les vitesses des autres points $m_{,}$, $m_{,,}$, etc. Représentons par U une fonction donnée de toutes ces coordonnées $x, y, z, x_{,}$, etc., qui pourra, en outre, renfermer t explicitement; et supposons que les composantes de la force motrice de m soient exprimées par les différences partielles $\frac{dU}{dx}, \frac{dU}{dy}, \frac{dU}{dz}$; celles de la force motrice de $m_{,}$, par $\frac{dU}{dx_{,}}, \frac{dU}{dy_{,}}, \frac{dU}{dz_{,}}$; etc. Enfin soient

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0, \text{ etc.}, \qquad (a)$$

les équations qui expriment la liaison des points du système, s'ils ne sont pas entièrement libres, et dans lesquelles L, M, N, etc., sont des fonctions données de $x, y, z, x_{,}$, etc., qui contiendront le temps t explicitement, lorsque cette liaison variera pendant la durée du mouvement.

Les trois équations différentielles du mouvement de m seront, comme on sait,

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{dU}{dx} + \lambda\frac{dL}{dx} + \mu\frac{dM}{dx} + \nu\frac{dN}{dx} + \text{etc.},\\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{dU}{dy} + \lambda\frac{dL}{dy} + \mu\frac{dM}{dy} + \nu\frac{dN}{dy} + \text{etc.},\\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{dU}{dz} + \lambda\frac{dL}{dz} + \mu\frac{dM}{dz} + \nu\frac{dN}{dz} + \text{etc.}; \end{aligned}\right\} (m)$$

celles du mouvement de $m_{,}$ seront de même

$$\left.\begin{aligned} m_{,}\frac{d^2x_{,}}{dt^2} &= \frac{dU}{dx_{,}} + \lambda\frac{dL}{dx_{,}} + \mu\frac{dM}{dx_{,}} + \nu\frac{dN}{dx_{,}} + \text{etc.},\\ m_{,}\frac{d^2y_{,}}{dt^2} &= \frac{dU}{dy_{,}} + \lambda\frac{dL}{dy_{,}} + \mu\frac{dM}{dy_{,}} + \nu\frac{dN}{dy_{,}} + \text{etc.},\\ m_{,}\frac{d^2z_{,}}{dt^2} &= \frac{dU}{dz_{,}} + \lambda\frac{dL}{dz_{,}} + \mu\frac{dM}{dz_{,}} + \nu\frac{dN}{dz_{,}} + \text{etc.}; \end{aligned}\right\} (m_{,})$$

et ainsi pour les autres mobiles.

Les coefficients λ, μ, ν, etc., sont des inconnues dont le nombre est égal à celui des équations (a), et d'où dépendent les actions mutuelles des points du système, résultantes de leur liaison exprimée par ces équations. En les éliminant entre les équations (m), $(m_{,})$,

$(m_{,,})$, etc., on réduira celles-ci à un nombre n qui sera l'excès du nombre des coordonnées x, y, z, $x_{,}$, etc., des mobiles sur celui des équations (a). En même temps, ces coordonnées s'exprimeront, au moyen des équations (a), en fonctions d'un pareil nombre n d'autres inconnues que je représenterai par φ, ψ, θ, etc. Après avoir ainsi substitué ces fonctions à la place de x, y, z, $x_{,}$, etc., dans les équations qui proviennent de l'élimination de λ, μ, ν, etc., il en résultera un système de n équations différentielles du second ordre, que j'appellerai (n). Le problème sera réduit à l'intégration de ces n équations simultanées. Leurs intégrales complètes feront connaître les valeurs de φ, ψ, θ, etc., en fonctions de t et de $2n$ constantes arbitraires que je désignerai par α, β, γ, etc. Les coordonnées x, y, z, $x_{,}$, etc., et par suite, les vitesses x', y', z', $x'_{,}$, etc., seront donc aussi des fonctions de t, α, β, γ, etc; et si l'on représente par a, b, c, etc., a', b', c', etc., les valeurs initiales de ces coordonnées et de ces vitesses, ces constantes seront des fonctions de α, β, γ, etc., qui se déduiront de x, y, z, $x_{,}$, etc., x', y', z', $x'_{,}$, etc., en y faisant $t = 0$.

II.

Je désigne actuellement par chacune des caractéristiques δ et Δ, la variation infiniment petite d'une fonction quelconque de t, α, β, γ, etc., prise par rapport à une partie ou à la totalité des quantités arbitraires α, β, γ, etc., tandis que la différentielle de cette fonction par rapport à t, sera toujours indiquée par la caractéristique d. En indiquant aussi, suivant l'usage, par la caractéristique Σ, une somme étendue à tous les mobiles m, $m_{,}$, $m_{,,}$, etc., et faisant

$$\Sigma m[(\Delta x\delta x' - \Delta x'\delta x) + (\Delta y\delta y' - \Delta y'\delta y) + (\Delta z\delta z' - \Delta z'\delta z)] = \varkappa ; \quad (1)$$

cette quantité $\varkappa$, infiniment petite du second ordre, sera constante par rapport à t, ou, autrement dit, on aura $d\varkappa = 0$, quelle que soit d'ailleurs la liaison des points m, $m_{,}$, $m_{,,}$, etc., exprimée par les équations (a). Pour la démonstration de cette propriété remarquable des équations générales de la Dynamique, je renverrai à mon second mémoire sur *la variation des constantes arbitraires* (*), ou bien au *Bulletin de la Société Philomathique* (**), où je l'avais donnee auparavant.

