# JOURNAL

DE

# MATHÉMATIQUES

## PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE


M. CHASLES

**Démonstration géométrique de la formule intégrale**

$$\int_o^b \int_b^c \frac{\left(v^2 - \varsigma^2\right) dv.d\varsigma}{\sqrt{(v^2-b^2)(c^2-v^2)(b^2-\varsigma^2)(c^2-\varsigma^2)}} = \frac{1}{2}\pi$$


*Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série*, tome 3 (1838), p. 10-16.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1838_1_3__10_0>

# DÉMONSTRATION GÉOMÉTRIQUE

## *De la Formule intégrale*

$$\int_0^b \int_b^c \frac{(\nu^2 - \varrho^2)\, d\nu . d\varrho}{\sqrt{(\nu^2 - b^2)(c^2 - \nu^2)(b^2 - \varrho^2)(c^2 - \varrho^2)}} = \frac{1}{2}\pi ;$$

PAR M. CHASLES.

M. Lamé, dans son *Mémoire sur les surfaces isothermes*, inséré dans le deuxième volume de ce Journal (livraisons d'avril et de mai), est parvenu à cette formule, en la transformant, par des considérations géométriques, en une autre où les variables sont différentes et où les deux intégrations se font sans difficulté. M. Poisson l'a démontrée directement, par la seule théorie des *transcendantes elliptiques*, dans une Note placée à la suite du Mémoire de M. Lamé.

Cette manière est purement analytique; l'autre est mixte, puisqu'on y fait usage de considérations géométriques pour transformer la formule, et ensuite des règles du calcul intégral pour effectuer deux intégrations.

J'ai trouvé qu'on peut éviter ces deux intégrations, et parvenir ainsi à la formule, d'une troisième manière entièrement géométrique.

Pour cela, rappelons d'abord la signification géométrique sous laquelle la formule s'est présentée dans le mémoire sur les surfaces isothermes.

Que l'on conçoive un ellipsoïde dont les trois demi-diamètres principaux soient égaux à $\mu$, $\sqrt{\mu^2 - b^2}$, $\sqrt{\mu^2 - c^2}$.

Que l'on fasse croître le demi-diamètre $\mu$ d'une quantité $d\mu$, de manière à produire un second ellipsoïde infiniment peu différent du premier, et qui aura les mêmes excentricités pour ses sections principales, puisque $b$ et $c$ sont des constantes. Qu'on prenne, en chaque point $m$ de la surface du premier ellipsoïde, l'épaisseur $ds$ de la couche comprise entre cette surface et celle du second ellipsoïde ; qu'on fasse le rapport $\frac{d\mu}{ds}$, et le produit de ce rapport par l'élément superficiel $d\omega$ du premier ellipsoïde : c'est la somme de tous ces produits, étendue à la surface entière de l'ellipsoïde, c'est-à-dire $\Sigma \frac{d\mu}{ds} d\omega$, que M. Lamé a eu à calculer. (*V.* tome II, p. 163 de ce Journal.)

En prenant pour variables les demi-diamètres majeurs $\nu$, $\rho$ des deux hyperboloïdes qu'on peut faire passer par le point $m$, de manière que leurs sections principales aient les mêmes foyers que celles de l'ellipsoïde, M. Lamé trouve que

$$\frac{d\mu}{ds} d\omega = \sqrt{\mu^2 - b^2}\ \sqrt{\mu^2 - c^2} \cdot \frac{(\nu^2 - \rho^2) . d\nu . d\rho}{\sqrt{(\nu^2 - b^2)(c^2 - \nu^2)(b^2 - \rho^2)(c^2 - \rho^2)}}.$$

De sorte que l'intégrale, étendue à la surface entière de l'ellipsoïde, est

$$\Sigma \frac{d\mu}{ds} d\omega = 8 . \sqrt{\mu^2 - b^2} \sqrt{\mu^2 - c^2} . \int_0^b \int_b^c \frac{(\nu^2 - \rho^2) . d\nu . d\rho}{\sqrt{(\nu^2 - b^2)(c^2 - \nu^2)(b^2 - \rho^2)(c^2 - \rho^2)}}.$$

Et en prenant pour variables les coordonnées $x$, $y$ du point $m$, rapportées aux axes principaux de l'ellipsoïde pris pour axes coordonnés, M. Lamé trouve

$$\frac{d\mu}{ds} d\omega = \frac{\sqrt{\mu^2 - c^2}}{\mu} \cdot \frac{dxdy}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{\mu^2} - \frac{y^2}{\mu^2 - b^2}}}.$$

Cette seconde expression, intégrée successivement par rapport à $y$ et à $x$, conduit à

$$\Sigma \frac{d\mu}{ds} d\omega = 4\pi . \sqrt{\mu^2 - b^2}\ \sqrt{\mu^2 - c^2},$$

d'où l'on conclut, à cause de la première expression de l'intégrale, la formule en question.

C'est ce calcul, et la double intégration qu'il comprend, que l'on peut éviter et remplacer par des considérations géométriques, ainsi que je vais le faire voir.

