JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

M. CHASLES

Note sur les équations indéterminées du second degré. Formules d'Euler pour la résolution de l'équation... $Cx^2 \pm A = y^2$. - Leur identité avec celles des algébristes indiens et arabes. - Démonstration géométrique de ces formules

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 2 (1837), p. 37-55.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1837_1_2__37_0>

NOTE

SUR LES ÉQUATIONS INDÉTERMINÉES DU SECOND DEGRÉ.

Formules d'Euler pour la résolution de l'équation.... $Cx^2 \pm A = y^2$. — *Leur identité avec celles des algébristes indiens et arabes. — Démonstration géométrique de ces formules.*

PAR M. CHASLES.

L'un des faits les plus étonnants que nous présente l'histoire des sciences, et l'un des plus importants, comme monument de l'ancienne civilisation de l'Orient, est sans contredit la résolution des équations indéterminées du deuxième degré, que contient le traité d'algèbre de Brahmegupta (*).

Diophante, dont les six livres de *Questions arithmétiques* qui nous sont parvenus, roulent sur l'analyse indéterminée, a résolu beaucoup d'équations du second degré, à deux ou plusieurs inconnues. Dans toutes, ce grand analyste de l'école d'Alexandrie a montré beaucoup d'adresse et de génie ; mais ses solutions sont diverses, appropriées à des questions particulières, et ne mettent pas sur la voie des méthodes générales dont cette partie de l'analyse était susceptible. Aussi a-t-il fallu en quelque sorte a créer de nouveau dans les temps modernes. Fermat en est regardé comme le premier inventeur ; et les questions qu'il a proposées ou résolues, mais dont malheureusement les solu-

(*) *Algebra, with arithmetic and mensuration, from the sanscrit, of Brahmegupta and Bhascara, translated by Colebrooke*, in-4°, 1817.

tions ne nous sont pas parvenues, ont depuis occupé les plus célèbres géomètres.

La question qui paraît être plus particulièrement l'origine de la théorie des équations indéterminées du second degré, est celle de trouver les valeurs de x, rationnelles, en nombres entiers, qui rendent le binome $Cx^2 + 1$ un carré, ou en d'autres termes, c'est de résoudre l'équation $Cx^2 + 1 = y^2$, en valeurs rationnelles et entières de x et de y.

Cette question avait été proposée, en quelque sorte comme défi, aux géomètres anglais. Lord Brouncker et Wallis la résolurent, en donnant à x et à y des expressions générales de la forme $\frac{2m}{m^2 - c}$, et $\frac{m^2 + c}{m^2 - c}$. Frénicle trouva aussi cette solution. Et Ozanam, ainsi que Prestet, la donnèrent comme ayant été celle de Fermat.

Mais ces géomètres n'aperçurent pas toute l'importance de l'équation $Cx^2 + 1 = y^2$, qui était indispensable pour la résolution en nombres entiers, de l'équation plus générale $Cx^2 \pm A = y^2$, à laquelle se ramène la résolution de toutes les autres équations indéterminées du second degré. C'est à Euler qu'est due cette double remarque, qui a été l'origine des progrès de l'analyse indéterminée. Cependant « il est naturel de croire que Fermat, qui s'était principalement occupé de la théorie des nombres entiers, sur lesquels il nous a d'ailleurs laissé de très beaux théorèmes, avait été conduit au problème dont il s'agit (la résolution de l'équation $Cx^2 + 1 = y^2$) par les recherches qu'il avait faites sur la résolution générale des équations de la forme $Cx^2 + A = y^2$, auxquelles se réduisent toutes les équations du second degré à deux inconnues (*). » Mais la perte des manuscrits de Fermat a retardé de près d'un siècle la résolution des équations indéterminées du second degré, qui est due à Euler, et que Lagrange a complétée aussitôt, en ce qui regarde la condition de nombres entiers.

La solution d'Euler pour l'équation

$$Cx^2 + A = y^2$$

(*) Nous citons ici textuellement les paroles de Lagrange (parag. VIII, des *Additions aux Éléments d'Algèbre* d'Euler).

suppose, d'une part, que l'on connaisse un premier système de racines x', y', de cette équation, et ensuite qu'on sache résoudre l'équation

$$Cx^2 + 1 = y^2.$$

Soient a et b les racines de cette équation : les expressions des racines de la proposée seront

$$x = ay' + bx',$$
$$y = Cax' + by'.$$

Telle est la solution qu'Euler a obtenue par des considérations analytiques.