Maintenant, si le temps t n'est pas contenu explicitement dans la fonction U, non plus que dans aucune des équations (a), il en sera de même à l'égard des équations (n), qui ne renfermeront que dt; parmi les $2n$ constantes arbitraires α, β, γ, etc., de leurs intégrales, il y en aura donc une qui sera partout ajouté à la variable t, de sorte qu'en la désignant par ε, toutes les inconnues φ, ψ, θ, etc., seront des fonctions de $t+\varepsilon$ et des $2n-1$ autres constantes. Or, si l'on suppose que la variation Δ se rapporte à cette seule quantité ε, et si l'on fait $\delta\varepsilon = dt$, on devra changer Δ en d; en même temps, $\varkappa$ sera le produit de dt et de la variation d'une quantité indépendante de t, que je désignerai par k; par conséquent, l'équation (1) deviendra

$$\Sigma m[(dx\delta x'-dx'\delta x)+(dy\delta y'-dy'\delta y)+(dz\delta z'-dz'\delta z)]=\delta k dt\,; \quad (2)$$

et je dis, de plus, que cette constante arbitraire k sera celle de l'équation qui renferme le *principe des forces vives*, lequel a lieu, comme on sait, dans le cas dont il s'agit.

En effet, les quantités L, M, N, etc, ne contenant pas le temps t explicitement, on a

$$\begin{aligned}
dL &= \frac{dL}{dx}\,dx + \frac{dL}{dy}\,dy + \frac{dL}{dz}\,dz + \frac{dL}{dx_{,}}\,dx_{,} \text{ etc.},\\
dM &= \frac{dM}{dx}\,dx + \frac{dM}{dy}\,dy + \frac{dM}{dz}\,dz + \frac{dM}{dx_{,}}\,dx_{,} \text{ etc.},\\
dN &= \frac{dN}{dx}\,dx + \frac{dN}{dy}\,dy + \frac{dN}{dz}\,dz + \frac{dN}{dx_{,}}\,dx_{,} \text{ etc.},\\
&\text{etc.};
\end{aligned}$$

parce que les équations (a) ont lieu pour toutes les valeurs de t, on a aussi

$$dL = 0, \quad dM = 0, \quad dN = 0, \text{ etc.};$$

au moyen de quoi, en ajoutant les équations (m), $(m_{,})$, $(m_{,,})$, etc.,

(*) Tome I^er des *Mémoires de l'Académie des Sciences*.

(**) Année 1816, page 109.

après les avoir multipliées respectivement par dx, dy, dz, $dx_{,}$, etc., on en déduit

$$\Sigma m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\,dx + \frac{d^2y}{dt^2}\,dy + \frac{d^2z}{dt^2}\,dz\right) = d\mathrm{U},$$

ou bien, en intégrant et désignant par h la constante arbitraire,

$$\tfrac{1}{2}\,\Sigma m\,(x'^2 + y'^2 + z'^2) = \mathrm{U} + h; \qquad (3)$$

ce qui est l'équation des forces vives. En la différentiant suivant la caractéristique δ, et multipliant ensuite par dt, on aura donc

$$\Sigma m\,(\delta x'dx + \delta y'dy + \delta z'dz) = \delta \mathrm{U}dt + \delta h dt. \qquad (4)$$

Mais à cause que les valeurs de x, y, z, $x_{,}$, etc., doivent satisfaire aux équations (a), pour toutes les valeurs de α, β, γ, etc., on peut aussi différentier ces équations suivant δ; ce qui donne

$$\delta\mathrm{L} = 0, \quad \delta\mathrm{M} = 0, \quad \delta\mathrm{N} = 0, \text{ etc.}$$

Si donc on ajoute les équations (m), $(m_{,})$, $(m_{,,})$, etc., après les avoir multipliées respectivement par δx, δy, δz, $\delta x_{,}$, etc., et toutes par dt, il en résultera

$$\Sigma m\,(dx'\delta x + dy'\delta y + dz'\delta z) = \delta \mathrm{U}dt \cdot \qquad (5)$$

en retranchant ces équations (4) et (5) l'une de l'autre, il vient

$$\Sigma m[(dx\delta x' - dx\delta x) + (dy\delta y' - dy'\delta y) + (dz\delta z' - dz'\delta z)] = \delta h dt;$$

et si l'on compare cette formule à l'équation (2), on en conclut $\delta k = \delta h$; ce qu'il s'agissait de démontrer.

En vertu de l'équation (3), on aura d'ailleurs

$$h = \tfrac{1}{2}\,\Sigma\,(a'^2 + b'^2 + c'^2) - \mathrm{D}, \qquad (6)$$

en faisant $t = 0$ dans cette équation, et désignant par D, ce que U devient pour cette valeur de t.

III.

