JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

BINET

Note sur l'intégration d'un système d'équations différentielles du second ordre, entre un nombre quelconque de variables, analogues à celles du mouvement d'un point libre autour d'un centre fixe, sollicité par une force fonction de la distance au centre

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 2 (1837), p. 457-468.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1837_1_2__457_0>

NOTE

Sur l'intégration d'un système d'équations différentielles du second ordre, entre un nombre quelconque de variables, analogues à celles du mouvement d'un point libre autour d'un centre fixe, sollicité par une force fonction de la distance au centre ;

Par M. BINET,

Professeur au Collége de France.

---

[1] Les équations dont on va s'occuper ici sont de la forme

$$\frac{d^2u}{dt^2}=\frac{dR}{du},\quad \frac{d^2v}{dt^2}=\frac{dR}{dv},\quad \frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dR}{dx},\quad \text{etc.}:$$

u, v, x,... sont les variables principales à déterminer en fonction de t ; R est une fonction de la quantité $r=\sqrt{u^2+v^2+x^2+y^2+\text{etc.}}$, en sorte que $\frac{dR}{du}=\frac{dR}{dr}\frac{u}{r}$, $\frac{dR}{dv}=\frac{dR}{dr}\frac{v}{r}$, etc.

Lorsque leur nombre ne surpasse pas trois, ces équations se rapportent au mouvement d'un point attiré vers un centre fixe, par une force dont l'expression est $\frac{dR}{dr}$, et l'intégration présente peu de difficultés, ainsi qu'on peut le voir dans plusieurs traités de mécanique et dans un mémoire récent de M. Poisson, pages 331 et 332 du second volume de ce recueil. Je citerai encore, pour son élégance, la solution donnée par M. Gabrio Piola, dans un mémoire sur la Mécanique analytique couronné en 1824 par l'Académie de Turin. Pour le cas de trois variables, afin d'achever l'intégration, on a recours ordinairement à des considérations géométriques. Je suis loin de blâmer l'emploi de ces considérations dans des questions de Mécanique, qui ne sont en grande partie que des problèmes de Géométrie : les résultats obtenus y trouvent souvent une interprétation naturelle et simple, et l'analyse y puise, par fois, des ressources précieuses. Mais dès que le nombre des variables principales est au-dessus de trois, l'analyste ne peut plus guère compter sur les secours de la Géométrie proprement dite. Il convient alors qu'il se crée une marche purement algébrique. Celle que nous allons suivre pour intégrer les équations dont il s'agit conduit à ce résultat remarquable que, quel que soit le nombre des variables, leurs expressions ne dépendent que d'une seule fonction différentielle de la variable r à intégrer, pour chaque forme assignée à la fonction R. D'autres voies peuvent fournir le même résultat; mais elles m'ont paru présenter une assez grande complication, lorsque le nombre des variables est supérieur à trois.

[2]. Considérons donc les n équations différentielles du second ordre de la forme

$$(1)\qquad \frac{d^2u}{dt^2} = \frac{dR}{dr}\frac{u}{r}, \quad \frac{d^2v}{dt^2} = \frac{dR}{dr}\frac{v}{r}, \text{ etc.},$$

entre les n quantités u, v, x, y, etc. et la variable t.

En les combinant deux à deux, on formera, par l'élimination de $\frac{dR}{dr}$, des équations telles que

$$\frac{vd^2u - ud^2v}{dt^2} = 0, \quad \frac{xd^2u - ud^2x}{dt^2} = 0, \text{ etc.}$$

d'où l'on tire les intégrales premières, en nombre $n.\frac{n-1}{2}$,

$$\begin{aligned} &vu' - uv' = \text{constante}, \\ &xu' - ux' = \text{const.}, \\ &xv' - vx' = \text{const.}, \\ &\text{etc. :} \end{aligned}$$

selon la notation ordinaire, nous avons désigné, pour abréger, dans ces formules, par u', v', x', etc. les quantités différentielles $\frac{du}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$, etc.

