JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

THÉODORE OLIVIER

Note de géométrie. - Sur quelques propriétés de l'Ellipsoïde à trois axes inégaux

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 3 (1838), p. 145-160.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1838_1_3__145_0>

gallica NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Gallica de la Bibliothèque nationale de France
http://gallica.bnf.fr/

et catalogué par Mathdoc dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
http://www.numdam.org/journals/JMPA

NOTE DE GÉOMÉTRIE.

Sur quelques propriétés de l'Ellipsoïde à trois axes inégaux;

PAR M. THÉODORE OLIVIER.

I.

1°. On sait que les triangles équilatéraux inscrits et circonscrits à un cercle, ont pour centre de gravité, le centre de ce cercle.

Désignons par T l'aire du triangle inscrit, par T_1 l'aire du triangle circonscrit, et par C l'aire du cercle.

2°. Si l'on projette sur un plan P et parallèlement à une droite D les aires C, T, T_1, on obtiendra les aires E, T', T'_1,

E étant l'aire de l'ellipse projection oblique du cercle C,
T'............du triangle................du triangle inscrit au cercle C,
T'_1.............du triangle... ....du triangle circonscr. au cercle C.

On sait que les triangles T' et T'_1 auront pour centre de gravité le centre de l'ellipse E.

3°. On peut inscrire et circonscrire au cercle C une infinité de triangles équilatéraux: tous les triangles inscrits ont même aire. Il en est de même pour les triangles circonscrits.

Désignant donc par T', T'', T''',... les aires des projections obliques sur le plan P des triangles inscrits, et par T'_1, T''_1, T'''_1,... les aires des projections obliques sur le même plan P des triangles circonscrits, on aura

$$T' = T'' = T''' = \ldots \quad \text{et} \quad T'_1 = T''_1 = T'''_1 = \ldots$$

4°. Les aires du cercle C (du rayon R) et du triangle équilatéral inscrit T, sont entre elles :: $\pi R^2 : \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$.

On aura donc toujours quel que soit le rayon R,

$$\frac{c'}{t} = \frac{4\pi}{\sqrt{27}} = \text{constante} = N \text{ et } \frac{c'}{t_1} = \text{constante} = N_1,$$

où l'on désigne par c' l'aire d'un cercle d'un rayon arbitraire, et par t et t_1 les aires de deux triangles équilatéraux inscrit et circonscrit à ce cercle.

On aura donc $\left(\text{puisque } \frac{C}{T} = \text{constante} = N \text{ et } \frac{C}{T_1} = \text{constante} = N_1\right)$,

$$\frac{E}{T'} = \frac{E}{T''} = \frac{E}{T'''} = \ldots = \text{constante} = M,$$
$$\frac{E}{T'_1} = \frac{E}{T''_1} = \frac{E}{T'''_1} = \ldots = \text{constante} = M_1.$$

Par conséquent si, étant données deux ellipses E et E', on inscrit les triangles θ à E et θ' à E', ces deux triangles ayant leur centre de gravité situés, le premier au centre de la courbe E, et le second, aussi, au centre de la courbe E', les aires des deux ellipses seront entre elles comme les aires des deux triangles; les aires des deux ellipses seront donc égales, si celles des deux triangles sont égales.

Cela posé :

5°. Résolvons le problème suivant :

Inscrire et circonscrire à une ellipse E *deux triangles ayant pour centre de gravité le centre de la courbe donnée.*

Construction. Ayant déterminé le centre o de l'ellipse E, ayant mené par ce centre une droite arbitraire K coupant l'ellipse aux points b et b'; on partagera le diamètre bb' en quatre parties égales entre elles. (Désignons par l la longueur d'une des parties.)

Construisons au point b la tangente B à l'ellipse.

Portons sur la droite K à partir du point b, une longueur $= 3l$, on aura un point a.

Menons par ce point a une droite L parallèle à la tangente B, et coupant l'ellipse aux deux points x et x', la corde xx' sera la *conjuguée* du diamètre bb', dès-lors le point a sera le milieu de cette corde.

Portons sur la droite K à partir du point b une longueur $= 6.l$, on aura un point p, et les droites px et px' seront tangentes à l'ellipse, l'une au point x et l'autre au point x'.