Faisons maintenant

$$\int \Sigma m(x'dx + y'dy + z'dz) = \mathrm{V};$$

et supposons que cette intégrale relative à t, commence à $t = 0$, de manière que V exprime ce que l'on appelle *la quantité d'action* dépensée par le système des mobiles m, $m_{\prime}$, $m_{\prime\prime}$, etc., pour passer de sa position initiale à celle qu'il occupe au bout du temps t. En différentiant cette intégrale suivant la caractéristique δ, nous aurons, d'après les règles connues,

$$\delta \mathrm{V} = \int \Sigma m(x'd.\delta x + y'd.\delta y + z'd.\delta z + dx\delta x' + dy\delta y' + dz\delta z').$$

Mais, en vertu de l'équation (2) et à cause de $k = h$, on a aussi

$$\int \Sigma m(dx\delta x' + dy\delta y' + dz\delta z' - dx'\delta x - dy'\delta y - \delta z'\delta z) = t\delta h;$$

en retranchant cette équation de la précédente, on aura donc

$$\delta \mathrm{V} = \int \Sigma m(d.x'\delta x + d.y'\delta y + d.z'\delta z) - t\delta h;$$

ou bien, en effectuant l'intégration,

$$\delta \mathrm{V} = \Sigma m(x'\delta x + y'\delta y + z'\delta z) - \Sigma m(a'\delta a + b'\delta b + c'\delta c) - t\delta h, \quad (7)$$

en observant que l'intégrale doit s'évanouir, par hypothèse, avec la variable t, et qu'on a désigné par a, b, c, a', b', c', les valeurs de x, y, z, x', y', z', qui répondent à $t = 0$.

Les coordonnées x, y, z, $x_{\prime}$, étant des fonctions de φ, ψ, θ, etc., données par les équations (a), on pourra toujours ramener cette équation (7) à la forme

$$\delta \mathrm{V} = \mathrm{P}\delta\varphi + \mathrm{Q}\delta\psi + \mathrm{R}\delta\theta + \text{etc.} - \mathrm{A}\delta\alpha - \mathrm{B}\delta\beta - \mathrm{C}\delta\gamma - \text{etc.} - t\delta h, \quad (8)$$

où l'on désigne par P, Q, R, etc., des fonctions données de φ, ψ, θ, etc., $\frac{d\varphi}{dt}$, $\frac{d\psi}{dt}$, $\frac{d\theta}{dt}$, etc.; par A, B, C, etc., ce que ces fonctions deviennent pour $t=0$; et par α, β, γ, etc., ce que φ, ψ, θ, etc., deviennent également pour $t=0$. Si l'on désigne aussi par α', β', γ', etc., les valeurs de $\frac{d\varphi}{dt}$, $\frac{d\psi}{dt}$, $\frac{d\theta}{dt}$, etc., qui répondent à $t=0$, il sera permis de prendre les n quantités α, β, γ, etc., et les n quantités α', β', γ', etc., pour les $2n$ constantes arbitraires des intégrales complètes des équations (n), que nous avions désignées jusqu'ici, d'une manière générale, par α, β, γ, etc.

Observons actuellement que V, ainsi que chacune des n quantités φ, ψ, θ, etc., sera une fonction de $2n+1$ quantités indépendantes entre elles, savoir, t, α, β, γ, etc., α', β', γ', etc. La quantité h sera une fonction de α, β, γ, etc., α', β', γ', etc., résultante de la formule (6). Par conséquent, si l'on conçoit qu'au moyen des valeurs de φ, ψ, θ, etc., et de celle de h, on ait éliminé de l'expression de V, la variable t et les n constantes α', β', γ', etc., on pourra considérer V comme une fonction de ces $2n+1$ autres quantités φ, ψ, θ, etc., h, α, β, γ, etc., et écrire, en conséquence,

$$V=f(\varphi, \psi, \theta, \text{etc.}, h, \alpha, \beta, \gamma, \text{etc.}),$$

d'où l'on conclut que si l'on parvient, par un moyen quelconque, à trouver cette fonction f, et qu'on la substitue à la place de V dans l'équation (8), elle devra rendre cette équation identique par rapport aux $2n+1$ variations δh, $\delta\varphi$, $\delta\psi$, $\delta\theta$, etc., $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$, etc.; de sorte que l'on aura ce système de $2n+1$ équations, savoir :

$$\left.\begin{array}{lll}\frac{df}{dh}=-t, & & \\ \frac{df}{d\varphi}=\text{P}, & \frac{df}{d\psi}=\text{Q}, & \frac{df}{d\theta}=\text{R, etc.,} \\ \frac{df}{d\alpha}=-\text{A}, & \frac{df}{d\beta}=-\text{B}, & \frac{df}{d\gamma}=-\text{C, etc.,}\end{array}\right\} \quad (9)$$

duquel on déduira par l'élimination des n quantités $\frac{d\varphi}{dt}$, $\frac{d\psi}{dt}$, $\frac{d\theta}{dt}$, etc., et de l'une des $2n+1$ constantes arbitraires h, α, β, γ, etc., α', β', γ', etc., un autre système de n équations entre t, φ, ψ, θ, etc., et les $2n$ constantes restantes, qui exprimera les intégrales complètes des équations (n), ou des équations différentielles du second ordre (m),

$(m_{\prime})$, $(m_{\prime\prime})$, etc., réduites au nombre n au moyen des équations (a) données entre x, y, z, $x_{\prime}$, etc.

