JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

M. CHASLES

Nouvelle manière d'étudier les coniques dans le cône oblique. - Propriétés générales du cône et des coniques planes et sphériques

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 3 (1838), p. 102-110.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1838_1_3__102_0>

Nouvelle manière d'étudier les coniques dans le cône oblique. — Propriétés générales du cône et des coniques planes et sphériques ;

PAR M. CHASLES.

Les Anciens ont considéré les coniques dans le cône oblique à base circulaire; mais ils n'ont eu à faire usage des propriétés du cercle qui sert de base au cône, que pour démontrer une propriété principale de ces courbes, de laquelle ils ont déduit ensuite, par de simples considérations de Géométrie plane, toutes les autres propositions de la théorie des coniques, qui nous ont été transmises dans le grand ouvrage d'Apollonius. Les Modernes, jusqu'à ce que la Géométrie de Descartes se fût emparée de cette théorie et en eût fait une question d'analyse, ont aussi étudié ces courbes dans le cône, mais par une autre méthode que celle des Anciens, et en appliquant à ces courbes les propriétés mêmes du cercle. C'est à Verner, géomètre du XV^e siècle, qu'on doit l'idée heureuse et les premiers essais de cette manière qui a été suivie avec succès, un siècle après, par le savant Maurolycus de Messine, et plus tard par Desargues, Pascal et de la Hire. Mais on voit que ces deux méthodes, des Anciens et des Modernes, bien que fondées l'une et l'autre sur la considération du cône, ne faisaient aucun usage des propriétés de cette figure. Aussi ces propriétés restèrent-elles ignorées.

Il y avait une troisième manière d'étudier les coniques; c'était de tirer leurs propriétés directement de celles du cône. Cette méthode eût été facile, satisfaisante, et briève surtout; chaque propriété du cône s'appliquant en même temps, et par une seule démonstration, aux trois sections coniques, ellipse, hyperbole, parabole, que les Anciens et les Modernes eux-mêmes traitaient séparément.

Quant aux propriétés du cône, on les aurait tirées de celles du cercle qui lui sert de base. Cela n'offre pas de difficulté. Je crois en avoir donné la preuve dans mon *Mémoire sur les propriétés générales des cônes du second degré*, où je suis parvenu à un grand nombre de propositions nouvelles, sans aucun autre secours que la connaissance des propriétés du cercle. Mais il est vrai que, dans cet écrit, je n'ai eu en vue que deux classes spéciales des propriétés du cône; celles qui se rattachent à ses *lignes focales* et aux plans de ses *sections circulaires*. On pourrait donc se demander si la marche que j'ai suivie s'appliquera avec la même facilité à des propositions d'un autre genre; c'est-à-dire si, d'une part, il sera toujours facile de tirer les propriétés du cône de celles du cercle, et ensuite de s'en servir pour démontrer celles des coniques.

Il n'y a point de doute que, quand la Géométrie aura été suffisamment cultivée, quand elle se sera créé les ressources et les méthodes qui lui manquent, elle pourra, par la considération seule du cercle qui sert de base au cône, démontrer toutes les propriétés de cette figure; car elles participent de celles du cercle, qui en sont la seule et vraie origine. On conçoit qu'ensuite le transport de ces propriétés aux coniques n'offrira pas de difficultés.

Je vais présenter un nouvel exemple de cette méthode, qui pourra en montrer l'efficacité et la portée. Je choisis la fameuse proposition *ad quatuor lineas*, que Descartes a prise pour premier essai de sa méthode de *Géométrie analytique*, et qu'il appelle *Problème de Pappus*, parce que c'est dans le 7^e livre des *Collections mathématiques* qu'il en est fait mention. La question est celle-ci :

Étant données quatre droites dans un plan, on demande le lieu géométrique d'un point tel que si l'on abaisse de ce point des obliques, sous des angles donnés, sur ces droites, le produit des deux premières soit dans un rapport constant avec le produit des deux autres.

Le lieu demandé est une section conique, ainsi que l'ont trouvé les Anciens. Mais cette proposition leur avait offert de grandes difficultés. Euclide ne l'avait pas démontrée complétement, comme nous l'apprend Apollonius; parce qu'on ignorait alors, dit-il, plusieurs belles propriétés des coniques, nécessaires pour sa démonstration. Ces propriétés font partie du troisième livre de son grand ouvrage; mais la proposition elle-même ne s'y trouve pas; elle était comprise sans doute dans quelque autre des nombreux traités d'Apollonius qui ne nous sont pas parvenus.