Joignons b et x, b' et x', on aura un parallélogramme $bxpx'$, et le triangle bxx' moitié de ce parallélogramme sera inscrit, à l'ellipse E, et aura son centre de gravité situé au centre o de cette courbe.

Prolongeons les tangentes px, px', elles couperont la droite B, la première en un point y', et la seconde en un point y, le triangle pyy' sera circonscrit à l'ellipse E, et son centre de gravité sera situé au centre o de cette courbe.

Les deux triangles pyy' et bxx' sont semblables et inversement placés l'un par rapport à l'autre, et jouissent des propriétés suivantes.

Les droites xy et $x'y'$, passent par le centre o et coupent respectivement les côtés bx' et bx en leur milieu.

Les points b, x, x', sont respectivement le milieu des côtés du triangle circonscrit, etc.

En un mot, toutes les propriétés qui existent pour deux triangles équilatéraux, inscrit et circonscrit à un cercle, se reproduiront sur la projection, en vertu du principe fondamental des projections cylindriques, savoir : que les rapports de grandeur entre les droites ne sont point altérés, et qu'une tangente à une courbe, se projette suivant une tangente à la projection de la courbe.

Faisant la même construction que ci-dessus pour chaque diamètre de l'ellipse E, on obtiendra une série de triangles inscrits T', T'', T''',... et circonscrits T'_1, T''_1, T'''_1,... ayant tous pour centre de gravité commun, le centre o de l'ellipse donnée E.

6°. Si donc, l'on considère la courbe E comme la base d'un cône ayant pour sommet un point arbitraire S de l'espace, toutes les pyramides qui auront pour sommet commun le point S, et pour bases les triangles inscrits, auront même volume ; il en sera de même pour les pyramides ayant le même point S pour sommet commun, et pour bases les triangles circonscrits.

Et les volumes d'une pyramide inscrite et du cône seront entre eux :: $\sqrt{27} : 4\pi$.

II.

Par le centre o d'une sphère S (du rayon R), concevons trois axes rectangulaires entre eux X, Y, Z, perçant respectivement la surface aux points a, b, d, on aura une pyramide trirectangle (o, abd).

Le triangle base abd sera équilatéral ; le plan de ce triangle coupera la sphère suivant un cercle C, dont le centre sera le centre de gravité du triangle abd.

Le cercle C se projettera orthogonalement sur le plan XY, suivant une ellipse E, et le triangle *abd* suivant le triangle rectangle *oab*.

Le triangle *oab* sera inscrit à l'ellipse E et aura son centre de gravité situé au centre de cette courbe.

Si l'on abaisse du centre o une perpendiculaire r sur la droite ab, et que l'on décrive du centre o avec le rayon r, et dans le plan XY un cercle C', l'on pourra imaginer un cône de révolution ξ (ayant C' pour base et le point d pour sommet).

Tout plan tangent à ce cône ξ, coupera la sphère S suivant des cercles égaux entre eux et à C, lesquels se projetteront sur le plan XY, suivant des ellipses dont les aires seront égales entre elles et à celle de l'ellipse E.

Et cela aura lieu pour tout autre système formé par trois droites rectangulaires entre elles X', Y', Z', et se croisant au centre de la sphère; de sorte que les plans des triangles abd, $a'b'd'$,... seront tangents à une sphère S' concentrique à la sphère S, et le point de contact de chacun de ces plans, sera le centre de gravité de chacun des triangles.

On sait : que le rayon de la sphère S étant égal à R.

1°. Le rayon du cercle C est égal à $\frac{2R}{\sqrt{7}}$ ou $R\sqrt{\frac{4}{7}}$;

2°. Le rayon r du cercle C' est égal à $\frac{R}{2}\sqrt{3}$ ou $R\sqrt{\frac{3}{4}}$;

3°. Le rayon de la sphère S' est égal à $\frac{3R}{\sqrt{21}}$. ou $R\sqrt{\frac{3}{7}}$.

Cela posé,

Concevons par le centre o de la sphère S,

1°. Les trois axes rectangulaires X, Y, Z,

2°. Trois droites arbitraires X_1, Y_1, Z_1.

Prenons un point m sur la sphère; abaissons de ce point une perpendiculaire z sur le plan XY, et perçant ce plan au point t; par le point t menons une perpendiculaire y à l'axe X et rencontrant cette droite au point u.

