JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

E. CATALAN

Note sur un Problème de Combinaisons

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 3 (1838), p. 111-112.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1838_1_3__111_0>

Note sur un Problème de Combinaisons;

Par E. CATALAN.

M. Brianchon vient d'insérer, dans le XXV^e cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, un Mémoire assez étendu sur *la détermination du nombre des termes de la puissance m d'un polynome de nom n.*

La formule à laquelle il arrive, et qui n'est pas, je crois, nouvelle, peut se démontrer de la manière suivante.

Le terme général du développement de $(a+b+c+\ldots+t)^m$ est, comme on sait,

$$\frac{1.2.3\ldots m}{1.2.3\ldots\alpha.1.2\ldots\beta\ldots1.2\ldots\theta}\, a^\alpha b^\beta c^\gamma\ldots t^\theta, \qquad (1)$$

en posant

$$\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\theta=m. \qquad (2)$$

Le nombre des termes de ce développement est celui des solutions, en nombres entiers non négatifs, de l'équation (2), qui renferme n inconnues, n désignant le nombre des termes du polynome proposé; ou le nombre de manières dont il est possible de former une somme m, avec n nombres entiers positifs ou nuls; ou enfin, le nombre de combinaisons que l'on peut effectuer avec n lettres différentes, en les prenant m à m, et en supposant que chaque lettre peut entrer 0, 1, 2,... fois dans chaque terme. C'est sous ce dernier point de vue que je considère la question; et je désigne par N le nombre cherché.

Pour trouver ce nombre, j'observe que, pour former toutes les combinaisons dont il s'agit, on pourrait employer le moyen suivant:

a, b, c, étant pour fixer les idées, trois lettres qu'il s'agit d'arranger 7 à 7:

1°. Prenons la quantité $a'b'c'd'e'f'g'$, qui renferme sept lettres accentuées, écrites en ordre alphabétique;

2°. Dans un terme quelconque égal à celui-là, effaçons 1, 2 ou 3 lettres (et en général, n lettres au plus, si n est $< m$, m lettres au plus, si n est $> m$); puis remplaçons chaque lettre effacée par l'une des lettres a, b, c (et en général, par l'une des n lettres a, b, c,... t), en ayant soin que, dans chaque terme ainsi formé, les lettres sans accent n'offrent pas d'inversion alphabétique; qu'aucune ne se trouve répétée; et qu'une suite de lettres accentuées soit toujours précédée d'une lettre sans accent (ce qui exige que l'on efface toujours la lettre a').

Nous obtiendrons ainsi une suite de termes tels que

$$ab'c'be'f'g', \quad abc'd'e'cg', \quad bb'c'd'cf'g', \text{ etc.} \qquad \text{(A)}$$

3°. Enfin, dans chacun des termes de la suite (A), remplaçons chaque lettre accentuée par la lettre sans accent qui la précède. Nous aurons la nouvelle suite :

$$aaabbbb, \quad abbbbcc, \quad bbbbccc, \text{ etc.} \qquad \text{(B)}$$

Si l'on a effectué sur la quantité $a'b'c'd'e'f'g'$ les opérations indiquées, de toutes les manières possibles, la suite (B) renfermera toutes les combinaisons demandées, sans qu'il y en ait d'omises, ni de répétées : nous supprimerons la démonstration, qui est fort simple.

Or, la suite (A), qui contient autant de termes que la suite (B), renferme toutes les combinaisons des 6 lettres b', c', d', f', g', et des 3 lettres a, b, c, prises 7 à 7. Donc en général, $N = C_{n+m-1,m}$; savoir

$$N = \frac{n+m-1}{1} \cdot \frac{n+m-2}{2} \cdots \frac{n+1}{m-1} \cdot \frac{n}{m}, \qquad (3)$$

ou

$$N = \frac{m+1}{1} \cdot \frac{m+2}{2} \cdots \frac{m+n-1}{n-1}. \qquad (4)$$

Les formules (3) ou (4), donnent le nombre des termes du développement dont (1) est le terme général.