Eh bien ! cette solution, dont aucune trace ne s'est trouvée dans Diophante, qui a échappé aux recherches d'habiles géomètres modernes pendant près d'un siècle, et qui enfin a fait honneur au grand Euler, cette solution, dis-je, se trouve dans les ouvrages indiens, depuis plus de douze siècles, et a probablement une origine encore plus reculée. On conçoit d'après cela, qu'un célèbre analyste ait pu dire dernièrement, que si les ouvrages mathématiques hindous que de savants orientalistes de l'Angleterre nous ont fait connaître depuis une vingtaine d'années, eussent été apportés en Occident 60 ou 80 ans plus tôt, « leur apparition, même après la mort de Newton et » du vivant d'Euler, aurait pu hâter parmi nous les progrès de l'ana- » lyse algébrique (*). »

Bien que la solution des géomètres indiens soit la même que celle d'Euler, on verra peut-être avec intérêt sous quelle forme ils la présentent. Elle fait l'objet, dans l'ouvrage de Brahmegupta, de deux règles seulement, qui y sont énoncées de la manière la plus concise et la plus générale. En voici le sens, exprimé en langage algébrique :

Première règle. Pour la résolution de l'équation

$$Cx^2 + 1 = y^2.$$

(*) *Histoire des Sciences mathématiques en Italie*, t. Ier p. 133.

On prend un système de racines de l'équation

$$Cx^2 \pm A = y^2,$$

où A *est indéterminé; soient* l *et* g *ces racines, de sorte que l'on ait* $Cl^2 \pm A = g^2$*; les racines de la proposée seront*

$$y = \frac{Cl^2 + g^2}{A}, \quad \text{et} \quad x = \frac{2lg}{A}.$$

Remplaçant A par $g^2 - Cl^2$, et faisant $l = 1$, on aura précisément les expressions trouvées par Fermat, Brouncker, etc.

Seconde règle. Pour la résolution de l'équation

$$Cx^2 \pm A = y^2,$$

quand on connaît un premier système de racines L, G de cette équation :

On prend un système de racines de l'équation

$$Cx^2 + 1 = y^2;$$

soient l *et* g *ces racines;*

Les expressions générales des racines de la proposée seront

$$x = Lg + lG,$$
$$y = CLl + Gg \text{ (*)}.$$

(*) Pour donner un exemple du style et de la forme des ouvrages mathématiques des Indiens, qui sont encore peu connus, nous rapportons ici le texte même de Brahmegupta, suivant la traduction de M. Colebrooke. On y verra combien il serait difficile de les comprendre, si des applications numériques ne venaient au secours du lecteur.

La résolution des équations indéterminées du second degré, est l'objet des sections VI et VII de l'algèbre de Brahmegupta, appelée *Cuttaca.*

Dans la section VI, intitulée : *Equation involving a factum*, on résout l'équation $Ax + By + C = Dxy$.

Après ces deux règles, qui sont identiques à la solution d'Euler, Brahmegupta donne plusieurs règles particulières pour les cas où A et C sont des carrés, ou bien sont le produit de carrés par d'autres nombres. Et il résout ensuite plusieurs équations doubles.

La règle est ainsi énoncée, dès le début et sans aucune explication préliminaire :

« 61. Rule : The (product of) multiplication of the factum and absolute » number, added to the product of the (coefficients of the) unknown, is divided by » an arbitrarily assumed quantity. Of the arbitrary divisor and the quotient, » whichever is greatest is to be added to the least (coefficient), and the least to » the greatest. The two (sums) divided by the (coefficient of the) factum are » reversed. »

Ce qui signifie que les racines de l'équation proposée sont de la forme

$$y = \frac{A + n}{D},$$

$$x = \frac{B + \frac{C.D + A.B}{n}}{D}.$$

La section VII, où l'on résout l'équation $Cx^2 \pm A = y^2$, est intitulée : *Square affected by coefficient*, et commence ainsi :

« 65-66. Rule : A root (is set down) two-fold, and (another, deduced) from » the assumed square multiplied by the multiplier, and increased or diminished » by a quantity assumed. The product of the first (pair), taken into the mul- » tiplier, with the product of the last (pair) added, is a" last" root. The sum » of the products of oblique multiplication is a" first" root. The additive is the » product of the like additive or subtractive quantities. The roots (so found), » divided by the (original) additive or subtractive quantity, are (roots answe- » ring) for additive unity. »

Puis vient un exemple numérique, et ensuite la seconde règle, que voici :

« 68. Rule : Putting severally the roots for additive unity under roots for » the given additive or subtractive, "last" and "first" roots (thence deduced » by composition) serve for the given additive or subtractive. »

Nous avons donné ci-dessus le sens de ces deux règles, dont la première s'applique à l'équation $Cx^2 + 1 = y^2$, et la seconde à l'équation $Cx^2 \pm A = y^2$.