Les démonstrations que les Modernes ont données de cette proposition sont plus ou moins compliquées, de sorte qu'on a cessé de la comprendre dans les traités des sections coniques, quoiqu'elle soit l'une des propriétés de ces courbes les plus générales et les plus fécondes. La méthode pour l'étude des coniques, que nous venons d'indiquer, en fournit une démonstration très facile, tirée entièrement des propriétés du cercle, et qui n'exige la connaissance d'aucune propriété de ces courbes. Ce mode de démonstration offre encore l'avantage de conduire, en même temps, à plusieurs autres propositions non moins importantes. Cela provient de ce que toutes les propriétés du cône du second degré sont doubles, c'est-à-dire qu'à chacune d'elles en correspond toujours une autre. Cette dualité provient de ce que le cône *supplémentaire* d'un cône du second degré est lui-même un cône du second degré.

Démonstration du théorème ad quatuor lineas.

Il nous faut, suivant la méthode dont il vient d'être question, démontrer d'abord le théorème dans le cercle, pour en conclure ensuite son analogue dans le cône, puis dans les coniques.

Soit donc un cercle et un quadrilatère ABCD qui lui soit inscrit; que d'un point m de la circonférence du cercle on abaisse des perpendiculaires ma, mb, mc, md sur les côtés AB, BC, CD, DA du quadrilatère (*); les deux angles mAB, mCB sont suppléments l'un de l'autre; par conséquent les deux triangles rectangles mAa, mCb sont semblables, et l'on a $\frac{ma}{mb}=\frac{m\mathrm{A}}{m\mathrm{C}}$. On a pareillement $\frac{mc}{md}=\frac{m\mathrm{C}}{m\mathrm{A}}$. Donc

$$ma.mc=mb.md;$$

ce qui exprime cette propriété du cercle :

(*) *Voir* figure 1, planche I.

Quand un quadrilatère est inscrit dans un cercle, le produit des distances de chaque point de la circonférence du cercle, à deux côtés opposés du quadrilatère, est égal au produit des distances du même point aux deux autres côtés.

Maintenant prenons le cercle pour la base d'un cône, dont le sommet S soit un point quelconque de l'espace; et regardons les côtés du quadrilatère comme les traces des faces d'un angle solide quadrangulaire inscrit dans le cône.

Que du point m on abaisse des perpendiculaires ma', mb', mc', md' sur les quatre plans SAB, SBC, SCD, SDA, de l'angle solide. Soient α, β, γ, δ les angles que ces plans font avec le plan du cercle; on aura

$$ma' = ma \sin\alpha, \quad mb' = mb \sin\beta, \quad mc' = mc \sin\gamma, \quad md' = md \sin\delta.$$

D'où, à cause du théorème précédent;

$$\frac{ma'.mc'}{mb'.md'} = \frac{\sin\alpha.\sin\gamma}{\sin\beta.\sin\delta}.$$

Mais les perpendiculaires ma', mb', etc., sont entre elles comme les sinus des angles que l'arête Sm fait avec les plans SAB, SBC, etc., respectivement; on a donc, en appelant A, B, C, D ces angles,

$$\frac{\sin A.\sin C}{\sin B.\sin D} = \frac{\sin\alpha.\sin\gamma}{\sin\beta.\sin\delta}.$$

Le second membre est constant, quelle que soit la position de l'arête Sm. On a donc cette propriété générale des cônes du second degré,

Quand un angle solide quadrangulaire est inscrit dans un cône du second degré, le produit des sinus des angles qu'une arète quelconque du cône fait avec deux faces opposées de cet angle, est au produit des sinus des angles que la même arète fait avec les deux autres faces, dans un rapport constant;

Ce rapport est égal au produit des sinus des angles que les deux premières faces font avec le plan d'une des sections circulaires du *cône divisé par le produit des sinus des angles que les deux autres faces font avec le même plan.*