Les trois coordonnées du point m seront :

$$x = \overline{ou}, \quad y = \overline{ut}, \quad z = \overline{tm};$$

à partir du point o, portons sur X_1 la droite $\overline{ou_1} = M.x$; par le point u_1 menons une droite parallèle à Y, et prenons sur cette droite, une longueur $\overline{u_1t_1} = M'y$; par le point t_1 menons une parallèle à Z_1, et prenons sur cette droite une longueur $\overline{t_1m_1} = M''.z$.

Le point m_1 sera le *transformé* du point m.

Faisant la même construction pour tous les points de la sphère S, (M, M', M'', restant constants), le lieu des points m_1 sera, ainsi qu'on le sait, un ellipsoïde λ, auquel on donne le nom de *transformé* de la sphère S.

Les axes X_1, Y_1, Z_1, perceront la surface λ en les points a_1, b_1, c_1, et l'on aura : $\overline{oa_1} = M.R$, $\overline{ob_1} = M'.R$, $\overline{oc_1} = M''.R$. (Les points a_1, b_1, c_1, étant respectivement les *transformés* des points a, b, c, en lesquels la sphère S se trouve percée par les axes X, Y, Z).

Représentons M.R par A, M'.R par B, M''.R par D; A, B, D, seront les $\frac{1}{2}$ diamètres conjugués de l'ellipsoïde λ.

Par ce mode de transformation, souvent employé par les géomètres modernes, on transforme ainsi qu'on le sait :

1°. Une droite en une autre droite, et deux droites parallèles en deux autres droites aussi parallèles.

2°. Un plan en un autre plan, et deux plans parallèles en deux autres plans aussi parallèles.

3°. Une surface du second degré en une autre surface du second degré et du même genre.

4°. Trois points p, q, r, situés sur une droite K, en trois autres points p_1, q_1, r_1, situés sur une droite K_1 et tels, que les rapports entre leurs distances restent les mêmes, que ceux qui existaient entre les distances respectives des points primitifs p, q, r.

5°. Un plan tangent T à la sphère S, en un plan T_1 tangent à l'ellipsoïde λ.

6°. Un système quelconque de trois droites rectangulaires entre elles L, L', L'' et se croisant au centre de la sphère S, en un système de trois droites L_1, L'_1, L''_1, qui sont les directions d'un système de diamètres conjugués de l'ellipsoïde λ (*transformé* de la sphère S)(*).

(*) Les résultats énoncés sous les n°s 1, 2, 4, 5 et 6 peuvent être évidemment obtenus et démontrés par la *Géométrie descriptive*, sans avoir recours

Cela posé :

Les résultats suivants deviennent évidents et peuvent être facilement énoncés sous forme de *théorèmes* (*).

1. Étant donné un ellipsoïde λ, dont les demi-axes seront A, B, D, construisons un ellipsoïde λ' concentrique et semblable, et semblablement placé par rapport à la surface λ; les demi-axes de λ' étant

$$A\frac{3}{\sqrt{21}}, \quad B\frac{3}{\sqrt{21}}, \quad D\frac{3}{\sqrt{21}}.$$

Concevons un diamètre A′ de λ perçant cette surface en un point a', par ce point a' menons un plan T′ tangent à l'ellipsoïde λ', le point de contact étant t'.

Le plan T′ coupera λ suivant une ellipse E′ dont le centre sera en t'.

Si l'on inscrit à E′ le triangle ayant un de ses sommets en a', et pour centre de gravité le point t' (désignant par b' et d' les deux autres sommets du triangle t'). Les trois diamètres passant par les points a', b', d', formeront un système de *diamètres conjugués* de la surface λ.

2. Par le point a' on peut mener une infinité de plans tangents à la surface λ'; ces plans auront pour surface-enveloppe un cône G′ (ayant a' pour sommet) tangent à λ' suivant une ellipse g'.

Dès-lors, on aura une infinité de systèmes de *diamètres conjugués*, ayant en commun le diamètre A′; dès-lors, les extrémités des *diamètres conjugués* formant chaque système, seront les sommets de triangles, ayant tous le point a' pour sommet commun, et le centre de gravité de chacun de ces triangles, sera situé sur l'ellipse g'.