La somme des carrés de ces équations donnera

$$(2) \quad (vu'-uv')^2+(xu'-ux')^2+\text{etc.}+(xv'-vx')^2+\text{etc.}=A^2,$$

A^2 représentant une constante positive. En vertu d'un théorème d'algèbre, on sait que cette somme de carrés peut être mise sous la forme

$$(u^2+v^2+x^2+\text{etc.})(u'^2+v'^2+x'^2+\text{etc.})-(uu'+vv'+xx'+\text{etc.})^2=A^2.$$

En multipliant respectivement par du, dv, dx..., les équations proposées et les ajoutant, le premier membre $\frac{du\,d^2u+dv\,d^2v+\text{etc.}}{dt^2}$ sera la différentielle de $\frac{u'^2+v'^2+x'^2+y'^2+\text{etc.}}{2}$, et le second membre sera aussi la différentielle $\frac{dR}{dr}\,dr=dR$; on aura donc en intégrant, et prenant B pour une constante arbitraire,

$$u'^2+v'^2+x'^2+y'^2+\text{etc.}=2R+B.$$

Substituant dans le premier membre de l'équation (2), cette valeur, et pour u^2+v^2+ etc. la quantité r^2, on en déduira

$$(uu'+vv'+xx'+\text{etc.})^2=2r^2(R+B)-A^2;$$

mais
$$uu'+vv'+\text{etc.}=rr'=\frac{rdr}{dt};$$

partant
$$\frac{r^2dr^2}{dt^2}=2r^2(R+B)-A^2;$$

d'où l'on tire

$$(3) \qquad dt=\frac{rdr}{\sqrt{2r^2(R+B)-A^2}}.$$

De la même équation l'on déduit encore

$$\frac{dr^2}{dt^2}=2R+2B-\frac{A^2}{r^2};$$

étant différentiée, et divisée par $2dr$, elle devient

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{dR}{dr} + \frac{A^2}{r^3}.$$

On peut à l'aide de cette formule éliminer $\frac{dR}{dr}$ de la première des équations (1); elle donnera, après avoir été multipliée par r,

$$\frac{rd^2u}{dt^2} - \frac{ud^2r}{dt^2} + \frac{A^2}{r^2} \cdot \frac{u}{r} = 0 ;$$

mais

$$rd^2u - ud^2r = d[rdu - udr] = d\left[r^2d\left(\frac{u}{r}\right)\right].$$

Cette équation pourra donc être mise sous la forme

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{r^2d}{dt}\left(\frac{u}{r}\right)\right] + \frac{A^2}{r^2}\frac{u}{r} = 0 ;$$

ou bien, en la multipliant par $\frac{r^2}{A^2}$,

$$\frac{r^2d}{Adt}\left[\frac{r^2d}{Adt}\left(\frac{u}{r}\right)\right] + \frac{u}{r} = 0.$$

Elle deviendra plus simple en y employant une variable auxiliaire φ, telle que

$$(4) \qquad d\varphi = \frac{Adt}{r^2} = \frac{Adr}{r\sqrt{2r^2(R+B) - A^2}};$$

car elle se change en celle-ci :

$$\frac{dd(u:r)}{d\varphi\ d\varphi} + \frac{u}{r} = 0,$$

dans laquelle $\frac{u}{r}$ peut être considéré comme une variable principale à déterminer en fonction de φ. On aura de la même manière

$$\frac{d^2(v:r)}{d\varphi^2} + \frac{v}{r} = 0, \quad \frac{d^2(x:r)}{d\varphi^2} + \frac{x}{r} = 0, \text{ etc.}$$

[3]. Ces équations s'intègrent séparément, et en désignant par $g, h, g_{,}, h_{,}, g_{,,}, h_{,,}, \ldots$ des constantes arbitraires en nombre $2n$, on aura

$$(5)\quad \left\{\begin{array}{l} \frac{u}{r} = g\cos\varphi + h\sin\varphi, \\ \frac{v}{r} = g_{,}\cos\varphi + h_{,}\sin\varphi, \\ \frac{x}{r} = g_{,,}\cos\varphi + h_{,,}\sin\varphi, \\ \text{etc.} \end{array}\right.$$

De l'équation (3), on tire par l'intégration

$$(6)\qquad t + \alpha = \int \frac{rdr}{\sqrt{2r^2(R+B) - A^2}}.$$

Le second membre étant une fonction de r, on aura par cette équation la valeur de r en fonction de $t + \alpha$. L'intégration de la formule (4) donnera

$$(7)\qquad \varphi + \mathcal{C} = \int \frac{Adr}{r\sqrt{2r^2(R+B) - A^2}},$$

au moyen de laquelle on obtiendra φ en fonction de r, et par suite en fonction de $t + \alpha$. Ayant ainsi r et φ en fonctions de $t + \alpha$, les équations (5) donneront les valeurs des n variables $u, v, x, y, \ldots$ en fonctions de $t + \alpha$, de $\mathcal{C}$, de A, B, et des $2n$ constantes, $g, g_{,}, g_{,,}, \ldots h, h_{,}, h_{,,}, \ldots$; c'est-à-dire que dans ces expressions il entrera $2n + 4$ arbitraires. On doit en conclure qu'il existe entre ces quantités plusieurs relations, car le problème n'admet que $2n$ arbitraires.