Ainsi, dans tous les cas où le principe des forces vives a lieu, l'intégration des équations différentielles du mouvement d'un système de corps liés entre eux comme on voudra, est ramenée à la détermination de la fonction que nous désignons par f. On ne doit pas confondre cette proposition avec le *principe de la moindre action*, qui n'est qu'une règle, inutile aujourd'hui, pour former les équations différentielles du mouvement, tandis que la proposition dont il s'agit maintenant, en fait connaître les intégrales, toutes les fois que l'on est parvenu à déterminer une certaine quantité V, et à mettre sa valeur sous la forme que nous supposons, c'est-à-dire à l'exprimer en fonction des inconnues φ, ψ, θ, etc., de leurs valeurs initiales α, β, γ, etc., et de la constante h de l'équation des forces vives. Cette méthode d'intégration est celle que M. Hamilton a donnée dans le mémoire cité au commencement de celui-ci, mais pour le cas seulement des équations (m), $(m_{\prime})$, $(m_{\prime\prime})$, etc., ou d'un système de points matériels entièrement libres. Elle s'étend, comme nous venons de le faire voir, aux équations (n) relatives au mouvement d'un système quelconque de corps; mais malgré cette extension, l'usage en serait encore très borné et à peu près nul, si l'on voulait, comme l'auteur le propose, la faire servir à trouver toutes les intégrales premières et secondes des équations du mouvement, et qu'il fallût déterminer *à priori* la fonction V, sans connaître aucune de ces intégrales. Quand on connaîtra un nombre convenable des intégrales premières, cette méthode pourra servir à achever l'intégration; et nous en donnerons tout à l'heure un exemple.

IV.

Pour expliquer la marche qu'il faudra suivre, en général, supposons d'abord qu'au moyen des équations (a), on ait réduit l'intégrale que V représente à la forme

$$V = \int (X d\varphi + Y d\psi + Z d\theta + \text{etc.});$$

X, Y, Z, etc., étant des fonctions données des n variables φ, ψ, θ, etc., et de leurs coefficients différentiels $\frac{d\varphi}{dt}$, $\frac{d\psi}{dt}$, $\frac{d\theta}{dt}$, etc., qui seront désignés, pour plus de simplicité, par φ', ψ', θ', etc. Soient

$$G = o, \quad G' = o, \quad G'' = o, \text{ etc.}, \quad (10)$$

les intégrales premières des équations (n) que l'on suppose connues, qui sont distinctes de l'équation des forces vives, et qui ne contiennent pas non plus le temps t explicitement, de sorte que G, G', G'', etc., représentent des fonctions de φ, ψ, θ, etc., φ', ψ', θ', etc., et d'un nombre de constantes arbitraires g, g', g'', etc., égal à celui de ces équations (10). On pourra aussi représenter l'équation des forces vives, qu'il faudra joindre à celles-là, par

$$H = o; \qquad (11)$$

et H sera une fonction de φ, ψ, θ, etc., φ', ψ', θ', etc., et de la constante particulière h.

Il suffirait que n fût le nombre de ces équations (10) et (11), pour qu'on en pût déduire les valeurs de φ', ψ', θ', etc., et qu'en substituant ensuite ces valeurs dans les fonctions X, Y, Z, etc., la formule contenue sous le signe $\int$ ne renfermât plus que les variables φ, ψ, θ, etc., dont elle contient les différentielles. Mais quoique, d'après la formule (8), la variation de V, par rapport à ces n variables, ne contienne plus $\delta\varphi$, $\delta\psi$, $\delta\theta$, etc., sous le signe $\int$, il ne s'ensuit pas que la formule $Xd\varphi + Yd\psi + Zd\theta +$ etc., satisfera toujours aux conditions d'intégrabilité d'une formule différentielle à n variables indépendantes, ou qu'elle puisse s'intégrer indépendamment d'aucune relation entre φ, ψ, θ, etc. : si cette formule est intégrable, le signe $\int$ disparaîtra dans la variation de son intégrale; mais l'inverse de cette proposition n'a pas lieu nécessairement.

En effet, quelles que soient les fonctions de φ, ψ, θ, etc., φ', ψ', θ', etc., représentées par X, Y, Z, etc., on aura après l'élimination de φ', ψ', θ', etc.,

$$\begin{aligned}\delta V = &\int(Xd.\varphi + Yd.\delta\psi + Zd.\delta z + \text{etc.})\\ &+\int\left(\frac{dX}{d\varphi}\,\delta\varphi + \frac{dX}{d\psi}\,\delta\psi + \frac{dX}{d\theta}\,\delta\theta + \text{etc.}\right) d\varphi\\ &+\int\left(\frac{dY}{d\varphi}\,\delta\varphi + \frac{dY}{d\psi}\,\delta\psi + \frac{dY}{d\theta}\,\delta\theta + \text{etc.}\right) d\psi\\ &+\int\left(\frac{dZ}{d\varphi}\,\delta\varphi + \frac{dZ}{d\psi}\,\delta\psi + \frac{dZ}{d\theta}\,\delta\theta + \text{etc.}\right) d\theta\\ &+ \text{etc.}\end{aligned}$$