Il s'agit donc de démontrer que

$$\Sigma \frac{d\mu}{ds} d\omega = 4\pi . \sqrt{\mu^2 - b^2} . \sqrt{\mu^2 - c^2}.$$

Pour cela, remarquons qu'en exprimant $\frac{d\mu}{ds}$ en coordonnées $x, y, z$, on trouve

$$\mu . \frac{d}{ds} = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{\mu^4} + \frac{y^2}{(\mu^2 - b^2)^2} + \frac{z^2}{(\mu^2 - c^2)^2}}}.$$ (T. II, p. 163 de ce Journal.)

On reconnaît aisément que le second membre est l'expression de la perpendiculaire abaissée de l'origine sur le plan tangent à l'ellipsoïde au point $m$ $(x, y, z)$. Soit $p$ cette perpendiculaire; on aura donc

$$\frac{d\mu}{ds} = \frac{p}{\mu},$$

et, par conséquent,

$$\Sigma \frac{d\mu}{ds} d\omega = \Sigma \frac{p}{\mu} d\omega = \frac{1}{\mu} \Sigma p d\omega.$$

Soit $\Pi$ l'aire du parallélogramme construit sur deux demi-diamètres conjugués de l'ellipsoïde, compris dans le plan diamétral parallèle au plan tangent en $m$; le produit $p\Pi$ sera le volume du rhomboïde construit sur ces deux demi-diamètres et sur un troisième qui aboutit au point $m$. Ce troisième est conjugué aux deux premiers; le volume du rhomboïde est donc constant, et égal au produit des trois demi-diamètres principaux de l'ellipsoïde. Ainsi l'on a

$$p . \Pi = \mu \sqrt{\mu^2 - b^2} \sqrt{\mu^2 - c^2}.$$

Soit $\Pi'$ l'aire de la section de l'ellipsoïde par le plan diamétral qui contient le parallélogramme $\Pi$; on aura

$$\Pi' = \pi \Pi,$$

$\pi$ étant le rapport de la circonférence au diamètre ; donc

$$p.\Pi' = \pi.\sqrt{\mu^2 - b^2}.\sqrt{\mu^2 - c^2},$$

et, par suite,

$$\Sigma \frac{d\mu}{ds} d\omega = \pi.\sqrt{\mu^2 - b^2}\ \sqrt{\mu^2 - c^2}.\Sigma \frac{d\omega}{\Pi'}.$$

Ainsi l'intégrale cherchée est la somme des éléments superficiels de l'ellipsoïde divisés par les aires des sections faites dans l'ellipsoïde par des plans diamétraux parallèles à ces éléments; cette somme étant multipliée par le produit $\pi.\sqrt{\mu^2 - b^2}.\sqrt{\mu^2 - c^2}$.

Or j'ai démontré par de simples considérations géométriques, dans mes applications du *Principe d'Homographie* (*), que la somme des éléments superficiels d'un ellipsoïde, divisés par les aires des sections diamétrales parallèles aux plans de ces éléments, est égale à 4; on a donc

$$\Sigma \frac{d\mu}{ds} d\omega = 4\pi.\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{\mu^2 - c^2}.$$

C. Q. F. D.

Ainsi la formule en question est démontrée géométriquement et sans aucune intégration.

Je vais profiter de cet article pour faire quelques remarques sur deux autres passages du mémoire de M. Lamé.

La perpendiculaire $p$, que nous avons introduite dans l'intégrale qu'il fallait calculer, peut être employée encore utilement dans une autre expression, pour en donner la signification géométrique.

On trouve (p. 166, tome II, de ce *Journal*), que la quantité de chaleur qui traverse, pendant l'unité de temps, un élément $d\omega$ d'une surface isotherme ellipsoïdale, est proportionnelle à

$$\frac{d\omega}{\sqrt{\mu^2 - \nu^2}\sqrt{\mu^2 - \varrho^2}}.$$

(*) *Aperçu historique sur l'origine et le développement des Méthodes en Géométrie, particulièrement de celles qui se rapportent à la Géométrie moderne; suivi d'un Mémoire de Géométrie sur deux principes généraux de la Science, la Dualité et l'Homographie;* in-4°, 1837. Bachelier; *voir* p. 819.

M. Lamé en conclut que *les flux de chaleur, aux extrémités des axes de l'ellipsoïde, ont des intensités respectivement proportionnelles à ces axes.*

La formule est susceptible d'une signification géométrique semblable, pour tous les points de la surface de l'ellipsoïde.