Les mots entre parenthèses, dans le texte anglais, ont été ajoutés par M. Co-

En parlant des géomètres qui, après Diophante, et depuis Fermat jusqu'à Lagrange, ont concouru au perfectionnement de l'analyse indéterminée, nous nous sommes renfermé dans les citations historiques que l'on a coutume de faire au sujet de cette partie de l'algèbre. Mais il paraît qu'on a toujours commis sur ce point une omission, qu'il est d'autant plus à propos de réparer ici, en parlant de l'analyse indienne, que cette omission porte précisément sur une solution qui nous paraît dériver des ouvrages hindous; solution qui aurait suppléé ces ouvrages, et aurait mis aussitôt sur la voie des découvertes réservées à Euler les géomètres qui en auraient eu connaissance. Nous voulons parler de quelques questions d'analyse indéterminée, résolues par Fibonacci (appelé communément Léonard de Pise) dans son traité d'algèbre, ouvrage original, resté manuscrit au grand regret des géomètres. Ces questions ont été reproduites par Lucas de Burgo, dans sa *Summa de Arithmetica, Geometria, etc.*, et par Cardan dans son traité d'Arithmétique (*).

Celle qui se rapporte à l'équation $Cx^2 \pm A = y^2$, et qui en contient virtuellement la solution donnée par Euler, est celle-ci : *étant donnés deux nombres carrés, diviser leur somme en deux autres nombres carrés*, ou en d'autres termes

Résoudre en nombres rationnels, l'équation

$$x^2 + y^2 = A,$$

---

lebrooke. On voit quelle difficulté présentait, par sa concision extrême, le texte original.

Bhascara est moins concis que Brahmegupta, il dit en plusieurs paragraphes ce que celui-ci avait exprimé en un seul ; mais il n'est guère plus intelligible. Nous parlerons dans un autre écrit des différences notables, sous le rapport scientifique, que nous avons remarquées dans la partie géométrique des deux ouvrages, et qui nous portent à regarder Brahmegupta comme ayant été supérieur à Bhascara, qui n'est, par rapport à lui, qu'un scoliaste qui ne l'a pas toujours compris.

(1) Viète est le premier qui ait démontré les formules de Fibonacci, pour l'équation $x^2 + y^2 = A$, au commencement du livre IV, de ses *Zététiques*. Peu de temps après, Alexandre Anderson s'est occupé de la même question ; mais seulement pour donner une démonstration géométrique des formules de Diophante.

quand on connaît un premier système de racines, x', y' de cette équation.

On prendra deux nombres quelconques a, b, dont la somme des carrés, soit un carré c^2; ce qui peut se faire d'une infinité de manières. [Le premier nombre a étant pris arbitrairement, le second sera de la forme $\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{n}-n\right)$].

On a donc

$$x'^2 + y'^2 = A,$$

et

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

D'après cela, les expressions générales des racines de l'équation proposée seront

$$x = \frac{ay' + bx'}{c},$$
$$y = \frac{ax' - by'}{c}.$$

Telle est la solution rapportée sans démonstration et appliquée à plusieurs exemples numériques par Lucas de Burgo et Cardan (*).

Ces formules auraient dû attirer l'attention des analystes, ne fût-ce

---

(*) Lucas de Burgo et Cardan annoncent que cette solution est de Léonard de Pise; et le premier ajoute qu'elle se trouve dans son *Traité des nombres carrés*, et qu'elle y est démontrée *par la considération des figures géométriques*. Ce traité, malheureusement, n'existe plus (Montucla, *Histoire des Mathématiques*, t. II, *Additions*, p. 715). M. Cossali l'a rétabli avec succès, d'après les fragments qui s'en trouvent dans Lucas de Burgo (Colebrooke, *Brahmegupta and Bhascara, Algebra*, Dissertation; p. LVII). Mais il n'a pas rétabli la démonstration géométrique. (Voir *Origine, trasporto in Italia, primi progressi in essa dell' Algebra*, t. Ier, ch. V, p. 96).