3. Si l'on mène un plan T tangent à l'ellipsoïde intérieur λ', ce plan coupant l'ellipsoïde λ suivant une ellipse E; si l'on inscrit à l'el-

---

à l'*analyse*; mais le résultat énoncé sous le n° 3, n'a été jusqu'à présent obtenu qu'au moyen de l'analyse; plus loin nous y parviendrons au moyen de la *Géométrie descriptive*.

(*) La plupart de ces théorèmes sont déjà connus. Mais le mode de démonstration dont je fais usage offre quelques dissemblances avec celui qui avait été employé. (*Voir* le Mémoire de M. Chasles, tome III de la *Correspondance sur l'École Polytechnique*, publiée par Hachette.)

lipse E, les divers triangles θ, θ', θ'', etc., ayant leur centre de gravité au centre de la courbe E, chacun de ces triangles sera la base d'une pyramide, ayant son sommet au centre de la surface λ et dont les trois arètes se croisant au sommet, formeront un système de diamètres conjugués de cette surface.

4. Étant donnés, trois demi-diamètres conjugués A', B', D', de l'ellipsoïde λ; désignant par a', b', d', les points en lesquels la surface se trouve percée par ces demi-diamètres, désignant par G' le cône tangent à l'ellipsoïde λ', et dont le sommet est en a'; désignant par h' l'ellipse, section du cône G' par le plan Q, lequel passe par les deux autres demi-diamètres B' et D', on aura les résultats suivants :

Tout plan P tangent au cône G', coupera l'ellipsoïde λ suivant une ellipse E qui se projettera (par un cylindre parallèle au diamètre A'), sur le plan Q suivant une ellipse E'.

Toutes les ellipses E' auront même aire.

Chaque ellipse E' aura son centre situé sur l'ellipse h' et passera par le centre de la surface λ.

Le triangle a', b', d', se projettera (au moyen du même mode de projection oblique), sur le plan Q suivant un triangle T' dont le centre de gravité sera situé au centre de l'ellipse E'.

Tous les triangles T' auront même aire.

5. En se rappelant, 1° que l'aire du parallélogramme construit sur deux demi-diamètres conjugués d'une ellipse est constante et égale à celle du rectangle construit sur les demi-axes de cette courbe; 2° que le volume du parallélépipède oblique, construit sur trois demi-diamètres conjugués d'un ellipsoïde, est constant et égal à celui du parallélépipède rectangle, construit sur les trois demi-axes de cette surface, on voit de suite que :

1°. Toutes les pyramides ayant pour sommet commun le point a' et pour base les divers triangles T', auront même volume V.

2°. Tous les cônes ayant pour sommet commun le point a' et pour base les diverses ellipses E', auront même volume V_1, et les volumes V et V_1 seront constants, quel que soit le système de diamètres conjugués que l'on emploiera, et conserveront la même valeur, en passant d'un système de diamètres conjugués, à un autre système de diamètres conjugués.

6. Si l'on mène un plan tangent P à l'ellipsoïde λ' lequel coupera la surface λ suivant une ellipse E; si du centre de l'ellipsoïde λ, on abaisse sur le plan P une perpendiculaire ν, on aura $\nu.\mathrm{E}=\text{const.}=\alpha$, quelle que soit la position du plan P. En d'autres termes : les cônes ayant leur sommet au centre de l'ellipsoïde, et pour base les diverses sections planes E, auront des volumes égaux, et si l'on inscrit et circonscrit à l'ellipse E, deux triangles θ et θ_1, ayant leur centre de gravité situé au centre de la courbe E, on aura

$$\nu.\theta = \text{constante} = 6 \quad \text{et} \quad \nu.\theta_1 = \text{constante} = \gamma.$$

En d'autres termes : les pyramides ayant leur sommet au centre de l'ellipsoïde, et pour base les divers triangles inscrits θ, auront des volumes égaux; et les pyramides ayant leur sommet au centre de l'ellipsoïde et pour base les divers triangles circonscrits θ_1 auront aussi des volumes égaux.

7. Et comme la pyramide qui a son sommet au centre de l'ellipsoïde λ, et pour base le triangle θ (inscrit à l'ellipse E), est la même que celle qui a son sommet au point a', extrémité du demi-diamètre A', et pour base le triangle T' (inscrit à l'ellipse E' projection oblique de l'ellipse E).

