JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

JACOBI

Suite du mémoire sur la Réduction de l'intégration des Équations différentielles partielles du premier ordre entre un nombre quelconque de variables à l'intégration d'un seul système d'équations différentielles ordinaires

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 3 (1838), p. 161-201.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1838_1_3__161_0>

SUITE DU MÉMOIRE

Sur la Réduction de l'intégration des Équations différentielles partielles du premier ordre entre un nombre quelconque de variables à l'intégration d'un seul système d'équations différentielles ordinaires ;

Par M. JACOBI (*).

VIII.

Nous avons vu dans ce qui précède que pour le cas du mouvement d'un système libre de n points matériels, sur lesquels n'agissent que des forces intérieures d'attraction ou de répulsion, le système de $3n$ équations différentielles ordinaires du second ordre est remplacé parfaitement par une seule équation différentielle partielle, dont on n'a besoin de connaître qu'une solution complète quelconque. Il s'agit maintenant de savoir quels moyens l'analyse possède pour trouver une telle solution, et si, d'après l'état actuel de nos connaissances, on a gagné quelque chose par une telle réduction.

Tout ce qu'on connaît d'essentiel sur l'intégration des équations différentielles partielles du premier ordre est contenu, je crois, dans les leçons de Lagrange sur le calcul des fonctions, et dans un Mémoire de Pfaff, inséré dans les Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin, année 1814. Lagrange borne ses recherches aux équations différentielles partielles du premier ordre à *trois* variables, l'une de ces variables devant être déterminée en fonction des deux autres considérées comme indépendantes. Quant à la méthode de Pfaff, qui s'étend aux équations différentielles partielles du pre-

(*) La première partie de ce mémoire a été imprimée dans le cahier de février. *Voyez* page 60 de ce volume. (J. Liouville.)

mier ordre à un *nombre quelconque* de variables, j'ai essayé, dans le vol. II du Journal de M. Crelle, de l'exposer d'une manière plus symétrique et plus claire, sans cependant y ajouter quelque chose d'essentiellement nouveau. Pfaff quitte la marche que Lagrange a suivie, parce qu'elle lui semble sujette à des difficultés insurmontables, quand on l'applique à des équations à plus de trois variables. Il considère le problème sous un point de vue tout nouveau, comme un cas spécial d'un problème beaucoup plus général qu'il réussit à résoudre.

Soit x une fonction des n variables $x_1, x_2, \ldots x_n$, et $p_1, p_2, \ldots p_n$, les coefficients différentiels partiels de cette fonction pris par rapport à ces variables; l'expression la plus générale d'une équation différentielle partielle du premier ordre à $n+1$ variables est de la forme

$$0 = \varphi(x, x_1, x_2, \ldots x_n, p_1, p_2, \ldots p_n).$$

D'après cette équation p_n est une fonction des $2n$ quantités $x, x_1, x_2, \ldots x_n, p_1, p_2, \ldots p_{n-1}$: il s'agit donc d'intégrer l'équation

$$dx = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \ldots + p_{n-1} dx_{n-1} + p_n dx_n,$$

qui a lieu entre ces $2n$ quantités, et d'y satisfaire par un système de n équations. En effet, x étant fonction de $x_1, x_2, \ldots x_n$, les coefficients différentiels partiels de x, pris par rapport à ces variables, sont eux-mêmes des fonctions de ces quantités, ou bien il y a entre les $2n+1$ quantités $x, x_1, x_2, \ldots x_n, p_1, p_2, \ldots p_n$, un nombre $n+1$ d'équations, dont l'une $\varphi = 0$ est donnée, de sorte qu'après avoir exprimé p_n en fonction des autres quantités à l'aide de cette équation, il reste encore à trouver n équations entre les $2n$ quantités $x, x_1, x_2, \ldots x_n, p_1, p_2, \ldots p_{n-1}$, qui doivent satisfaire à l'équation différentielle proposée. Pfaff considère la forme la plus générale d'une équation différentielle linéaire ordinaire du premier ordre entre les $2n$ variables $x, x_1, x_2, \ldots x_{2n-1}$, savoir