M. Colebrooke, en parlant des questions d'analyse indéterminée, traitées par Lucas de Burgo, cite un passage de la *Summa de Arithmetica*, où il est question de Fibonacci; mais ce n'est pas celui où est résolue l'équation $x^2+y^2=A$, et où il est dit que Fibonacci employait des considérations de géométrie. M. Colebrooke paraît n'avoir pas remarqué ce passage, ni, surtout, l'analogie que présentent les formules de Fibonacci avec celles de Brahmegupta.

que par la différence qu'elles présentent avec la solution de Diophante. Celle-ci en effet, exposée algébriquement et sous la forme la plus générale, conduit aux formules suivantes

$$x = \frac{(n^2 - 1)x' + 2ny'}{n^2 + 1},$$
$$y = \frac{2nx' - (n^2 - 1)y'}{n^2 + 1},$$

qui ne contiennent qu'une indéterminée n, et qui, ne faisant point usage de l'équation auxiliaire $a^2 + b^2 = c^2$, ne sont pas propres à la solution de la question en nombres entiers. On voit donc quel avantage présentaient les formules des géomètres italiens.

On reconnaît, à la première vue de ces formules, toute leur analogie avec celles d'Euler et de Brahmegupta, dont elles ne sont qu'un cas particulier. Mais ce qu'il y a de remarquable c'est que, de ce cas particulier, on peut s'élever naturellement et sans aucune difficulté au cas général, ainsi que nous le verrons, de sorte que cette équation, si elle avait fixé les regards des géomètres, les aurait conduits depuis long-temps à la solution générale, propre à la condition de nombres entiers, telle que nous la trouvons chez les Indiens, et telle que Euler l'a découverte dans le siècle dernier.

Nous avons dit que cette solution de Lucas de Burgo et de Cardan, nous paraissait dériver de celle des Indiens. En effet, Fibonacci, qui l'a fait connaître en Europe, avait rapporté ses connaissances mathématiques de chez les Arabes; c'est donc à eux que paraît due cette solution; or, les Arabes, placés entre l'Inde et l'Égypte, avaient emprunté leur science des Grecs d'Alexandrie et des Hindous. Les Grecs, comme nous le voyons par les solutions de Diophante, n'ont point connu celle dont il est question. Elle est donc venue des Hindous (*), qui la possédaient depuis plusieurs siècles. Les ouvrages des

(*). La manière dont Lucas de Burgo et Cardan disposent sur le papier, les quantités connues, pour effectuer le calcul des racines cherchées, a la plus grande ressemblance avec la manière des Indiens, et dénote l'origine de leur méthode.

Les Indiens placent les deux racines données x', y', l'une à côté de l'autre

Arabes, qui nous sont connus en trop petit nombre, et auxquels on a fait peu d'attention, parce qu'on a cru n'y trouver qu'un faible écho de l'École grecque, doivent inspirer plus d'intérêt, aujourd'hui que l'on y reconnaît des traces prononcées d'un autre foyer de lumières.

Les ouvrages indiens ne contiennent aucune démonstration. A la faveur de cette circonstance, quelques écrivains, encore tout pleins de l'étonnement que leur avait causé la vue des théories savantes et des questions difficiles qu'ils renferment, et peut-être un peu préoccupés de l'intérêt des Grecs qui n'avaient point eu de rivaux jusqu'ici, ont cru pouvoir attribuer les découvertes analytiques des Hindous à quelques rencontres dues au hasard, et provoquées seulement par des essais isolés et faits sans méthode ni intelligence. Mais une telle opinion ne pouvait se soutenir, et nous devons reconnaître dans les ouvrages indiens les vestiges d'une science depuis long-temps cultivée, et parvenue, dans de certaines limites, à une grande perfection.

Nous n'avions nullement l'intention de chercher à rétablir quelques démonstrations qui pourraient répondre aux théories algébriques des Hindous, quand une remarque à laquelle nous a conduit l'examen de la partie géométrique que contiennent leurs ouvrages, nous a mis sur la voie d'une solution *géométrique* des équations indéterminées du second degré, qui donne précisément les formules de Brahmegupta. Cela nous a fait supposer que c'était aussi par des

---

sur une ligne horizontale; et au-dessous d'elles sur une seconde ligne horizontale, ils placent les deux racines a, b, de l'équation auxiliaire, de sorte que x' et a sont sur une ligne verticale, et y' et b sur une seconde ligne verticale. Puis ils multiplient l'une par l'autre, les deux x' et a qui sont sur la première ligne verticale, et ensuite les deux autres. Ils font la différence des deux produits, et la divisent par c; c'est l'une des racines. Pour former l'autre, ils multiplient les quatre nombres *en croix*, et font la somme des deux produits, qui, divisée par c, donne la seconde racine.

Les géomètres italiens opèrent de même, si ce n'est qu'ils placent l'une à côté de l'autre, les deux racines x' et a, et au-dessous d'elles les deux y' et b. Ils emploient, comme les Indiens, l'expression de multiplication *en croix*.