Et comme la pyramide (a', T') est le sixième du parallélépipède oblique construit sur les demi-diamètres conjugués. On aura : le volume de chacune des pyramides telles que (a', T') ou (o, θ) égal à $(\frac{1}{6}.\mathrm{A}.\mathrm{B}.\mathrm{D})$, égal au sixième du parallélépipède construit sur les demi-axes de l'ellipsoïde λ.

Et comme le volume du cône (a', E') ou (o, E) est au volume de la pyramide inscrite :: $4\pi : \sqrt{27}$. Le volume du cône (a', E') ou (o, E) sera égal à $\left(\frac{2\pi}{3}.\frac{\mathrm{A}.\mathrm{B}.\mathrm{D}}{\sqrt{27}}\right)$, ou $=\frac{2\pi}{9}.\frac{\mathrm{A}.\mathrm{B}.\mathrm{D}}{\sqrt{3}}$.

I. Soit $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{d^2}=1$

l'équation d'un ellipsoïde λ rapporté à ses axes et à son centre.

Soit $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{d}=1$

L'équation d'un plan P passant par les extrémités des trois demi-axes positifs de la surface λ.

Si, l'ellipse E section faite dans la surface λ par le plan P, a son centre situé au centre de gravité du triangle T formé par les traces du plan P sur les trois plans des coordonnées rectangulaires, alors : la projection orthogonale de l'ellipse E sur l'un quelconque des trois plans des coordonnées rectangulaires, aura son centre situé au centre de gravité de la projection orthogonale du triangle T sur le même plan des coordonnées. *Et vice versâ.*

En effet :

L'équation de la projection de la courbe E sur le plan des xy sera

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{xy}{ab}-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0.$$

Les coordonnées de son centre seront déterminées par les deux équations

$$\frac{2x}{a}+\frac{y}{b}-1=0,$$
$$\frac{2y}{b}+\frac{x}{a}-1=0,$$

d'où $y=\frac{1}{3}b$ et $x=\frac{1}{3}a$.
Donc, etc.

II. Désignant par a', b', d', les longueurs de trois demi-diamètres conjugués de l'ellipsoïde λ, et prenant ces diamètres pour axes des coordonnées obliques, l'équation de cette surface (en coordonnées obliques), sera

$$\frac{x'^2}{a'^2}+\frac{y'^2}{b'^2}+\frac{z'^2}{d'^2}=1,$$

et l'équation d'un plan P′ (rapporté aux mêmes coordonnées obliques), en passant par les extrémités des trois demi-diamètres conjugués, sera

$$\frac{x'}{a'}+\frac{y'}{b'}+\frac{z'}{d'}=1.$$

L'équation (en coordonnées obliques), de la projection oblique sur le plan $x'y'$ de la section faite dans la surface λ par le plan P′, sera

$$\frac{x'^2}{a'^2} + \frac{y'^2}{b'^2} + \frac{x'y'}{a'b'} - \frac{x'}{a'} - \frac{y'}{b'} = 0,$$

et l'on trouvera pour les coordonnées obliques du centre de cette projection

$$y' = \tfrac{1}{3} b' \quad \text{et} \quad x' = \tfrac{1}{3} a'.$$

Ainsi l'on pourra facilement vérifier par *l'analyse*, les divers résultats auxquels nous sommes parvenus précédemment, en employant (seulement) la méthode des projections, la *Géométrie descriptive*.

III. Étant donné un ellipsoïde λ; en un point m de cette surface, on mène le plan tangent T, lequel coupe les axes (prolongés) de la surface λ respectivement aux points A, B, D; on demande quelle position doit avoir le point m sur l'ellipsoïde pour que l'aire du triangle ABD soit un minimum.

Soit
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{d^2} = 1.$$

L'équation de l'ellipsoïde λ rapportée à ses axes et à son centre.

Désignant par x', y', z', les coordonnées du point m, l'équation du plan T sera

$$\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} + \frac{zz'}{d^2} = 1,$$

les coordonnées du point en lequel le plan T coupe

l'axe des x, seront : $y = 0$, $z = 0$, $x = \frac{a^2}{x'}$,

l'axe des y, $x = 0$, $z = 0$, $y = \frac{b^2}{y'}$,

l'axe des z, $x = 0$, $y = 0$, $z = \frac{d^2}{z'}$,

L'aire du triangle ABD est égale à celle de sa projection sur le plan xy, divisée par le cosinus de l'angle α, que le plan T fait avec ce même plan coordonné.