$$0 = \mathrm{X}dx + \mathrm{X}_1 dx_1 + \ldots + \mathrm{X}_{2n-1} dx_{2n-1},$$

ou $\mathrm{X}, \mathrm{X}_1, \ldots \mathrm{X}_{2n-1}$, sont des fonctions quelconques de ces $2n$ variables. Cette équation se réduit à la précédente dans le cas particulier où l'on a

$$X_{n+1} = X_{n+2} = \ldots = X_{2n-1} = 0,$$

pourvu qu'on remplace en outre $-\frac{X_1}{X}$, $-\frac{X_2}{X}$, $\ldots -\frac{X_n}{X}$, par les quantités $p_1, p_2, \ldots p_n$, en considérant $p_1, p_2, \ldots p_{n-1}$, ainsi que $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$, comme variables indépendantes, et p_n comme une fonction donnée de ces quantités; de sorte que les coefficients p_1, p_2, p_{n-1}, tiennent lieu des $n-1$ variables indépendantes x_{n+1}, $x_{n+2}, \ldots x_{2n-1}$. Pfaff se propose ensuite d'exprimer les $2n$ variables en fonction d'une seule d'entre elles, x_{2n-1} par exemple, et de $2n - 1$ autres quantités $a_1, a_2, \ldots a_{2n-1}$, tellement choisies qu'en introduisant dans l'équation différentielle

$$0 = Xdx + X_1 dx_1 + \ldots + X_{2n-1} dx_{2n-1}$$

ces nouvelles variables, l'expression qui multiplie dx_{2n-1} s'evanouisse, et que la quantité x_{2n-1} ne se trouve dans les expressions qui multiplient les autres différentielles $da_1, da_2, \ldots da_{2n-1}$, qu'en facteur commun. Cela étant, après la division par ce facteur commun, l'équation différentielle se réduira à une autre à $2n - 1$ variables $a_1, a_2, \ldots a_{2n-1}$. L'auteur démontre que cette réduction est toujours possible, et qu'on trouve les substitutions qui conviennent à ce but, en intégrant complétement un certain système de $2n - 1$ équations différentielles ordinaires du premier ordre aux $2n$ variables $x, x_1, \ldots x_{2n-1}$: les expressions des constantes arbitraires en $x, x_1, \ldots x_{2n-1}$, telles qu'elles sont données par ces $2n - 1$ équations intégrales, sont les nouvelles quantités $a_1, a_2, \ldots a_{2n-1}$, qu'on doit introduire. On a donc ce théorème remarquable, qu'une équation différentielle linéaire ordinaire quelconque, à un nombre pair de variables, peut toujours être réduite à une autre qui ne contient qu'un nombre de variables impair moindre d'une unité. Mais on ne peut pas transformer de la même manière, une équation semblable et à un nombre impair de variables, dans une autre à un nombre pair de variables moindre d'une unité; à moins que les coefficients de l'équation différentielle proposée ne satisfassent à une certaine équation de condition. Afin de pouvoir appliquer le théorème à une réduction ultérieure, Pfaff égale donc une des quantités introduites a_{2n-1} à une constante: l'équation différentielle ne contient alors que $2n-2$ variables, qu'il réduit d'après la même méthode à une autre, contenant $2n-3$ variables b_1, b_2,... b_{2n-3}; puis il égale b_{2n-3} à une constante, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'à la fin le problème soit réduit à une équation différentielle ordinaire du premier ordre à deux variables, dont l'intégration introduit encore une constante arbitraire. De manière que Pfaff intègre l'équation différentielle proposée en égalant successivement n expressions a_{2n-1}, b_{2n-3}, etc., à des constantes arbitraires, ou, en autres termes, il démontre qu'une équation différentielle linéaire ordinaire du premier ordre à $2n$ variables, peut être intégrée par un système de n intégrales finies, contenant n constantes arbitraires. Connaissant un tel système, Pfaff en déduit la solution la plus générale au moyen d'une fonction arbitraire de $n-1$ quantités; à cet effet, parmi les constantes arbitraires, que nous nommerons α_1, α_2,... α_n, il en considère une, α_n par exemple, comme fonction arbitraire des autres, qu'il traite comme des quantités variables; on obtient alors une équation différentielle de la forme