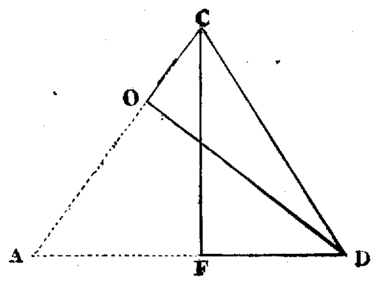
considérations géométriques que cet auteur était parvenu à cette solution; et en effet, on sait que les Indiens, et à leur imitation les Arabes, employaient toujours concurremment la géométrie et l'analyse (*), celle-ci pour résoudre leurs questions géométriques; et la première pour démontrer leurs règles d'analyse, et interpréter et peindre aux yeux les résultats de l'algèbre. Cela nous expliquerait aussi la présence, dans les ouvrages de Brahmegupta, de cette partie géométrique, à laquelle on a fait peu d'attention, et sur laquelle, généralement on s'est mépris, je crois, en la regardant comme formant les éléments de géométrie des Hindous ou du moins le résultat des connaissances géométriques dont ils se servaient. Dans un autre écrit, j'entrerai dans quelques développements à ce sujet, en donnant l'interprétation des propositions de géométrie de Brahmegupta dont on n'a point encore parlé, et qui avaient besoin d'être devinées. Si je ne me trompe, elles roulent presque toutes sur une seule théorie géométrique, qui est celle du quadrilatère inscrit au cercle, et résolvent la question de construire un quadrilatère inscriptible, dont l'aire, les diagonales et plusieurs autres lignes, ainsi que le diamètre du cercle, soient exprimés en nombres rationnels.

C'est dans cette question même que nous avons trouvé une méthode géométrique pour la résolution des équations indéterminées du second degré, méthode que nous supposons avoir pu être celle de Brahmegupta. Nous l'exposerons dans l'écrit dont nous venons de parler; mais ces considérations nous ont conduit à une méthode plus directe et plus élémentaire. C'est celle que nous allons présenter.

Question. *Connaissant un premier système de racines* x', y', *de l'équation* $x^2+y^2=A$, *on demande de trouver d'autres racines rationnelles de cette équation.*

Solution géométrique. Que l'on forme un triangle rectangle COD, qui ait pour côtés de l'angle droit $OC=x'$, $OD=y'$, la question sera de construire sur l'hypoténuse CD un autre triangle CFD, dont les côtés CF, FD soient rationnels.

(*) Colebrooke, *Algebra of Brahmegupta and Bhascara;* Introduction historique, p. 15; Libri, *Histoire des Sciences mathématiques en Italie*, t. Ier, p. 136



Prolongeons les côtés CO, DF, jusqu'à leur rencontre en A; on a le triangle CAD, dans lequel les perpendiculaires DO, CF, sont en raison inverse des côtés CA, DA. Si donc ces côtés sont rationnels, la perpendiculaire CF, qui est l'une des racines de l'équation proposée, le sera aussi; le segment DF, qui est l'autre racine, sera aussi rationnel, suivant son expression connue en fonction de trois côtés $\left(FD = \frac{\overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 - \overline{AC}^2}{2AD}\right)$. Or on a CA = AO + CO; CO est rationnel, par hypothèse; donc il faut que AO soit rationnel. Donc la question se réduit à construire sur le côté DO un triangle rectangle AOD, dont les côtés soient rationnels. On sait former un tel triangle d'une infinité de manières, par la formule suivante. très connue et fort usitée en analyse et en géométrie

$$\overline{OD}^2 + \tfrac{1}{4}\left(\frac{\overline{OD}^2}{n} - n\right)^2 = \tfrac{1}{4}\left(\frac{\overline{OD}^2}{n} + n\right)^2 \ (*);$$

(*) Cette formule est d'un grand usage dans les ouvrages de Brahmegupta et de Bhascara. Elle est une généralisation des deux règles imaginées par Pythagore et Platon, pour construire sur un côté donné un triangle rectangle en nombres rationnels et entiers.

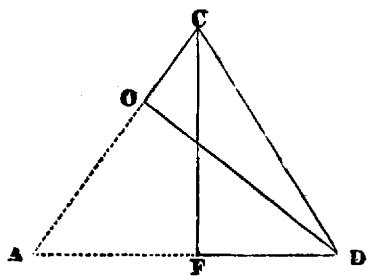
Si le côté donné est un nombre impair, il faut supposer $n = 1$, et l'on a la règle de Pythagore; si le côté est pair, on suppose $n = 2$, et l'on a la règle de Platon.