L'aire de la projection du triangle ABC est égale à $\frac{a^2b^2}{2.x'y'}$.

$$\text{Le cosinus de l'angle } \alpha = \frac{\frac{z'}{d^2}}{\sqrt{\frac{x'^2}{a^4} + \frac{y'^2}{b^4} + \frac{z'^2}{d^4}}},$$

on aura donc, en représentant par S l'aire du triangle ABD,

$$S^2 = \frac{b^4a^4x'^2 + a^4d^4y'^2 + a^4b^4z'^2}{4x'^2 . y'^2 . z'^2},$$

S sera un minimum, si S^2 est un minimum.

Et l'on trouve que le *minimum* existe, lorsque

$$x' = \frac{a}{\sqrt{3}}, \quad y' = \frac{b}{\sqrt{3}}, \quad z' = \frac{d}{\sqrt{3}},$$

la surface du triangle *minimum* est exprimée par

$$S = \frac{3}{2}\sqrt{a^2b^2 + b^2d^2 + a^2d^2}.$$

Les valeurs trouvées pour les coordonnées x', y', z', du point de contact m, lorsque le triangle ABD est un minimum, sont précisément celles du centre de gravité de ce triangle.

Et le plan tangent T, se trouve dès-lors parallèle au plan passant par les extrémités des trois demi-axes de l'ellipsoïde λ.

Les mêmes conditions subsisteront, et l'on obtiendra des résultats semblables, lorsque l'on considérera l'ellipsoïde λ, comme rapporté à son centre et à trois diamètres conjugués pris pour axes des coordonnées obliques.

On peut demander 1° quel est le triangle dont l'aire est un minimum ou un maximum, entre tous ceux formés par les extrémités des divers systèmes, de trois diamètres conjugués.

En se rappelant ce qui a été dit n° II, il suffira de mener à l'ellipsoïde λ' (intérieur et concentrique à la surface λ), un plan tangent T à l'extrémité de son grand axe, ce plan T coupera l'ellipsoïde λ suivant une ellipse E, et chaque système de diamètres conjugués, ayant pour extrémités les sommets des divers triangles inscrits à l'ellipse E, et ayant leur centre de gravité au centre de cette courbe, résoudra la question du minimum. La question du maximum sera résolue par les triangles inscrits à l'ellipse E', section de l'ellipsoïde λ par le plan T', tangent à l'ellipsoïde λ' à l'extrémité de son petit axe.

2°. Déterminer le système de diamètres conjugués, pour lequel le triangle base de la pyramide sera équilatéral.

Construisant un plan P tangent à l'ellipsoïde intérieur λ', et coupant l'ellipsoïde λ suivant un cercle C.

Tous les triangles inscrits à un cercle C, et ayant leur centre de gravité au centre de ce cercle seront équilatéraux, et les trois diamètres passant respectivement par les sommets de chacun des triangles inscrits, formeront un système satisfaisant à la question proposée.

Si l'ellipsoïde est de révolution, alors la construction précédente conduit à divers systèmes de diamètres conjugués égaux; ainsi un ellipsoïde de révolution a une infinité de systèmes de diamètres conjugués égaux, et les trois angles que ces diamètres font deux à deux, sont égaux entre eux.

La base de la pyramide formée par chaque système, sera 1° un minimum, si la surface est allongée (l'ellipse méridienne tournant autour de son grand axe). Cette base sera 2° un maximum, si l'ellipsoïde est aplati (l'ellipse méridienne ayant tourné autour de son petit axe).

IV.

Jusqu'à présent le résultat obtenu par le mode de transformation employé n° II, pour déformer une sphère en un ellipsoïde, n'a été démontré que par l'analyse.

Ainsi ayant l'équation d'une sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2,$$

on a remplacé x par Mx', y par Ny', z par Pz', M, N, P, étant des constantes arbitraires ($M = a\cos\alpha$, $N = b\cos\beta$, $P = d\cos\gamma$, α, β, γ, étant des angles constants).

Et l'on a obtenu l'équation

$$M^2x'^2 + N^2y'^2 + P^2z'^2 = R^2,$$

qui est celle d'un ellipsoïde à trois axes, rapportée à trois axes obliques X', Y', Z', et tels que les angles $XX' = \alpha$, $YY' = \beta$, $ZZ' = \gamma$.