$$\mathrm{X}dx+\mathrm{X}_1dx_1+\ldots+\mathrm{X}_{2n-1}dx_{2n-1}=\Pi_1d\alpha_1+\Pi_2d\alpha_2+\ldots+\Pi_{n-1}d\alpha_{n-1},$$

qui se réduit à la proposée, si l'on détermine α_1, α_2,... α_{n-1}, en fonction de x, x_1, x_2,... x_{2n-1}, au moyen des $n-1$ équations

$$\Pi_1=0,\quad \Pi_2=0,\ldots\quad \Pi_{n-1}=0.$$

En appliquant cette méthode générale à l'équation

$$dx=p_1dx_1+p_2dx_2+\ldots+p_{n-1}dx_{n-1}+p_ndx_n,$$

où p_n est, en vertu de l'équation différentielle partielle $\varphi=0$, une fonction déterminée des autres variables, on obtient n équations qui donnent l'intégrale cherchée de l'équation $\varphi=0$ après l'élimination des $n-1$ quantités p_1, p_2,... p_{n-1}. Voilà tout ce qu'on connaissait (à ce que je sache), sur l'intégration des équations différentielles partielles du premier ordre, le nombre des variables surpassant trois.

D'après cette méthode, on doit donc trouver successivement n systèmes différents d'équations différentielles ordinaires, et les intégrer *tous complétement;* savoir, un système de $2n-1$ équations différentielles à $2n$ variables, un de $2n-3$ équations à $2n-2$ variables, et ainsi de suite jusqu'à une équation différentielle à deux variables. On ne peut écrire généralement que le premier système, puisque cette méthode exige pour pouvoir assigner un système quelconque, l'intégration complète de tous les systèmes précédents. Si l'on fait pour abréger

$$(\alpha,\ \beta) = \frac{dX_\alpha}{dx_\beta} - \frac{dX_\beta}{dx_\alpha},$$

ce premier système peut s'écrire, en introduisant encore une autre différentielle dN, sous la forme suivante,

$$\begin{array}{rl}
XdN = & * \quad (0,1)dx_1 + \ldots + (0,2n-1)dx_{2n-1}, \\
X_1dN = & (1,0)dx \quad * \quad + \ldots + (1,2n-1)dx_{2n-1}, \\
X_2dN = & (2,0)dx + (2,1)dx_1 \ * \ldots + (2,2n-1)dx_{2n-1}, \\
\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
X_{2n-1}dN = & (2n-1,0)\,dx + (2n-1,1)\,dx_1 + \ldots + \quad * .
\end{array}$$

C'est ce que j'ai fait voir dans le Journal de M. Crelle, t. II, p. 353.

Au moyen de ces équations, on trouve les rapports de dx_1, dx_2,... dx_{2n-1}. Les coefficients d'une ligne horizontale sont égaux, et de signes contraires, aux coefficients de la colonne verticale de même rang que la ligne horizontale, puisqu'on a

$$(\alpha,\ \beta) = -(\beta,\ \alpha);$$

c'est aussi en conséquence de cette règle que tous les termes sur la diagonale s'évanouissent, car

$$(\alpha,\ \alpha) = 0.$$

Ces équations ressemblent en cela aux équations linéaires auxquelles Lagrange et M. Poisson sont parvenus dans leurs travaux sur la variation des constantes dans les problèmes de Mécanique. J'ai fait quelques remarques, à l'endroit cité du Journal de M. Crelle, sur cette sorte d'équations linéaires, qui se résolvent toujours avec une grande facilité.