C'est d'après Proclus (*In primum Euclidis elementorum librum commentariorum Libri* IV, proposition 47), que l'on attribue ces deux règles à Pythagore et à Platon; mais Boece, antérieur de près d'un siècle à Proclus, donne la seconde dans le second livre de sa Géométrie, comme étant d'Archytas, célèbre pythagoricien, dont Platon avait suivi les leçons en Italie.

c'est-à-dire qu'on prendra le côté OA égal à $\frac{1}{2}\left(\frac{\overline{OD}^2}{n} - n\right)$, et l'hypoténuse AD égale à $\frac{1}{2}\left(\frac{\overline{OD}^2}{n} + n\right)$; n étant un nombre arbitraire.

Ayant construit ce triangle AOD, on abaissera du point C la perpendiculaire CF sur son hypoténuse, cette perpendiculaire CF, et le segment DF qu'elle détermine, seront les deux racines cherchées.

Ainsi la question est résolue *par une construction géométrique.*



Pour passer de cette solution géométrique aux formules de l'analyse, il suffit de chercher les expressions de CF et DF, en fonction des lignes qui servent à construire ces racines.

La comparaison des triangles semblables ACF, ADO, donne

$$CF = DO \cdot \frac{AC}{AD}, \quad AF = AO \cdot \frac{AC}{AD}.$$

Or

$$DF = AD - AF, \quad \text{et} \quad AC = AO + OC;$$

on conclut de là

$$CF = \frac{DO \cdot AO + DO \cdot OC}{AD},$$

$$DF = \frac{\overline{OD}^2 - OA \cdot OC}{AD}.$$

Telles sont les expressions des racines de l'équation proposée: elles sont rationnelles, puisque CO et DO le sont par hypothèse, et OD, DA par construction.

Pour donner à ces formules la forme de celles de Léonard de

Pise, faisons

$$\mathrm{CO} = x',\quad \mathrm{OD} = y',\quad \mathrm{CF} = x,\quad \mathrm{DF} = y,$$
$$\mathrm{OA} = a,\quad \mathrm{AD} = c;$$

il viendra

$$x = \frac{ay' + y'x'}{c},$$
$$y = \frac{ax' - y'^2}{c}.$$

On a entre a, c et y' la relation

$$c^2 - a^2 = y'^2;$$

ou

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{y'^2}{a^2} = 1.$$

Représentons $\frac{a}{c}$ par $\frac{\alpha}{\gamma}$, $\frac{y'}{c}$ par $\frac{6}{\gamma}$; les trois indéterminées α, 6, γ, seront liées par l'équation

$$\alpha^2 + 6^2 = \gamma^2;$$

et les formules deviendront

$$x = \frac{\alpha y' + 6x'}{\gamma},$$
$$y = \frac{\alpha x' - 6y'}{\gamma}.$$

Elles sont les mêmes que celles d'Euler, pour le cas particulier $x^2 + y^2 = \mathrm{A}$.

Il est facile de passer de là à la résolution de l'équation $\mathrm{C}x^2 + y^2 = \mathrm{A}$.

En effet, dans l'équation $x^2 + y^2 = \mathrm{A}$, et dans les deux équations de condition

$$x'^2 + y'^2 = \mathrm{A},$$
$$\alpha^2 + 6^2 = \gamma^2,$$

remplaçons x par $x\sqrt{C}$, x' par $x'\sqrt{C}$, α par $\alpha\sqrt{C}$; elles deviendront

$$\begin{aligned} Cx^2 + y^2 &= A, \\ Cx'^2 + y'^2 &= A, \\ \alpha^2 + \beta^2 &= \gamma^2. \end{aligned}$$

Et les expressions des racines x et y, trouvées ci-dessus, deviendront

$$x\sqrt{C} = \frac{\alpha y'\sqrt{C} + \beta x'\sqrt{C}}{\gamma},$$
$$y = \frac{C\alpha x' - \beta y'}{\gamma},$$

ou

$$x = \frac{\alpha y' + \beta x'}{\gamma},$$
$$y = \frac{C\alpha x' - \beta y'}{\gamma}.$$

Ce sont les racines qui répondent à l'équation

$$Cx^2 + y^2 = A.$$

Maintenant, ces racines rendant identique cette équation, quelles que soient les valeurs des deux nombres C et A, on peut les supposer négatives; de sorte que l'équation peut prendre la forme

$$Cx^2 \pm A = y^2,$$

et ses racines deviennent

$$x = \frac{\alpha y' + \beta x'}{\gamma},$$
$$y = \frac{C\alpha x' + \beta y'}{\gamma}.$$

Nous donnons le signe $+$ à la valeur de y, parce que cette variable n'entrant qu'au carré dans l'équation, son signe est indifférent.