En effet, on trouve (p. 177) l'équation

$$\frac{x^2}{\mu^4}+\frac{y^2}{(\mu^2-b^2)^2}+\frac{z^2}{(\mu^2-c^2)^2}=\frac{(\mu^2-\nu^2)(\mu^2-\varrho^2)}{\mu^2(\mu^2-b^2)(\mu^2-c^2)}.$$

La valeur de la perpendiculaire $p$, dont nous nous sommes servi ci-dessus, se change donc en celle-ci

$$p=\mu\,.\,\frac{\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{\mu^2-c^2}}{\sqrt{\mu^2-\nu^2}\sqrt{\mu^2-\varrho^2}}.$$

L'expression de la quantité de chaleur qui s'écoule par l'élément $d\omega$ de la surface de l'ellipsoïde devient donc

$$\frac{d\omega.p.}{\mu\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{\mu^2-c^2}}.$$

Le dénominateur est constant pour tous les points d'un même ellipsoïde. On conclut donc de cette expression que

*Les flux de chaleur, en différents points d'une même surface isotherme, ont des intensités proportionnelles aux perpendiculaires abaissées du centre de la surface sur les plans tangents en ces points.*

Cette loi générale donne en particulier l'énoncé ci-dessus pour les points situés aux extrémités des diamètres principaux de la surface.

M. Lamé, en étendant aux surfaces coniques les beaux résultats trouvés pour les surfaces isothermes ellipsoïdales et hyperboliques, qui sont des séries d'ellipsoïdes et d'hyperboloïdes dont les sections principales sont décrites des mêmes foyers, a été conduit à deux séries de surfaces coniques du second degré qu'il définit par cette propriété géométrique, d'être *les cônes asymptotes des hyperboloïdes isothermes à une et à deux nappes* (p. 172).

M. Lamé conclut de là que chaque cône d'une série coupe à angles droits chaque cône de l'autre série (p. 173).

Ces deux séries de surfaces coniques trajectoires orthogonales peuvent être définies par une propriété caractéristique qui leur est propre, et qui est indépendante de la considération étrangère des hyperboloïdes auxquels les cônes sont asymptotes ; cette propriété consiste en ce que *tous ces cônes ont les mêmes lignes focales.*

On appelle lignes *focales* d'un cône du second degré, deux droites qui jouent le même rôle dans le cône, que les foyers dans les sections coniques. Par exemple, *la somme des angles que chaque arète du cône fait avec les deux lignes focales est constante.*

La théorie des lignes focales comprend beaucoup d'autres propositions analogues à celles de la Géométrie plane. J'en ai démontré un assez grand nombre dans mon *Mémoire sur les Propriétés générales des cônes du second degré* (in-4°, 1830). On y trouve la proposition citée ci-dessus du Mémoire de M. Lamé, savoir, que *les cônes qui ont les mêmes lignes focales et qui se coupent, se coupent à angles droits.*

Ces cônes complètent la théorie des surfaces du second degré trajectoires orthogonales.

A toutes les propriétés des lignes focales, correspondent, dans un cône du second degré, d'autres propositions concernant les plans de ses sections circulaires. Ainsi par exemple, au théorème énoncé ci-dessus, concernant les angles que chaque arète d'un cône fait avec les deux lignes focales, correspond celui-ci : *La somme des angles que chaque plan tangent à un cône du second degré fait avec les plans de deux sections sous-contraires, est constante.*

Cette matière, encore très peu cultivée, est extrêmement abondante. Mais ce n'est pas ici le lieu d'en parler plus longuement.

La propriété remarquée par M. Lamé, savoir, que les cônes asymptotes de deux séries d'hyperboloïdes décrits des mêmes foyers, se coupent à angles droits, n'est qu'un cas particulier d'une propriété générale des surfaces du second degré décrites des mêmes foyers, savoir que : *tous les cônes circonscrits à ces surfaces, qui ont pour sommet commun un point quelconque de l'espace, ont les mêmes axes principaux et les mêmes lignes focales* (*). D'où il suit que tous ces

(*) J'ai donné ce théorème dans le *Bulletin de l'Académie des Sciences* de Bruxelles, tome I, page 216.

cônes se coupent à angle droit. De sorte que les contours apparents de ces surfaces, pour un lieu quelconque du spectateur, semblent se couper deux à deux à angles droits.

Les surfaces du second degré dont les sections principales ont les mêmes foyers jouissent d'un très grand nombre d'autres propriétés géométriques. (Voir *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en Géométrie, etc.*, p. 384 — 399.)

Ces surfaces se sont déjà présentées dans plusieurs questions, et particulièrement dans des questions de Physique et de Mécanique. Mais les systèmes de cônes qui sont de la même famille, et que M. Lamé a considérés dans son Mémoire sur les surfaces isothermes, ne s'étaient pas encore présentés, je crois, dans de pareilles questions. On peut en introduire la considération dans quelques phénomènes de la polarisation ; car les deux axes du cristal sont les lignes focales de certains cônes du second degré. Les plans de polarisation, pour différentes directions du rayon de lumière, sont tangents à ces cônes; et leur orthogonalité résulte de ce que deux cônes se coupent à angles droits.

Si l'analogie qui a lieu entre les propriétés géométriques des lignes focales des cônes et celles des foyers des sections coniques, pouvait être étendue aux propriétés attractives dont ces points jouissent dans le système du monde où ils sont les centres où résident les forces qui sollicitent les corps célestes, on serait porté à penser que les lignes focales des cônes sont aussi les centres des forces polarisantes, dans les phénomènes de la lumière.