En mettant $p_1, p_2, \ldots p_{n-1}$, au lieu de $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots x_{2n-1}$, et en faisant

$$X_1 = p_1, \quad X_2 = p_2, \ldots X_{n-1} = p_{n-1}, \quad X_n = p_n,$$
$$X = -1, \quad X_{n+1} = X_{n+2} \ldots = X_{2n-1} = 0,$$

le précédent système d'équations différentielles se change en

$$- dN = - \frac{dp_n}{dx} dx_n,$$
$$p_1 dN = dp_1 - \frac{dp_n}{dx_1} dx_n,$$
$$p_2 dN = dp_2 - \frac{dp_n}{dx_2} dx_n,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$p_{n-1} dN = dp_{n-1} - \frac{dp_n}{dx_{n-1}} dx_n,$$
$$p_n dN = \frac{dp_n}{dx} dx + \frac{dp_n}{dx_1} dx_1 + \ldots + \frac{dp_n}{dx_{n-1}} dx_{n-1}$$
$$+ \frac{dp_n}{dp_1} dp_1 + \frac{dp_n}{dp_2} dp_2 + \ldots + \frac{dp_n}{dp_{n-1}} dp_{n-1},$$
$$0 = - dx_1 - \frac{dp_n}{dp_1} dx_n,$$
$$0 = - dx_2 - \frac{dp_n}{dp_2} dx_n,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$0 = - dx_{n-1} - \frac{dp_n}{dp_{n-1}} dx_n.$$

Si, à l'aide de la première équation, l'on introduit partout dx_n au lieu de dN et qu'on élimine dans la $(n+1)^{ième}$, $dx_1, \ldots dx_{n-1}$, $dp_1, \ldots dp_{n-1}$, à l'aide des autres équations, on obtient

$$dx_1 = - \frac{dp_n}{dp_1} dx_n,$$
$$dx_2 = - \frac{dp_n}{dp_2} dx_n,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$dx_{n-1} = - \frac{dp_n}{dp_{n-1}} dx_n,$$

$$\begin{aligned}
dp_1 &= \left(\frac{dp_n}{dx_1} + \frac{dp_n}{dx}\, p_1\right) dx_n,\\
dp_2 &= \left(\frac{dp_n}{dx_2} + \frac{dp_n}{dx}\, p_2\right) dx_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
dp_{n-1} &= \left(\frac{dp_n}{dx_{n-1}} + \frac{dp_n}{dx}\, p_{n-1}\right) dx_n,\\
dx &= \left(p_n - p_1\frac{dp_n}{dp_1} - p_2\frac{dp_n}{dp_2} \ldots - p_{n-1}\frac{dp_n}{dp_{n-1}}\right) dx_n.
\end{aligned}$$

L'équation différentielle partielle proposée étant

$$\phi(x,\ x_1,\ x_2, \ldots\ x_n,\ p_1,\ p_2, \ldots\ p_n) = 0,$$

on a

$$\frac{dp_n}{dx_1} = -\frac{\frac{d\phi}{dx_1}}{\frac{d\phi}{dp_n}},\quad \frac{dp_n}{dp_1} = -\frac{\frac{d\phi}{dp_1}}{\frac{d\phi}{dp_n}}.$$

Donc les équations précédentes se changent, en introduisant une nouvelle différentielle dt, pour rendre les équations plus symétriques, dans les suivantes

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= \frac{d\phi}{dp_1}, & -\frac{dp_1}{dt} &= \frac{d\phi}{dx_1} + p_1\,\frac{d\phi}{dx},\\
\frac{dx_2}{dt} &= \frac{d\phi}{dp_2}, & -\frac{dp_2}{dt} &= \frac{d\phi}{dx_2} + p_2\,\frac{d\phi}{dx},\\
&\ldots\ldots & &\ldots\ldots\ldots\\
\frac{dx_n}{dt} &= \frac{d\phi}{dp_n}, & -\frac{dp_n}{dt} &= \frac{d\phi}{dx_n} + p_n\,\frac{d\phi}{dx},\\
\frac{dx}{dt} &= p_1\,\frac{d\phi}{dp_1} + p_2\frac{d\phi}{dp_2} + \ldots + p_n\,\frac{d\phi}{dp_n}.
\end{aligned}$$

Quand l'équation différentielle partielle ne contient pas la fonction cherchée elle-même, on a $\frac{d\phi}{dx} = 0$: dans ce cas les termes des seconds membres qui contiennent la quantité $\frac{d\phi}{dx}$ en facteur s'évanouissent.