Telle est la propriété des cônes du second degré que nous voulions démontrer. Elle correspond, comme on voit, au théorème *ad quatuor lineas* de la Géométrie plane. Pour en déduire celui-ci, coupons le cône suivant une conique quelconque. Soit m un point de cette courbe. Les sinus des angles que l'arète Sm fait avec les faces de l'angle solide sont proportionnels aux perpendiculaires abaissées du point m sur ces faces ; et ces perpendiculaires sont égales, respectivement, à celles abaissées du même point sur les traces des faces de l'angle solide sur le plan coupant, multipliées respectivement par les sinus des angles que ces faces font avec le plan coupant. On conclut donc du théorème précédent, que, le produit des perpendiculaires abaissées du point m sur deux faces opposées est au produit des perpendiculaires abaissées sur les deux autres faces, dans un rapport constant. C'est-à-dire que

Quand un quadrilatère est inscrit dans une conique, le produit des distances de chaque point de la courbe à deux côtés opposés du quadrilatère, est au produit des distances du même point aux deux autres côtés, dans un rapport constant.

Telle est la propriété des coniques qu'il s'agissait de démontrer. On voit qu'elle n'a nécessité la connaissance d'aucune autre propriété de ces courbes.

On peut, sans autre démonstration, parvenir à de nouvelles propriétés du cône et des coniques, aussi générales que les précédentes.

Pour cela reprenons le théorème ci-dessus, relatif au cône. Formons le cône *supplémentaire ;* ses lignes *focales* correspondront aux plans *cycliques* du premier ; il s'ensuivra ce théorème :

Quand un angle solide quadrangulaire est circonscrit à un cône du second degré, chaque plan tangent au cône fait avec deux arètes opposées de l'angle solide des angles dont le produit des sinus est au produit des sinus des angles que le même plan tangent fait avec les deux autres arètes, dans une raison constante ;

Cette raison est égale au rapport des produits des sinus des angles qu'une ligne focale du cône fait avec les arètes opposées de l'angle solide.

Pour passer au théorème correspondant dans les coniques, menons un plan transversal; il coupera le cône suivant une conique, et l'angle solide suivant un quadrilatère circonscrit à cette courbe : les sinus des angles que les arètes de l'angle solide font avec un plan tangent sont égaux aux perpendiculaires abaissées des sommets du quadrilatère sur le plan tangent, divisées respectivement par les arètes qui aboutissent à ces sommets; ces perpendiculaires sont proportionnelles à celles abaissées des mêmes sommets sur la trace du plan tangent sur le plan transversal. On conclut donc de la première partie du théorème précédent, cette propriété générale des coniques :

Quand un quadrilatère est circonscrit à une conique, une tangente quelconque à la courbe a le produit de ses distances à deux sommets opposés du quadrilatère dans un rapport constant avec le produit de ses distances aux deux autres sommets.

J'ai déjà démontré ce théorème, que j'ai déduit de la propriété du quadrilatère inscrit, par la *transformation parabolique* (*). La démonstration précédente, outre l'avantage d'être directe, et de ne supposer connue aucune propriété des coniques, a encore celui de pouvoir compléter, en quelque sorte, le théorème, en donnant une expression assez remarquable du rapport dont il y est question.

Pour cela, supposons que le plan transversal soit perpendiculaire à une ligne focale du cône, de manière que la conique ait un de ses foyers situé au point où le plan transversal rencontre cette ligne focale. Soient A, B, C, D les sommets du quadrilatère; Aa, Bb, Cc, Dd les perpendiculaires abaissées de ces points sur une tangente à la conique; les rapports $\frac{\mathrm{A}a}{\mathrm{SA}}$, $\frac{\mathrm{B}b}{\mathrm{SB}}$, etc. seront proportionnels aux sinus des angles qne les arètes SA, SB, etc. font avec le plan tangent au cône; on aura donc d'après la première partie du théorème relatif au cône,

$$\frac{\frac{\mathrm{A}a}{\mathrm{SA}} \cdot \frac{\mathrm{C}c}{\mathrm{SC}}}{\frac{\mathrm{B}b}{\mathrm{SB}} \cdot \frac{\mathrm{D}d}{\mathrm{SD}}} = \text{const.} = \mu.$$

(*) Voir *Correspondance mathématique* de M. Quetelet, t. V, année 1829, p. 289.