[4]. En premier lieu, on voit que la constante $\mathcal{C}$ ne fera que modifier les arbitraires $g, h, g_{,}, h_{,}$, etc., et que par suite on peut n'y avoir aucun égard en la traitant comme déjà comprise dans ces arbitraires. Ainsi le nombre des constantes ne doit plus compter que pour $2n + 3$. De l'équation $r^2 = u^2 + v^2 + x^2 + y^2 +$ etc., on tire $1 = \frac{u^2}{r^2} + \frac{v^2}{r^2} + \frac{x^2}{r^2} +$ etc.; substituant les valeurs du $\frac{u}{r}$, $\frac{v}{r}$, etc., données par les équations (5), et représentant $g^2 + g_{,}^2 + g_{,,}^2 +$ etc.

par Σg^2, $gh + g_, h_, +$ etc., par Σgh, etc., on aura

$$1 = \cos^2\varphi\,\Sigma g^2 + \sin^2\varphi\,\Sigma h^2 + 2\sin\varphi\cos\varphi\,\Sigma gh.$$

Cette équation devant avoir lieu pour toute valeur de φ, elle entraîne les trois suivantes :

$$(8) \qquad 1 = \Sigma g^2, \quad 1 = \Sigma h^2, \quad 0 = \Sigma gh.$$

Ces égalités limitent les $2n + 3$ arbitraires qui entrent dans les expressions de u, v, x, y... en fonctions de la variable t, à $2n$ constantes indépendantes.

Pour satisfaire à ces conditions, on pourra donner aux arbitraires g, $g_,$, $g_{,,}$, etc., h, $h_,$, $h_{,,}$ etc., une forme particulière que nous allons indiquer pour le cas de quatre variables u, v, x, y : cet exemple suffira pour faire comprendre un mode de composition qui s'étend à un nombre quelconque de quantités g, h, etc., etc. Nous poserons donc

$$g = \cos\gamma, \quad g_, = \sin\gamma\cos\gamma_,, \quad g_{,,} = \sin\gamma\sin\gamma_,\cos\gamma_{,,},$$
$$g_{,,,} = \sin\gamma\sin\gamma_,\sin\gamma_{,,}:$$

quels que soient les angles $\gamma, \gamma_,, \gamma_{,,}$ qui, sont en nombre $4 - 1 = 3$, on a manifestement

$$g^2 + g_,^2 + g_{,,}^2 + g_{,,,}^2 = 1.$$

On posera aussi

$$h = \cos\varkappa, \quad h_, = \sin\varkappa\cos\varkappa_,, \quad h_{,,} = \sin\varkappa\sin\varkappa_,\cos\varkappa_{,,},$$
$$h_{,,,} = \sin\varkappa\sin\varkappa_,\sin\varkappa_{,,},$$

et les trois nouvelles arbitraires $\varkappa$, $\varkappa_,$, $\varkappa_{,,}$ donneront identiquement aussi $\Sigma h^2 = 1$; il ne restera plus qu'à satisfaire à l'égalité $\Sigma gh = 0$, ou bien à l'équation,

$$0 = \cos\gamma\cos\varkappa + \sin\gamma\sin\varkappa\cos\gamma_,\cos\varkappa_, + \sin\gamma\sin\varkappa\sin\gamma_,\sin\varkappa_,\cos\gamma_{,,}\cos\varkappa_{,,}$$
$$+ \sin\gamma\sin\varkappa\sin\gamma_,\sin\varkappa_,\sin\gamma_{,,}\sin\varkappa_{,,},$$

laquelle déterminera un des angles, par exemple γ, au moyen des cinq autres $\gamma_,$, $\gamma_{,,}$, $\varkappa$, $\varkappa_,$, $\varkappa_{,,}$.