Appliquons ces formules générales à l'équation différentielle partielle,

$$\frac{1}{2}\Sigma\frac{1}{m_i}\left[\left(\frac{dV}{dx_i}\right)^2+\left(\frac{dV}{dy_i}\right)^2+\left(\frac{dV}{dz_i}\right)^2\right]=U+h,$$

où les $3n$ quantités x_i, y_i, z_i, sont les variables indépendantes; V la fonction cherchée, qui ne se trouve pas elle-même dans l'équation différentielle proposée; U une fonction seulement des quantités x_i, y_i, z_i; h une constante.

En faisant

$$\frac{dV}{dx_i}=p_i,\quad \frac{dV}{dy_i}=q_i,\quad \frac{dV}{dz_i}=r_i,$$

l'équation aux différences partielles devient

$$0=\varphi=\frac{1}{2}\Sigma\frac{1}{m_i}(p_i^2+q_i^2+r_i^2)-U-h;$$

et pour l'intégrer il faut intégrer complétement le système de $6n$ équations différentielles ordinaires du premier ordre, savoir

$$\begin{aligned}
\frac{dx_i}{dt}&=\frac{d\varphi}{dp_i}=\frac{1}{m_i}p_i, & \frac{dp_i}{dt}&=-\frac{d\varphi}{dx_i}=\frac{dU}{dx_i},\\
\frac{dy_i}{dt}&=\frac{d\varphi}{dq_i}=\frac{1}{m_i}q_i, & \frac{dq_i}{dt}&=-\frac{d\varphi}{dy_i}=\frac{dU}{dy_i},\\
\frac{dz_i}{dt}&=\frac{d\varphi}{dr_i}=\frac{1}{m_i}r_i, & \frac{dr_i}{dt}&=-\frac{d\varphi}{dz_i}=\frac{dU}{dz_i}:
\end{aligned}$$

ce sont les équations différentielles du mouvement, comme il est facile de le voir. Car on peut toujours représenter un système d'équations différentielles ordinaires du second ordre par un système d'un nombre double d'équations différentielles du premier ordre en considérant les coefficients différentiels du premier ordre, comme de nouvelles variables. Ainsi en faisant

$$m_i\frac{dx_i}{dt}=p_i,\quad m_i\frac{dy_i}{dt}=q_i,\quad m_i\frac{dz_i}{dt}=r_i,$$

les $3n$ équations différentielles du mouvement

$$m_i\frac{d^2x_i}{dt^2}=\frac{dU_i}{dx_i},\quad m_i\frac{d^2y_i}{dt^2}=\frac{dU}{dy_i},\quad m_i\frac{d^2z_i}{dt^2}=\frac{dU}{dz_i},$$

qui sont du second ordre, peuvent être remplacées par ce système de $6n$ équations différentielles du premier ordre

$$m_i \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = p_i, \quad m_i \frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}t} = q_i, \quad m_i \frac{\mathrm{d}z_i}{\mathrm{d}t} = r_i,$$
$$\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t} = \frac{d\mathrm{U}}{dx_i}, \quad \frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}t} = \frac{d\mathrm{U}}{dy_i}, \quad \frac{\mathrm{d}r_i}{\mathrm{d}t} = \frac{d\mathrm{U}}{dz_i};$$

or ces dernières équations coïncident avec celles trouvées ci-dessus.

Si l'on veut appliquer les formules générales à l'autre équation de M. Hamilton,

$$\frac{d\mathrm{S}}{dt} + \frac{1}{2}\Sigma\frac{1}{m_i}\left[\left(\frac{d\mathrm{S}}{dx_i}\right)^2 + \left(\frac{d\mathrm{S}}{dy_i}\right)^2 + \left(\frac{d\mathrm{S}}{dz_i}\right)^2\right] = \mathrm{U},$$

on y trouve une nouvelle variable indépendante t. En faisant

$$\frac{d\mathrm{S}}{dx_i} = p_i, \quad \frac{d\mathrm{S}}{dy_i} = q_i, \quad \frac{d\mathrm{S}}{dz_i} = r_i,$$

et

$$\frac{d\mathrm{S}}{dt} = -\mathrm{H},$$

l'équation proposée devient

$$\mathrm{o} = \varphi = \frac{1}{2}\Sigma\frac{1}{m_i}(p_i^2 + q_i^2 + r_i^2) - \mathrm{H} - \mathrm{U}.$$