En intégrant par partie, la première intégrale devient

$$\begin{aligned}X\delta\varphi &+ Y\delta\psi + Z\delta\theta + \text{etc.}\\ &-\int\left(\frac{dX}{d\varphi}\,\delta\varphi + \frac{dY}{d\varphi}\,\delta\psi + \frac{dZ}{d\varphi}\,\delta\theta + \text{etc.}\right) d\varphi\\ &-\int\left(\frac{dX}{d\psi}\,\delta\varphi + \frac{dY}{d\psi}\,\delta\psi + \frac{dZ}{d\psi}\,\delta\theta + \text{etc.}\right) d\psi\\ &-\int\left(\frac{dX}{d\theta}\,\delta\varphi + \frac{dY}{d\theta}\,\delta\psi + \frac{dZ}{d\theta}\,\delta\theta + \text{etc.}\right) d\theta\\ &- \text{etc.};\end{aligned}$$

et si l'on suppose, pour fixer les idées, que les variables φ, ψ, θ, etc., soient seulement au nombre de trois, l'expression de δV pourra s'écrire ainsi

$$\begin{aligned}\delta V = &X\delta\varphi + Y\delta\psi + Z\delta\theta\\ &+\int\left[\left(\frac{dY}{d\varphi} - \frac{dX}{d\psi}\right) d\psi + \left(\frac{dZ}{d\varphi} - \frac{dX}{d\theta}\right) d\theta\ \right] \delta\varphi\\ &+\int\left[\left(\frac{dX}{d\psi} - \frac{dY}{d\varphi}\right) d\varphi + \left(\frac{dZ}{d\psi} - \frac{dY}{d\theta}\right) d\theta\ \right] \delta\psi\\ &+\int\left[\left(\frac{dX}{d\theta} - \frac{dZ}{d\varphi}\right) d\varphi + \left(\frac{dY}{d\theta} - \frac{dZ}{d\psi}\right) d\psi\ \right] \delta\theta.\end{aligned}$$

Or, les conditions d'intégrabilité connues de la formule $Xd\varphi + Yd\psi + Zd\theta$, savoir :

$$\frac{dY}{d\varphi} = \frac{dX}{d\psi}, \quad \frac{dZ}{d\varphi} = \frac{dX}{d\theta}, \quad \frac{dZ}{d\psi} = \frac{dY}{d\theta},$$

font évidemment disparaître les signes $\int$ de l'expression de δV; mais pour qu'ils disparaissent, quelles que soient les variations $\delta\varphi$, $\delta\psi$, $\delta\theta$, il suffit qu'on ait

$$\left(\frac{dY}{d\varphi} - \frac{dX}{d\psi}\right) d\psi + \left(\frac{dZ}{d\varphi} - \frac{dX}{d\theta}\right) d\theta = 0,$$
$$\left(\frac{dZ}{d\psi} - \frac{dY}{d\theta}\right) d\theta - \left(\frac{dY}{d\varphi} - \frac{dX}{d\psi}\right) d\varphi = 0,$$
$$\left(\frac{dZ}{d\varphi} - \frac{dX}{d\theta}\right) d\varphi + \left(\frac{dZ}{d\psi} - \frac{dY}{d\theta}\right) d\psi = 0;$$

équations dont la troisième est une suite des deux autres, et qui peuvent avoir lieu, en vertu de quelque relation particulière entre φ, ψ, θ, sans que les coefficients de $d\varphi$, $d\psi$, $d\theta$, soient zéro, c'est-à-dire sans que les conditions d'intégrabilité précédentes soient satisfaites. Si, au lieu de trois ou d'un plus grand nombre de variables, il y en a deux seulement φ et ψ, l'expression de δV se réduira à

$$\delta V = X\delta\varphi + Y\delta\psi + \int\left(\frac{dY}{d\varphi} - \frac{dX}{d\psi}\right)(\delta\varphi d\psi - \delta\psi d\varphi);$$

et le signe $\int$ n'y pourra disparaître, à moins qu'on n'ait

$$\frac{dY}{d\theta} = \frac{dX}{d\psi};$$

mais si cette équation n'est point identique, c'est-à-dire si elle n'a lieu qu'en vertu d'une relation entre φ et ψ, il ne s'ensuivra pas que la formule $Xd\varphi + Yd\psi$ soit une différentielle à deux variables.

Cela posé, soit $n+i$ le nombre des équations (10) et (11), qui excédera de i celui des quantités φ', ψ', θ', etc. Il faudra que i soit moindre que n; car si l'on avait $i = n$, on tirerait des $2n$ équations (10) et (11), qui ne contiennent pas le temps t explicitement, des valeurs constantes pour les n inconnues φ, ψ, θ, et pour leurs coefficients differentiels φ', ψ', θ', etc. Désignons par

$$E = 0, \quad E' = 0, \quad E'' = 0, \text{ etc.}, \qquad (12)$$

les équations entre φ, ψ, θ, etc., qui résulteront de l'élimination de φ', ψ', θ', etc., entre ces intégrales (10) et (11), et dont le nombre sera égal à i. Ayant aussi éliminé φ', ψ', θ', etc., de chacune des quantités

X, Y, Z, etc.; si la formule $Xd\varphi + Yd\psi + Zd\theta +$ etc., satisfait aux conditions d'intégrabilité, en vertu des équations (12) qui réduiront à $n-i$ le nombre des variables indépendantes, on effectuera l'intégration par les règles ordinaires, et il en résultera une valeur de V en fonction de ces $n-i$ variables et des $n+i$ constantes arbitraires que renferment les équations (10) et (11). On pourra ensuite, au moyen des équations (12), réintroduire dans V toutes les variables φ, ψ, θ, etc., en en éliminant un nombre égal à i de constantes arbitraires, différentes de h que nous conserverons. Si l'on observe d'ailleurs que V doit être zéro, par hypothèse, pour $t = 0$, on aura donc finalement

$$V = F(\varphi, \psi, \theta, \text{etc.}, \quad h, e, e', e'', \text{etc.}) - k;$$