Il ne serait peut-être pas sans intérêt, pour la *Géométrie descriptive*, de pouvoir parvenir à démontrer ce résultat par une méthode purement graphique, et en harmonie avec celle des projections.

Ainsi, il faudrait pouvoir démontrer graphiquement, qu'un plan (quelle que soit sa direction) coupera toujours la surface *transformée* de la sphère, suivant une ellipse.

On le pourra au moyen du théorème suivant dont je vais donner la démonstration.

On coupe deux surfaces inconnues par un plan, on obtient deux courbes X et X′ dont la nature est inconnue; mais l'on sait :

1°. Que toute sécante telle que A, parallèle à une droite fixe K, a ses parties interceptées égales et qu'ainsi, on a

$$bb' = aa';$$

2°. Que toute sécante telle que B passant par un point fixe f, a ses parties interceptées égales et qu'ainsi on a

$$ee' = dd'.$$

Dès-lors, les deux courbes X et X′ sont deux sections coniques semblables, et semblablement placées et concentriques. Ainsi, ces deux courbes sont : deux ellipses ou deux hyperboles (dont les axes sont proportionnels), ou deux paraboles (égales et ayant la même droite pour axe infini).

En effet, par un point arbitraire b' (pl. I, fig. 2) de la courbe X′, menons la droite A parallèle à la droite fixe K; par ce même point b', menons la droite B′ passant par le point fixe f.

A coupera la courbe X aux points b et a, et la courbe X′ aux points b' et a'.

B coupera la courbe X aux points g et n, et la courbe X′ aux points b' et n'.

Menons par g' la droite A′ parallèle à la droite K.

A′ coupera la courbe X aux points g et m,

et coupera la courbe X′ aux points d' et m'.

Par le point d' menons B passant par le point f et coupant la courbe X aux points d et e et la courbe X′ aux points d' et e'.

Cela posé :

Par 5 points, on peut faire passer une section conique, et l'on n'en peut faire passer qu'une.

Il passera donc une section conique E par les 5 points b, g, d, a, n.

Il passera donc une section conique E′ par les 5 points b', d', m', a', e'.

On sait que deux sections coniques semblables, et semblablement placées et concentriques jouissent de la propriété suivante :

Savoir : que toute sécante a ses parties interceptées par les deux courbes, égales entre elles.

Si donc, les deux sections coniques E et E′ sont semblables et semblablement placées et concentriques, 1° la courbe E passera par les 7 points b, g, d, a, n, m, e.

2°. La courbe E' passera par les 6 points b', d', m', a', e', n', puisque par hypothèse, on a

$$gd' = m'm, \quad gb' = n'n, \quad dd' = e'e.$$

Si, par le point fixe f, on fait passer une nouvelle sécante B'', on aura par hypothèse :

$$qq' = pp'.$$

On pourra faire passer une section conique E_1 par les 5 points b, g, p, a, n.

On pourra faire passer une section conique E_1' par les 5 points b', d', p', a', q'.

Si les deux courbes E_1 et E_1' sont semblables et semblablement placées et concentriques, la courbe E_1 passera par les 7 points b, g, p, a, n, m, q; et la courbe E_1' passera par les 6 points b', p', m', a', q', n'.

Les deux courbes E et E_1 auront donc 5 points communs, ainsi que les deux courbes E' et E_1' ; dès-lors E_1 ne sera autre que la courbe E, et E_1' ne sera, aussi, autre que la courbe E'.

Si donc, les deux sections coniques E et E' sont semblables et semblablement placées et concentriques, la première aura tous ses points situés sur la courbe X, et la seconde aura aussi, tous ses points situés sur la courbe X'.

Les deux courbes X et X' seront donc deux sections coniques, semblables et semblablement placées et concentriques.

Or, l'on peut démontrer 1° que 5 points déterminent une section conique, et 2° que deux sections coniques semblables et semblablement placées et concentriques, interceptent sur une sécante arbitraire des parties qui sont égales entre elles, en n'employant que la méthode des projections, sans avoir recours à l'*Analyse;* le théorème précédent se trouve donc établi par la seule méthode des projections.