Si le nombre des constantes g, $g_{\prime}$,... eût été cinq, on les eût composées ainsi avec quatre arbitraires γ, $\gamma_{\prime}$, $\gamma_{\prime\prime}$, $\gamma_{\prime\prime\prime}$:

$$g=\cos\gamma,\ g_{\prime}=\sin\gamma\cos\gamma_{\prime},\ g_{\prime\prime}=\sin\gamma\sin\gamma_{\prime}\cos\gamma_{\prime\prime},\ g_{\prime\prime\prime}=\sin\gamma\sin\gamma_{\prime}\sin\gamma_{\prime\prime}\cos\gamma_{\prime\prime\prime},$$
$$g_{\text{iv}}=\sin\gamma\sin\gamma_{\prime}\sin\gamma_{\prime\prime}\sin\gamma_{\prime\prime\prime},$$

et de même pour h, $h_{\prime}$, etc. Cette manière de satisfaire à une équation de la forme $\Sigma g^2=1$ a quelque analogie avec la formule que M. Poisson a donnée dans sa *Théorie de la Chaleur*, page 38. Les $2n$ quantités g, $g_{\prime}$,... h, $h_{\prime}$,... seront donc exprimées au moyen de $2n-2$ arbitraires, liées entre elles par une équation, qui réduit le nombre des constantes indépendantes à $2n-3$: les constantes α, A, B complètent le nombre $2n$.

[5]. Nous avons fait voir que l'intégration des équations proposées entre les variables u, v, x,... dépend des deux intégrales

$$(6)\qquad t+\alpha=\int\frac{rdr}{\sqrt{2r^2(\mathrm{R}+\mathrm{B})-\mathrm{A}^2}},$$

$$(7)\qquad \varphi+\mathcal{C}=\int\frac{\mathrm{A}dr}{r\sqrt{2r^2(\mathrm{R}+\mathrm{B})-\mathrm{A}^2}}.$$

Ces deux fonctions, qui semblent indépendantes, peuvent néanmoins être ramenées à une origine commune. En effet, soit S une fonction de r telle que

$$\mathrm{S}=\int\frac{dr}{r}\sqrt{2r^2(\mathrm{R}+\mathrm{B})-\mathrm{A}^2},$$

il est évident que l'on aura par des différentiations partielles :

$$(9)\qquad t+\alpha=\frac{d\mathrm{S}}{d\mathrm{B}},\qquad \varphi+\mathcal{C}=-\frac{d\mathrm{S}}{d\mathrm{A}}.$$

[6]. Les formules que nous venons d'exposer montrent que les variables u, v, x... fournies par des équations de la forme

$$\frac{d^2u}{dt^2}=\frac{d\mathrm{R}}{dr}\,\frac{u}{r},\quad \frac{d^2v}{dt^2}=\frac{d\mathrm{R}}{dr}\,\frac{v}{r},\quad \text{etc.},$$

ne dépendent que de la détermination de la seule intégrale S, et de ses deux différentielles relatives à A et à B. Ces différentiations, le plus communément, s'effectueront sans difficultés et sans introduire de transcendantes supérieures à celles dont S sera composé: nous disons *le plus communément*, car il y a des cas où cet énoncé ne sera pas exact, et où le calcul de la différentielle d'une fonction introduira des fonctions d'un ordre de difficulté ou de complication autre que celui des fonctions différentiées.

Des recherches sur la théorie de la variation des arbitraires dans les questions de Mécanique, appliquées au problème d'un point attiré vers un centre fixe par une force $\frac{d\mathrm{R}}{dr}$, m'avaient conduit aux équations (9) pour le cas de trois variables u, v, x seulement. Mais il me fut facile d'y reconnaître un corollaire d'une proposition générale énoncée par M. Jacobi, et relative à l'intégration des deux équations du mouvement d'un point qui doit demeurer dans un plan. Ce résultat reçoit ici une extension de généralité notable, en ce qu'il s'applique à un nombre quelconque d'équations différentielles du second ordre de la forme particulière dont nous nous occupons.