e, e', e'', etc., étant les $n-1$ constantes arbitraires que l'on aura conservées avec h, et qui seront une partie des constantes g, g', g'', etc., ou plus généralement, des fonctions de celles-ci; F désignant une fonction connue de $2n$ quantités, dont n variables et n constantes; et en faisant, pour abréger,

$$F(\alpha, \beta, \gamma, \text{etc.}, \ h, e, e', e'', \text{etc.}) = k.$$

Les n constantes h, e, e', e'', etc., ne peuvent être que des fonctions des valeurs initiales α, β, γ, etc., α', β', γ', etc., de φ, ψ, θ, etc., φ', ψ', θ', etc.; les n variables φ, ψ, θ, etc., sont aussi des fonctions de t, α, β, γ, etc., α', β', γ', etc.; en joignant la valeur de k à celles de φ, ψ, θ, etc., h, e, e', e'', etc., il en résultera $2n+1$ équations, entre lesquelles on peut concevoir que l'on ait éliminé t, α', β', γ', etc., pour en déduire ensuite des valeurs de α, β, γ, etc., en fonction de φ, ψ, θ, etc., k, h, e, e', e'', etc. De cette manière, on pourra considérer la valeur de V, représentée plus haut par la fonction f, comme une fonction de ces $2n+1$ dernières quantités; elle devra alors être identique avec celle que l'on vient d'écrire; et en égalant, de part et d'autre, dans les variations complètes de ces deux expressions de V, les coefficients de chacune des variations de φ, ψ, θ, etc., k, h, e, e', e'', etc., on obtiendra un nombre $2n+1$ d'équations pour remplacer les équations (9). Parmi ces nouvelles équations, nous aurons seulement besoin de celles qui proviennent des variations de h, e, e', e'', etc., et qui seront, d'après la formule (8),

$$\frac{dF}{dh} = -t + \epsilon, \quad \frac{dF}{de} = l, \quad \frac{dF}{de'} = l', \quad \frac{dF}{de''} = l'', \text{ etc.,} \quad (13)$$

en faisant, pour abréger,

$$\begin{aligned} &A\frac{d\alpha}{dh} + B\frac{d\beta}{de} + C\frac{d\gamma}{de} + \text{etc.} = -\epsilon, \\ &A\frac{d\alpha}{de} + B\frac{d\beta}{dh} + C\frac{d\gamma}{dh} + \text{etc.} = -l, \\ &A\frac{d\alpha}{de'} + B\frac{d\beta}{de'} + C\frac{d\gamma}{de'} + \text{etc.} = -l', \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Quoique nous considérions α, β, γ, etc., dans ces différentiations, comme des fonctions de h, e, e', e'', etc., et de φ, ψ, θ, etc.; ces quantités α, β, γ, etc., étant des constantes arbitraires par rapport à t, quelles que soient les valeurs de h, e, e', e'', etc., il s'ensuit que leurs différences partielles sont également des quantités constantes, aussi bien que A, B, C, etc., et par conséquent aussi, les n quantités ϵ, l, l', l'', etc. Maintenant, les équations (12) et (13), dont le nombre total est $n+i$, seront des intégrales des équations (n), en quantités finies, qui devront se réduire, dans chaque cas, à un nombre n d'équations distinctes, contenant les variables t, φ, ψ, θ, etc., et $2n$ constantes arbitraires.

§ V.

Appliquons ces considérations générales au mouvement d'un point matériel, entièrement libre et soumis à une force dirigée vers un centre fixe.

Supposons que ce point soit celui dont x, y, z, sont les trois coordonnées; plaçons le centre fixe à leur origine; les trois composantes de la force dirigée vers ce point seront entre elles comme ces coordonnées; on aura donc

$$y\frac{dU}{dx} = x\frac{dU}{dy}, \quad x\frac{dU}{dy} = z\frac{dU}{dx}, \quad z\frac{dU}{dy} = y\frac{dU}{dz};$$

et si l'on désigne par r la distance du mobile au centre fixe, de sorte qu'on ait

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

on ne pourra satisfaire à ces équations qu'en prenant pour U une fonction de ce rayon vecteur r. En la désignant par R, et prenant aussi la masse du mobile pour unité, les trois équations du mouvement seront

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dR}{dr}\frac{x}{r}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dR}{dr}\frac{y}{r}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{dR}{dr}\frac{z}{r}.$$

On aura, pour l'équation des forces vives,

$$\frac{1}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2) = R + h, \qquad (\alpha)$$

et, pour les trois équations que fournit le principe des aires,

$$xy' - yx' = g, \quad zx' - xz' = g', \quad yz' - zy' = g''. \qquad (\beta)$$

Ces quatre intégrales complètes des équations du mouvement s'en déduisent d'ailleurs immédiatement. Les trois dernières donnent celle-ci

$$gz + g'y + g''x = 0, \qquad (\gamma)$$

qui est une intégrale seconde, et qui montre que la trajectoire du mobile est comprise dans un plan passant par le centre fixe, ce qu'on peut aussi regarder comme évident *à priori*. Enfin l'intégrale que V représente, se réduit à

$$V = \int (x'dx + y'dy + z'dz).$$

En joignant l'équation (α) aux deux premières équations (β), on en déduit

$$x' = \frac{g'z - gy}{r^2} + \frac{1}{r}\sqrt{(2Rr^2 + 2hr^2 - g^2 - g'^2)x^2 - (g'y + gz)^2},$$

$$y' = \frac{gx^2 + (g'y + gz)z}{xr^2} + \frac{y}{xr}\sqrt{(2Rr^2 + 2hr^2 - g^2 - g'^2)x^2 - (g'y + gz)^2},$$

$$z' = -\frac{g'x^2 + (g'y + gz)y}{xr^2} + \frac{z}{xr}\sqrt{(2Rr^2 + 2hr^2 - g^2 - g'^2)x^2 - (g'y + gz)^2},$$