Si dans les formules générales de la page 167 on met $d\tau$ au lieu de la différentielle dt, la lettre t étant ici déjà employée dans une autre signification, on obtient encore les équations ci-dessus où l'on n'a qu'à changer dt en $d\tau$; et comme on a en outre l'équation

$$\frac{dt}{d\tau} = -\frac{d\varphi}{d\mathrm{H}} = 1 \quad \text{ou} \quad d\tau = dt,$$

il s'ensuit qu'on retombe précisément sur les équations trouvées tout-à l'heure, c'est-à-dire sur les équations différentielles du mouvement.

Donc, si d'un côté les équations différentielles du mouvement sont réduites, par la *nouvelle méthode* de M. Hamilton, à l'intégration d'une équation différentielle partielle du premier ordre, d'un autre côté tout ce que nous connaissons actuellement sur l'intégration des équations différentielles partielles du premier ordre, du moins dans le cas de plus de trois variables, consiste, comme je l'ai montré par ce qui précède, à ramener cette intégration à celle des équations du mouvement. On peut même dire que l'intégration complète des équations différentielles du mouvement, d'après la méthode de Pfaff, telle que je viens de l'exposer, n'est qu'un acheminement à l'intégration de l'équation différentielle partielle, puisque, en vertu de cette théorie, on a encore besoin de former une série de systèmes d'équations différentielles ordinaires, et d'intégrer chacun d'eux complétement; tandis qu'il résulte du travail de M. Hamilton ce fait remarquable, savoir que l'intégration d'un certain genre d'équations différentielles partielles établies par lui revient uniquement à l'intégration complète des équations différentielles du mouvement, sans qu'on ait besoin d'aucune autre intégration de systèmes d'équations différentielles ordinaires.

Cette remarque de M. Hamilton est d'autant plus importante qu'elle peut s'étendre facilement *à toutes les équations différentielles partielles du premier ordre*. En effet, en suivant la méthode de M. Hamilton, on arrivera, comme je le ferai voir dans le paragraphe suivant, à ce résultat général, que pour l'intégration d'une équation différentielle partielle quelconque à un nombre quelconque de variables, il suffit d'intégrer complétement le *premier* des systèmes d'équations différentielles ordinaires établis par Pfaff; et qu'on n'a pas besoin, comme la méthode de ce géomètre l'exige, d'intégrer en outre complétement une suite de systèmes d'équations différentielles ordinaires. Cette généralisation se trouve même déjà renfermée, pour le cas où la fonction cherchée n'est pas contenue dans l'équation différentielle partielle, dans quelques formules remarquables de M. Hamilton, pourvu qu'on ne borne pas la signification des signes qui y entrent à celle qu'ils ont dans la Mécanique.

IX.

Soient comme précédemment $x_1, x_2, \ldots x_n$, les variables indépendantes, x une fonction de ces variables et $p_1, p_2, \ldots p_n$, les coefficients différentiels partiels de cette fonction pris par rapport à ces variables, de manière qu'on ait

$$\frac{dx}{dx_1} = p_1, \quad \frac{dx}{dx_2} = p_2, \ldots \quad \frac{dx}{dx_n} = p_n;$$

soit de plus

$$\varphi(x, x_1, x_2, \ldots x_n, p_1, p_2, \ldots p_n) = h$$

l'équation différentielle partielle du premier ordre dont on s'occupe, h désignant une constante. Pour intégrer l'équation $\varphi = h$, Pfaff établit d'abord ces $2n$ équations différentielles ordinaires,