[7]. Nous avons trouvé ci-dessus que l'équation $\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{d\mathrm{R}}{dr} \cdot \frac{u}{r}$ se transforme en $\frac{r^2}{\mathrm{A}} \frac{d}{dt}\left[\frac{r^2 d\,(u:r)}{\mathrm{A}dt}\right] + \frac{u}{r} = 0$, par cela seul qu'il existe entre r et t la relation $t + \alpha = \int \frac{rdr}{\sqrt{2r^2(\mathrm{R}+\mathrm{B}) - \mathrm{A}^2}}$, c'est-à-dire que r est une fonction de $t + \alpha$ déterminée par cette équation (6); et qu'en employant la variable auxiliaire φ de la formule (7), la même équation devient

$$\frac{d^2\,(u:r)}{d\varphi^2} + \frac{u}{r} = 0,$$

dont l'intégrale est

$$u = r[g\cos\varphi + h\sin\varphi].$$

Il en résulte que cette dernière équation doit être considérée comme l'intégrale générale de l'équation $\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{d\mathrm{R}}{dr}\,\frac{u}{r}$ dans laquelle la quantité $\frac{d\mathrm{R}}{rdr}$ sera une fonction donnée de $t + \alpha$, A et B. Alors g et h seront les deux constantes arbitraires exigées par l'ordre de l'équation.

Afin de donner un exemple, nous supposerons $R=\frac{m}{r}$ et l'équation à intégrer sera $\frac{d^2u}{dt^2}+\frac{mu}{r^3}=0$, r étant donnée en fonction de t par l'équation $t+\alpha=\int\frac{rdr}{\sqrt{2r^2\left(\frac{m}{r}+B\right)-A^2}}$. Pour rentrer dans des formules usuelles, nous écrirons $B=-\frac{m}{a}$, et $A^2=ma(1-e^2)$; l'équation d'où dépend r sera alors $t+\alpha=\int\frac{rdr}{\sqrt{\frac{m}{a}[a^2e^2-(a-r)^2]}}$. On posera ici, à l'ordinaire,

$$a-r=ea\cos\psi,\quad \text{ou}\quad r=a(1-e\cos\psi),$$

ψ étant une nouvelle quantité auxiliaire, connue des géomètres sous le nom d'*anomalie excentrique*, dans la théorie du mouvement elliptique; de là il suit que

$$t+\alpha=\int\frac{a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{m}}\,d\psi\,(1-e\cos\psi),\ \text{ou}\ \psi-e\sin\psi=(t+\alpha)\sqrt{\frac{m}{a^3}};$$

équation dont on devra tirer la valeur de ψ pour la substituer dans celles de r, et de φ exprimée en r. Mais

$$d\varphi=\frac{A}{r^2}.dt=\frac{\sqrt{ma(1-e^2)}\,a^{\frac{3}{2}}d\psi\,(1-e\cos\psi)}{\sqrt{m}.a^2\,(1-e\cos\psi)^2}=\frac{\sqrt{1-e^2}.d\psi}{1-e\cos\psi};$$

il s'ensuit que $\tang\frac{\varphi}{2}=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}.\tang\frac{\psi}{2}$, en négligeant la constante que l'intégration aurait pu introduire. D'après cette formule, on aura

$$\cos\varphi=\frac{\cos\psi-e}{1-e\cos\psi}=\frac{a(\cos\psi-e)}{r},$$
$$\sin\varphi=\frac{\sin\psi\sqrt{1-e^2}}{1-e\cos\psi}=\frac{a\sin\psi\sqrt{1-e^2}}{r}.$$

L'intégrale de l'équation proposée étant

$$u = r(g\cos\varphi + h\sin\varphi),$$

pourra encore être écrite ainsi :

$$u = ag(\cos\psi - e) + ah\sin\psi\sqrt{1-e^2};$$

où l'on n'a plus qu'à remplacer ψ par sa valeur en t. Cette substitution exigerait la résolution de l'équation

$$\psi - e\sin\psi = (t+\alpha)\sqrt{\frac{m}{a^3}},$$

que l'on ne peut obtenir que par la voie des séries et sous de certaines conditions limitatives de la grandeur de e. Néanmoins on obtiendra l'intégrale ou la relation cherchée entre t et la fonction u, de la manière suivante. Remplaçons d'abord les constantes g et h par deux nouvelles arbitraires γ, $\varkappa$ telles que $ag = \gamma\cos\varkappa$, $ah\sqrt{1-e^2} = \gamma\sin\varkappa$; et par suite, nous pourrons écrire ainsi l'équation entre ψ et u,

$$\cos(\psi - \varkappa) = e\cos\varkappa + \frac{u}{\gamma}.$$

De celle-ci on tire

$$\psi = \varkappa + \operatorname{arc}\left(\cos = \frac{u}{\gamma} + e\cos\varkappa\right).$$