Or, ces valeurs de x', y', z', déduites de trois intégrales premières des équations du mouvement, ne rendent pas la formule $x'dx + y'dy + z'dz$ une différentielle exacte à trois variables indépendantes x, y, z; mais, si l'on suppose ces variables liées entre elles par l'équation (γ), les valeurs de x', y', z', deviennent

$$x' = \frac{g'z - gy}{r^2} + \frac{x}{r^2}\sqrt{2Rr^2 + 2hr^2 - e^2},$$

$$y' = \frac{gx - g''z}{r^2} + \frac{y}{r^2}\sqrt{2Rr^2 + 2hr^2 - e^2},$$

$$z' = \frac{g''y - g'x}{r^2} + \frac{z}{r^2}\sqrt{2Rr^2 + 2hr^2 - e^2},$$

où l'on a fait, pour abréger,

$$g^2 + g'^2 + g''^2 = e^2;$$

et il en résulte d'abord

$$x'dx + y'dy + z'dz = \frac{1}{r}\sqrt{2Rr^2 + 2hr^2 - e^2}\,dr$$
$$+ \frac{1}{r^2}\left[g(xdy - ydx) + g'(zdx - xdz) + g''(ydz - zdy)\right]$$

Soit v l'angle que fait le rayon vecteur r avec une ligne fixe, menée par l'origine des coordonnées, dans le plan de la trajectoire; l'aire décrite par ce rayon, dans un temps infiniment petit, sera r^2dv; les coefficients de g, g', g'', exprimeront ses projections sur les trois plans des coordonnées; et, comme d'après l'équation (γ), les cosinus des inclinaisons du plan de la trajectoire sur ces trois plans, sont, $\frac{g}{e}$, $\frac{g'}{e}$, $\frac{g''}{e}$, on en conclura

$$xdy - ydx = \frac{gr^2dv}{e}, \quad zdx - xdz = \frac{g'r^2dv}{e}, \quad ydz - zdy = \frac{g''r^2dv}{e}.$$

Par conséquent, on aura

$$x'dx + y'dy + z'dz = \frac{1}{r}\sqrt{2Rr^2 + 2hr^2 - e^2}\,dr + edv;$$

formule qui se trouve ainsi réduite à une différentielle exacte à deux variables r et v, et d'où l'on tire, en intégrant,

$$V = \int \frac{1}{r} \sqrt{2Rr^2 + 2hr^2 - e^2}\, dr + ev - k;$$

k étant, comme plus haut, la constante qui rend nulle la valeur de V relative à $t = 0$.

Au lieu des coordonnées x, y, z, on peut prendre les trois variables z, r, v, pour déterminer à chaque instant la position du mobile; et comme ce point matériel est entièrement libre, on peut aussi prendre z, r, v, pour les inconnues que nous avons désignées généralement par φ, ψ, θ. Abstraction faite de son dernier terme, la valeur de V que nous trouvons sera alors la fonction F de l'article précédent; laquelle, dans le cas particulier dont nous nous occupons, ne renferme que deux variables r et v, et deux constantes arbitraires h et e. Les deux premières équations (13) seront

$$t - \epsilon = -\int \frac{rdr}{r\sqrt{2Rr^2 + 2hr^2 - e^2}},$$
$$v - l = \int \frac{dr}{r\sqrt{2Rr^2 + 2hr^2 - e^2}},$$

en mettant dans la seconde el au lieu de l, et divisant par e. La troisième se réduira à $l' = 0$; et il n'y aura pas lieu de considérer les suivantes. On pourra d'ailleurs remplacer l'équation (γ) par celle-ci :

$$z = \beta r \sin(v - \alpha),$$

où l'on désigne par α l'angle que fait l'intersection du plan de la trajectoire et du plan des x et y avec la ligne fixe d'ou l'on compte l'angle v, et par β le sinus de l'inclinaison du premier plan sur le second. De cette manière, ces trois équations seront les intégrales complètes de celles du mouvement entre les quatre variables t, r, v, z, et les six constantes arbitraires $h, e, \epsilon, l, \alpha, \beta$; ce qui coïncide avec les formules connues.

On aurait pu simplifier le calcul en prenant le plan de la trajectoire pour l'un des trois plans des coordonnées x, y, z; on a conservé des directions quelconques aux axes des coordonnées, afin que cet exemple présentât les principales circonstances de la méthode générale, et pour montrer que la formule $x'dx + y'dy + z'dz$ n'est une différentielle exacte qu'en vertu d'une relation particulière entre x, y, z, qui se trouve remplacée par l'une de ces coordonnées égalée à zéro, lorsqu'on fait coïncider le plan des deux autres avec celui de la trajectoire.

§ VI.