Les équations de condition pour x', y', et pour α, β, γ, sont

$$Cx'^2 \pm A = y'^2,$$

et

$$C\alpha^2 + 1 = \beta^2.$$

C'est-à-dire que x' et y' sont un système de racines de l'équation proposée, et $\frac{\alpha}{\gamma}$, $\frac{\beta}{\gamma}$, sont un système de racines de l'équation $Cx^2 + 1 = y^2$.

Nous avons donc obtenu précisément la solution de Brahmegupta et d'Euler, et nous l'avons déduite, ainsi que nous l'avions annoncé, de pures considérations de géométrie, qui n'ont demandé aucune connaissance de l'algèbre.

Mais nous devons observer que l'introduction du coefficient C, et le changement de son signe, dans l'équation de condition primitive $\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2$, dont nous savions construire géométriquement les racines rationnelles, exige que nous sachions résoudre l'équation $Cx^2 + 1 = y^2$, qui remplace cette équation primitive.

Pour résoudre cette équation, il se présente deux procédés. D'abord nous pouvons nous servir de la même formule

$$4m^2n^2 + (m^2 - n^2)^2 = (m^2 + n^2)^2,$$

qui nous a déjà servi pour former les racines de l'équation $a^2+b^2=c^2$.

A cet effet, nous l'écrirons sous la forme

$$\frac{4m^2n^2}{(m^2 - n^2)^2} + 1 = \frac{(m^2 + n^2)^2}{(m^2 + n^2)^2};$$

faisons $n = \sqrt{C}$, il vient

$$\frac{4Cm^2}{(m^2 - C)^2} + 1 = \frac{(m^2 + C)^2}{(m^2 - C)^2};$$

comparant cette identité à l'équation

$$Cx^2 + 1 = y^2,$$

on voit que les racines de celle-ci sont de la forme

$$x = \frac{2m}{m^2 - C}, \quad y = \frac{m^2 + C}{m^2 - C}.$$

Conséquemment, les valeurs de $\frac{\alpha}{\gamma}$ et $\frac{\beta}{\gamma}$, dans l'équation de condition $C\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2$, seront

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{2m}{m^2 - C}, \quad \frac{\beta}{\gamma} = \frac{m^2 + C}{m^2 - C}.$$

La seconde manière d'obtenir ces valeurs de $\frac{\alpha}{\gamma}$ et $\frac{\beta}{\gamma}$, résulte des formules mêmes que nous avons trouvées pour les racines de l'équation $Cx^2 \pm A = y^2$.

En effet ces formules, si l'on y regarde $\frac{\alpha}{\gamma}$, $\frac{\beta}{\gamma}$ comme les inconnues, donneront des valeurs rationnelles de ces quantités, qui seront des racines de l'équation $Cx^2 + 1 = y^2$, en fonction de deux systèmes de racines de l'équation $Cx^2 \pm A = y^2$.

Voici quelles sont ces valeurs

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{xy' - yx'}{y'^2 - Cx'^2}, \quad \frac{\beta}{\gamma} = \frac{yy' - Cxx'}{y'^2 - Cx'^2},$$

x, y et x', y', sont deux systèmes quelconques de racines de l'équation $Cx^2 \pm A = y^2$. On peut supposer $x' = -x$, et $y' = y$. Alors les valeurs de $\frac{\alpha}{\gamma}$ et $\frac{\beta}{\gamma}$ deviennent

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{2xy}{y^2 - Cx^2}, \quad \frac{\beta}{\gamma} = \frac{y^2 + Cx^2}{y^2 - Cx^2}.$$

Ce sont les racines de l'équation $Cx^2 + 1 = y^2$, en fonction d'un système de racines de l'équation $Cx^2 \pm A = y^2$.

Dans celle-ci A est arbitraire; on pourra donc prendre pour x et y deux nombres quelconques, et alors A se trouvera déterminé.

Cela nous donne lieu aux deux observations suivantes :

D'abord x et y pouvant être quelconques, faisant $x = 1$, et remplaçant y par m, on a précisément les expressions de $\frac{\alpha}{\gamma}$, $\frac{\beta}{\gamma}$ que nous avions trouvées ci-dessus.

En second lieu, si l'on considère x et y comme racines de l'équation $Cx^2 \pm A = y^2$, et qu'on remplace $y^2 - Cx^2$ par A, les expressions de $\frac{\alpha}{\gamma}$ et $\frac{\beta}{\gamma}$ deviennent

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{2xy}{\pm A}, \quad \frac{\beta}{\gamma} = \frac{y^2 + Cx^2}{\pm A}.$$

Ces expressions répondent parfaitement à la première des deux règles qui comprennent, dans Brahmegupta, la résolution des équations indéterminées du second degré.