Cette valeur de ψ mise dans l'équation en ψ et t lui donne cette autre forme

$$(t+\alpha)\sqrt{\frac{m}{a^3}} = \varkappa + \operatorname{arc}\left(\cos = \frac{u}{\gamma} + e\cos\varkappa\right) - e\sin\varkappa\left(\frac{u}{\gamma} + e\cos\varkappa\right) - e\cos\varkappa\sqrt{1 - \left(\frac{u}{\gamma} + e\cos\varkappa\right)^2}.$$

De cette égalité il sera facile de faire disparaître la fonction..... $\operatorname{arc}\left(\cos = \frac{u}{\gamma} + e\cos\varkappa\right)$ en l'isolant dans un seul membre, puis en prenant les cosinus des deux membres : ce résultat sera l'intégrale générale de l'équation différentielle du second ordre $\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{mu}{r} = 0$. r étant une fonction de t donnée par les formules

$$r = a(1 - e\cos\psi),\quad \psi - e\sin\psi = (t + \alpha)\sqrt{\frac{m}{a^3}},$$

dont on doit éliminer la quantité auxiliaire ψ : les constantes γ et α seront les deux arbitraires de l'intégration.

[8]. Nous venons de trouver l'intégrale de l'équation linéaire du second ordre $\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{dR}{dr}\cdot\frac{u}{r}$, où r représente une fonction de t dépendante de la résolution de l'équation

$$(6)\qquad t + \alpha = \int \frac{rdr}{\sqrt{2r^2(R + B) - A^2}}:$$

dans cette dernière formule la quantité A^2 semble devoir être essentiellement positive pour que φ ne soit pas imaginaire. L'équation différentielle s'intègre néanmoins, mais avec quelques modifications dans la forme des résultats, lorsque la formule (6) est remplacée par la suivante où l'on supprime B qui peut être compris dans R,

$$(6')\qquad t + \alpha = \int \frac{rdr}{\sqrt{2r^2 R + A^2}}.$$

En effet, de celle-ci, on tire

$$\frac{dr^2}{dt^2} = 2R + \frac{A^2}{r^2};$$

par la différentiation, et après avoir divisé par $2dr$, on aura

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{dR}{dr} - \frac{A^2}{r^3}.$$

En éliminant $\frac{dR}{dr}$ de l'équation proposée, à l'aide de la précédente, elle deviendra

$$r\frac{d^2u}{dt^2} - u\frac{d^2r}{dt^2} - \frac{A^2}{r^2}\cdot\frac{u}{r} = 0,$$

à laquelle on donnera, comme ci-dessus ( ), la forme

$$\frac{r^2}{A^2}\cdot\frac{d}{dt}\left[\frac{r^2 d}{dt}\left(\frac{u}{r}\right)\right]-\frac{u}{r}=0;$$

ou bien, en posant encore $d\varphi_1=\frac{Adt}{r^2}=\frac{Adr}{r\sqrt{2r^2R+A^2}}$;

l'équation se change en $\frac{dd(u:r)}{d\varphi^2_1}-\frac{u}{r}=0$;

alors elle a pour intégrale

$$\frac{u}{r}=ge^{\varphi_1}+he^{-\varphi_1},$$

g et h étant deux arbitraires, e la base hyperbolique; et la quantité auxiliaire φ_1 étant donnée par l'égalité

$$\varphi_1=\int\frac{Adr}{r\sqrt{2r^2R+A^2}}.$$

On serait arrivé au même résultat en passant du réel à l'imaginaire dans les formules du cas que nous avons traité en premier lieu, et où A^2 avait le signe — sous le radical: il aurait fallu pour cela remplacer, dans les formules, r par $r\sqrt[4]{-1}$, R par $R\sqrt{-1}$, φ par $\varphi\sqrt{-1}$, et enfin changer sin $(\varphi\sqrt{-1})$ et cos $(\varphi\sqrt{-1})$ en exponentielles réelles.

On ne connaît qu'un petit nombre d'équations différentielles du second ordre intégrables. J'ai cru devoir appeler l'attention des géomètres sur l'équation linéaire $\frac{d^2u}{dt^2}=\frac{dR}{rdr}u$, où r dépend de t selon la formule $t=\int\frac{rdr}{\sqrt{2r^2R+A^2}}$, parce que cette classe est fort étendue, R étant une fonction indéterminée de r: elle comprend l'équation linéaire à coefficient constant.