Cela posé :

Imaginons une sphère S, et transformons-la par la méthode décrite n° II, en une surface λ. La nature de la surface λ nous est inconnue; mais il est évident que par ce mode de transformation, une droite se transforme en une droite, un plan en un plan, et que 3 points en ligne droite se transforment en 3 points aussi en ligne droite et dont les rapports entre leurs distances respectives, sont les mêmes que ceux qui existaient entre les distances respectives des 3 points primitifs.

Concevons une sphère S' concentrique à la première, et transformons-la par le même mode en une surface λ'.

Il est évident que les sphères S et S' étant concentriques, les surfaces λ et λ' le seront aussi.

Coupons les deux sphères S et S' par un plan arbitraire P suivant deux cercles concentriques C et C'; le plan P se transformera en un plan P_1 et les deux cercles C et C' en deux courbes E et E' situées sur le plan P_1.

Je dis que les deux courbes *transformées*, E et E' ne sont autres que deux ellipses semblables et semblablement placées et concentriques.

En effet :

Il est évident d'abord que la *transformée* d'un cercle, ne peut être qu'une courbe fermée; ensuite que cette *transformée* ne peut être qu'une courbe ayant un centre.

Cela posé :

Concevons dans le plan P un faisceau A, de droites parallèles entre elles, et un faisceau B de droites divergentes d'un point fixe f; toutes les droites du faisceau A se transformeront en un faisceau A', de droites parallèles entre elles; toutes les droites du faisceau B se transformeront en un faisceau B', de droites divergeant d'un point fixe f' (ce point f' est le *transformé* du point f).

Les parties interceptées par les cercles C et C' sur chacune des droites composant les deux faisceaux A et B sont égales entre elles; les parties interceptées par les deux courbes E et E' sur chacune des droites, composant les deux faisceaux A' et B' seront donc aussi égales entre elles.

Donc les deux courbes E et E' sont deux sections coniques semblables et semblablement placées et concentriques; mais elles sont des courbes fermées, donc elles sont des ellipses.

Ainsi tout plan (quelle que soit sa direction), coupera la surface λ suivant une ellipse; donc la surface λ est un *ellipsoïde*.

Toutes les surfaces du second ordre, peuvent être engendrées de deux manières différentes, et les deux modes de génération, sont identiquement les mêmes pour chacune de ces surfaces.

Ainsi : pour l'ellipsoïde par exemple :

1er Mode de génération.

Étant donnée une ellipse E sur le plan horizontal, une verticale D passant par le centre o de la courbe E, prenant un point fixe a sur D, on peut concevoir une ellipse mobile E', ayant son centre en o, et pour l'un de ses axes, la longueur (constante) oa, l'autre axe (variable) étant l'un des diamètres de l'ellipse E.

2e Mode de génération.

Étant donnés trois axes X, Y, Z, rectangulaires entre eux et se croisant en un point o, portant sur chacun d'eux à droite et à gauche du point o des distances égales entre elles, savoir sur X des longueurs égales à a, sur Y des longueurs égales à b, sur Z des longueurs égales à d. Construisant trois ellipses E, E_1, E_2, ayant pour centre commun le point o, et dont les demi-axes seront

$$\begin{aligned} &a \text{ et } b \text{ (pour E)}, \\ &a \text{ et } d \text{ (pour } E_1), \\ &b \text{ et } d \text{ (pour } E_2); \end{aligned}$$

on peut concevoir que les deux courbes E et E_1 restent fixes, et que la courbe E_2 se meuve parallèlement à elle-même, et de manière à ce qu'elle varie de grandeur, ces axes étant successivement les coordonnées des courbes E et E_1.

Or, au moyen du théorème précédemment établi, il est facile de démontrer que tout plan (quelle que soit sa direction), coupera toujours la surface engendrée par l'un ou l'autre des deux *modes* ci-dessus, suivant une section conique, et il sera facile de reconnaître la nature de cette section conique, en n'employant d'autres moyens que ceux fournis par la *Géométrie descriptive*.

Et en s'appuyant sur cette propriété fondamentale que toutes les sections planes sont des coniques, il est facile de trouver par la *Géométrie descriptive* seule, les diverses autres propriétés dont jouissent les surfaces du second ordre, lesquelles n'ont encore été démontrées, qu'au moyen de l'analyse de Descartes, dans les traités publiés sur la géométrie à trois dimensions.