On pourrait donc supposer, jusqu'à un certain point, que ce sont des considérations géométriques, analogues à celles que nous avons employées, qui ont conduit le géomètre indien à la solution de ce problème d'analyse; ajoutons, pour justifier une telle supposition, que c'est dans la partie géométrique même de l'ouvrage de Brahmegupta, que nous avons puisé l'idée de recourir à la géométrie, pour résoudre les questions précédentes; ce que nous exposerons dans un autre écrit.

Nous avons appliqué d'abord la solution géométrique à l'équation particulière $x^2 + y^2 = A$, pour montrer comment on pouvait s'élever naturellement, et sans calcul, de ce cas particulier au cas général, et pour prouver qu'ainsi que nous l'avions avancé, la solution de Lucas de Burgo et de Cardan comprenait virtuellement les formules d'Euler. Mais la solution géométrique peut s'appliquer directement à l'équation $Cx^2 + y^2 = A$.

Pour cela, x' et y' étant les deux racines données, on construira le triangle rectangle COD, en prenant $CO = x'\sqrt{C}$, et $DO = y'$; de manière qu'on aura

$$\overline{CO}^2 + \overline{OD}^2 = A.$$

Soit un second triangle rectangle CFD, on aura

$$\overline{CF}^2 + \overline{DF}^2 = \overline{DC}^2 = A.$$

Donc, si l'on prend

$$x = \frac{CF}{\sqrt{C}} \quad \text{et} \quad y = DF,$$

on aura

$$Cx^2 + y^2 = A;$$

de sorte que x et y seront deux racines cherchées, pourvu toutefois que x soit rationnelle, ce qui exige que CF soit de la forme $a\sqrt{C}$.

Or on a dans le triangle CAD

$$\frac{CF}{DO} = \frac{CA}{DA};$$

donc CF aura la forme $a\sqrt{C}$, si CA est égal à $n\sqrt{C}$, et DA un nombre.

Or

$$CA = CO + OA = x'\sqrt{C} + OA.$$

Il faut donc que OA soit de la forme $\alpha\sqrt{C}$: c'est-à-dire qu'il faut construire sur le côté DO un triangle rectangle dont le second côté OA soit $\alpha\sqrt{C}$, et dont l'hypoténuse soit rationnelle. Ce qu'on fait par la formule

$$4m^2n^2 + (m^2 - n^2)^2 = (m^2 + n^2)^2,$$

ou

$$\frac{4m^2n^2.\overline{OD}^2}{(m^2 - n^2)^2} + \overline{OD}^2 = \frac{(m^2 + n)^2}{(m^2 - n^2)^2}.\overline{OD}^2$$

où l'on fait $n^2 = C$, ce qui donne

$$\frac{4Cm^2.\overline{OD}^2}{(m^2 - C)^2} + \overline{OD}^2 = \frac{(m^2 + C)^2}{(m^2 - C)^2}\overline{OD}^2.$$

Ainsi l'on prendra

$$OA = \frac{2m.OD}{m^2 - C}\sqrt{C}, \quad \text{et} \quad DA = \frac{m^2 + C}{m^2 - C}.OD.$$

De sorte que OA et DA, ont les valeurs voulues.

D'après cela, CF aura une expression de la forme N $\sqrt{C}$, et DF sera rationnel, parce que son expression connue dans la géométrie élémentaire, ne contient que les carrés des deux côtés CD, CA.

Ainsi $\frac{CF}{\sqrt{C}}$ et CD seront rationnelles, or ce sont les racines de l'équation $Cx^2+y^2=A$: cette équation est donc résolue géométriquement.

Cherchant les expressions des lignes CF et DF, comme nous l'avons déjà fait, on obtiendra les formules d'Euler.

Remarquons que cette solution consiste uniquement à construire le triangle AOD, dont le côté OA soit de la forme $\alpha\sqrt{C}$, et dont l'hypoténuse DA soit rationnelle, égale à $\mathcal{C}$. Cela répond en analyse, à résoudre l'équation

$$C\alpha^2+\overline{OD}^2=\mathcal{C}^2,$$

ou

$$\frac{C\alpha^2}{\overline{OD}^2}+1=\frac{\mathcal{C}^2}{\overline{OD}^2},$$

ou

$$Cx^2+1=y^2.$$

Les considérations géométriques montrent donc bien comment cette équation auxiliaire s'introduit dans la question, et y joue le rôle important que Brahmegupta et Euler lui ont reconnu.