JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur la Formule de Taylor

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 2 (1837), p. 483-484.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1837_1_2__483_0>

Sur la Formule de Taylor;

PAR J. LIOUVILLE.

Soit $f(x)$ une fonction réelle de x, dont nous représenterons par $f'(x)$, $f''(x)$, etc. les dérivées successives. La formule de Taylor consiste, comme on sait, dans l'équation

$$f(x+y) = f(x) + \frac{y}{1} f'(x) + \ldots + \frac{y^n}{1.2\ldots n} f^n(x) + \mathrm{R},$$

dans laquelle R désigne le reste de la série. Lagrange a trouvé pour ce reste l'expression suivante :

$$\mathrm{R} = \frac{y^{n+1}}{1.2\ldots.(n+1)} f^{n+1}(x+\theta y),$$

où θ est un certain nombre positif, plus petit que l'unité. Et il s'en est servi pour démontrer (en excluant le cas particulier où $f^n(x)=0$), que, pour des valeurs de y suffisamment petites, la valeur numérique de R devient inférieure à celle du terme $\frac{y^n}{1.2\ldots n} f^n(x)$ auquel on s'arrête.

Ce théorème, très utile dans le calcul différentiel, peut subsister encore lors même que la dérivée de l'ordre $(n+1)$ devient infinie; et il y a, je crois, quelque inconvénient à introduire cette dérivée dans les calculs. Mais il est aisé d'en éviter l'emploi. En effet, au lieu de

$$f(x+y) = f(x) + \frac{y}{1} f'(x) + \ldots + \frac{y^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f^{n-1}(x) + \frac{y^n}{1.2\ldots n} f^n(x+\theta y),$$

on peut évidemment poser

$$f(x+y) = f(x) + \frac{y}{1} f'(x) + \ldots + \frac{y^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f^{n-1}(x) + \frac{y^n}{1.2\ldots n} f^n(x) + \mathrm{R};$$

pourvu que l'on prenne cette fois

$$\mathrm{R} = \frac{y^n}{1.2\ldots n} [f^n(x+\theta y) - f^n(x)].$$

Le rapport de R à $\frac{y^n}{1.2\ldots n} f^n(x)$ se trouvant maintenant égal à

$$\frac{f^n(x+\theta y) - f^n(x)}{f^n(x)},$$

on comprend sans peine dans quels cas, pour de très petites valeurs de y, ce rapport demeure < 1. Cela a lieu par exemple lorsque la fonction $f^n(x)$ est continue pour la valeur actuelle de x; et même il est visible qu'alors on rendra le rapport dont nous parlons infiniment petit, en attribuant à y une valeur infiniment petite.

FIN DU TOME DEUXIÈME.