Considérons encore le cas d'un point matériel entièrement libre, dont la force motrice ait toujours ses trois composantes exprimées par les différences partielles d'une même fonction U des coordonnées, mais ne soit pas dirigée vers un centre fixe, comme dans l'exemple précédent. Supposons que ce mouvement ait lieu dans un plan que nous prendrons pour celui des x et y; de sorte que les équations différentielles du second ordre se réduisent à deux, savoir :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dU}{dx}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dU}{dy};$$

U étant une fonction donnée de x et y. L'intégrale que V représente se réduira aussi à

$$V = \int (x'dx + y'dy);$$

l'équation des forces vives sera

$$\frac{1}{2}(x'^2 + y'^2) = U + h; \qquad (h)$$

et si l'on représente par

$$f(x, y, x', y') = g, \qquad (g)$$

une intégrale première des deux équations du mouvement, on tirera de ces deux dernières équations, des valeurs de x' et y', en fonctions des deux variables x' et y', et des deux constantes arbitraires h et g. Or, pourvu que la fonction donnée f ne soit pas seulement une fonction de la quantité $x'^2 + y'^2$, et des variables x et y, c'est-à-dire pourvu qu'en éliminant l'une des variables x' ou y', entre les deux dernières équations, l'autre variable y' ou x' ne disparaisse pas en même temps, les valeurs de x' et y' tirées de ces équations rendront la formule $x'dx + y'dy$ une différentielle exacte, ainsi qu'on le prouvera tout à l'heure. Cela étant, on obtiendra par les règles ordinaires, l'expression de V en fonction de x, y, h, g; et d'après les équations (13), on en déduira

$$\int\left(\frac{dx'}{dh}\,dx + \frac{dy'}{dh}\,dy\right) = -t + \varepsilon,$$
$$\int\left(\frac{dx'}{dg}\,dx + \frac{dy'}{dg}\,dy\right) = l.$$

pour les intégrales, en quantités finies, des deux équations du mouvement; h, g, ε, l, étant les quatre constantes arbitraires. La seconde de ces intégrales sera l'équation de la trajectoire, et la première déterminera le temps t en fonction des coordonnées du mobile.

Ce résultat coïncide avec celui que M. Jacobi a énoncé dans une lettre adressée l'an dernier à l'Institut (*). Il se rapporte, comme on voit, à la théorie de M. Hamilton; mais en faisant concourir à la détermination de la fonction V, indépendamment de l'équation des forces vives, une autre intégrale première des équations du mouvement, que l'on suppose donnée *à priori*.

Pour faire voir que les valeurs de x' et y' tirées des équations (h) et (g), satisfont à la condition d'intégrabilité de la formule $x'dx + y'dy$, c'est-à-dire à l'équation

$$\frac{dx'}{dy} = \frac{dy'}{dx},$$

j'observe que ces valeurs doivent rendre identiques les équations d'où elles sont déduites; en différentiant chacune de ces équations successivement par rapport à x et par rapport à y, on aura donc

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dx'}\frac{dx'}{dx} + \frac{df}{dy'}\frac{dy'}{y} = 0, \quad x'\frac{dx'}{dx} + y'\frac{dy'}{dx} = \frac{dU}{dx},$$
$$\frac{df}{dy} + \frac{df}{dx'}\frac{dx'}{dy} + \frac{df}{dy'}\frac{dy'}{dy} = 0, \quad x'\frac{dx'}{dy} + y'\frac{dy'}{dy} = \frac{dU}{dy};$$

(*) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*; 18 juillet 1836.

par l'élimination de $\frac{dx'}{dx}$ et $\frac{dy'}{dy}$, entre ces quatre équations, il vient

$$\frac{df}{dx}x' + \frac{df}{dx'}\frac{dU}{dx} + \left(\frac{df}{dy'}x' - \frac{df}{dx'}y'\right)\frac{dy'}{dx} = 0,$$
$$\frac{df}{dy}y' + \frac{df}{dy'}\frac{dU}{dy} + \left(\frac{df}{dx'}y' - \frac{df}{dy'}x'\right)\frac{dx'}{dy} = 0,$$

et, par conséquent,

$$\frac{df}{dx}x' + \frac{df}{dy}y' + \frac{df}{dx'}\frac{dU}{dx} + \frac{df}{dy'}\frac{dU}{dy} + \left(\frac{df}{dy'}x' - \frac{df}{dx'}y'\right)\left(\frac{dy'}{dx} - \frac{dx'}{dy}\right) = 0;$$

or, l'équation (g) étant une intégrale première des équations du mouvement, il faut qu'en la différentiant par rapport à t, ce qui fait disparaître la constante g, et substituant ensuite pour $\frac{dx'}{dt}$ et $\frac{dy'}{dt}$ leurs valeurs $\frac{dU}{dx}$ et $\frac{dU}{dy}$ données par ces équations, on ait identiquement

$$\frac{df}{dx}x' + \frac{df}{dy}y' + \frac{df}{dx'}\frac{dU}{dx} + \frac{df}{dy'}\frac{dU}{dy} = 0.$$

au moyen de quoi l'équation qu'on vient d'écrire se réduit à

$$\left(\frac{df}{dy'}x' - \frac{df}{dx'}y'\right)\left(\frac{dy'}{dx} - \frac{dx'}{dy}\right) = 0,$$

et comme le premier facteur de celle-ci n'est pas nul, puisqu'on a supposé que la fonction désignée par f n'est pas une fonction de $x'^2 + y'^2$, il faut que le second facteur soit zéro; ce qu'il s'agissait de démontrer.