Soit F le foyer de la conique situé sur la ligne focale du cône à laquelle le plan coupant est perpendiculaire ; les sinus des angles que cette ligne focale fait avec les arètes SA, SB, etc, sont égaux aux rapports $\frac{FA}{SA}$, $\frac{FB}{SB}$, etc. ; on a donc pour la valeur de la constante μ, d'après la seconde partie du théorème sur le cône,

$$\mu = \frac{\frac{FA}{SA} \cdot \frac{FC}{SC}}{\frac{FB}{SB} \cdot \frac{FD}{SD}}.$$

De cette équation et de la précédente, on conclut

$$\frac{Aa\,.\,Cc}{Bb\,.\,Dd} = \frac{FA\,.\,FC}{FB\,.\,FD}.$$

Ce qui prouve que

Quand un quadrilatère est circonscrit à une conique, le produit des distances d'une tangente quelconque, à deux sommets opposés, est au produit des distances de la même tangente aux deux autres sommets, dans un rapport constant ;

Et ce rapport est égal au produit des distances d'un foyer de la courbe, aux deux premiers sommets du quadrilatère, divisé par le produit des distances du même foyer aux deux autres sommets.

Ainsi l'on voit que le foyer joue, en quelque sorte, le même rôle, par rapport aux quatre sommets du quadrilatère, que chacune des tangentes à la conique. Cette relation est assez singulière.

Ce que nous disons d'un foyer a également lieu pour le second ; il en résulte cette autre propriété des coniques :

Quand un quadrilatère est circonscrit à une conique, les produits des distances de deux sommets opposés, à chaque foyer, sont entre eux dans le même rapport que les produits des distances des deux autres sommets à ces foyers (*).

(*) Ce théorème trouvera une application utile dans la théorie des courbes du troisième degré.

Quand la conique est une parabole, un de ses foyers est à l'infini; ses distances aux quatre sommets du quadrilatère sont infinies, et leurs rapports sont égaux à l'unité, parce qu'elles sont infinies et comptées sur des droites parallèles entre elles. On en conclut ce théorème :

Quand un quadrilatère est circonscrit à une parabole, le produit des distances du foyer à deux sommets opposés du quadrilatère est égal au produit des distances du même point aux deux autres sommets.

Si l'on suppose, dans ces deux théorèmes, que deux sommets opposés des quadrilatères s'approchent indéfiniment de la courbe et viennent enfin se placer sur elle, les deux autres côtés se confondront, et l'on aura deux théorèmes sur l'angle circonscrit aux coniques; nous énoncerons le second, relatif à la parabole :

Quand un angle est circonscrit à une parabole, le carré du rayon vecteur mené du foyer au sommet de l'angle, est égal au produit des rayons vecteurs menés aux deux points de contact de ses côtés.

Cette propriété de la parabole est une de celles dont Lambert s'est servi dans son Traité *de Insignioribus orbitæ cometarum proprietatibus*.

Des deux propriétés générales des cônes du second degré que nous avons démontrées dans cette note, on conclut immédiatement deux théorèmes sur les *coniques sphériques*, qui correspondent à ceux des coniques planes. En voici les énoncés :

1°. *Quand un quadrilatère, formé par des arcs de grands cercles, est inscrit dans une conique sphérique, le produit des sinus des distances de chaque point de la courbe, à deux côtés opposés du quadrilatère, est dans une raison constante avec le produit des sinus des distances du même point aux deux autres côtés;*

Cette raison est égale au produit des sinus des angles qu'un arc cyclique de la conique fait avec les deux premiers côtés du quadrilatère, divisé par le produit des sinus des angles que le même arc fait avec les deux autres côtés.

On conclut de là que

Quand un quadrilatère est inscrit dans une conique sphérique, les *produits des sinus des angles que les deux arcs cycliques font avec deux côtés opposés du quadrilatère, sont entre eux comme les produits des sinus des angles que ces deux arcs cycliques font avec les deux autres côtés.*

2°. *Quand un quadrilatère est circonscrit à une conique sphérique, tout arc de grand cercle tangent à cette courbe jouit de la propriété que le produit des sinus de ses distances à deux sommets opposés du quadrilatère est au produit des sinus de ses distances aux deux autres sommets, dans un rapport constant;*

Ce rapport constant est égal au produit des sinus des distances d'un foyer de la conique aux deux premiers sommets du quadrilatère, divisé par le produit de ses distances aux deux autres sommets.

On conclut de là que

Quand un quadrilatère est circonscrit à une conique sphérique, les produits des sinus des arcs vecteurs menés de chaque foyer à deux sommets opposés du quadrilatère sont entre eux comme les produits des sinus des arcs vecteurs menés de ces deux foyers aux deux autres sommets.