$$\begin{array}{ll}
\mathrm{P}\,\dfrac{dx_1}{dx} = \dfrac{d\varphi}{dp_1}, & -\mathrm{P}\,\dfrac{dp_1}{dx} = \dfrac{d\varphi}{dx_1} + \quad \dfrac{d\varphi}{dx}, \\
\mathrm{P}\,\dfrac{dx_2}{dx} = \dfrac{d\varphi}{dp_2}, & -\mathrm{P}\,\dfrac{dp_2}{dx} = \dfrac{d\varphi}{dx_2} + p_2\,\dfrac{d\varphi}{dx}, \\
\ldots & \ldots \\
\mathrm{P}\,\dfrac{dx_n}{dx} = \dfrac{d\varphi}{dp_n}, & -\mathrm{P}\,\dfrac{dp_n}{dx} = \dfrac{d\varphi}{dx_n} + p_n\,\dfrac{d\varphi}{dx},
\end{array}$$

où l'on a fait pour abréger

$$p_1\,\frac{d\varphi}{dp_1} + p_2\,\frac{d\varphi}{dp_2} + \ldots + p_n\,\frac{d\varphi}{dp_n} = \mathrm{P}.$$

De ces équations, il suit identiquement

$$\frac{d\varphi}{dx}\,dx + \frac{d\varphi}{dx_1}\,dx_1 + \frac{d\varphi}{dx_2}\,dx_2 + \ldots + \frac{d\varphi}{dx_n}\,dx_n$$
$$+ \frac{d\varphi}{dp_1}\,dp_1 + \frac{d\varphi}{dp_2}\,dp_2 + \ldots + \frac{d\varphi}{dp_n}\,dp_n = 0;$$

d'où l'on tire par l'intégration $\varphi = h$, ce qui démontre qu'une des intégrales de ces équations est la proposée même. En désignant les $2n-1$ autres intégrales par

$$A_1 = \alpha_1, \quad A_2 = \alpha_2, \quad A_{2n-1} = \alpha_{2n-1},$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{2n-1}$ étant des constantes arbitraires qui n'entrent pas dans les fonctions $A_1, A_2, \ldots A_{2n-1}$, Pfaff fait voir que l'intégrale complète de l'équation proposée $\varphi = h$ est représentée par un système de n équations entre les fonctions $A_1, A_2, \ldots A_{2n-1}$, contenant n constantes arbitraires, au moyen duquel, en ayant égard à l'équation $\varphi = h$, on peut exprimer l'inconnue x, ainsi que ses coefficients différentiels partiels $p_1, p_2, \ldots p_n$, en fonction de x_1, $x_2, \ldots x_n$. Ces n équations doivent être déterminées de manière qu'elles satisfassent, à l'aide de l'équation $\varphi = h$, à l'équation différentielle

$$dx = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \ldots + p_n dx_n,$$

qui est contenue dans le système d'équations différentielles ordinaires établi plus haut. A cet effet, Pfaff exprime les quantités $x_1, x_2, \ldots x_n, p_1, p_2, \ldots p_n$, en fonction de x, $A_1, A_2, \ldots A_{2n-1}$, à l'aide des équations

$$\varphi = h, \quad A_1 = \alpha_1, \quad A_2 = \alpha_2, \quad A_{2n-1} = \alpha_{2n-1},$$

et il fait voir qu'après avoir substitué ces expressions dans l'équation différentielle ci-dessus, celle-ci est changée dans une autre

$$0 = B_1 dA_1 + B_2 dA_2 + \ldots + B_{2n-1} dA_{2n-1},$$

où $B_1, B_2, \ldots B_{2n-1}$, sont des fonctions de $A_1, A_2, \ldots A_{2n-1}$ seulement. Pour l'intégrer par un système de n équations à n constantes arbitraires, Pfaff est obligé d'intégrer successivement et complétement $n-1$ systèmes d'équations différentielles ordinaires, respectivement à $2n-2$, $2n-4, \ldots$ et à deux variables. Or, la méthode de M. Hamilton généralisée apprend qu'une fois arrivé à l'équation

$$0 = B_1 dA_1 + B_2 dA_2 + \ldots + B_{2n-1} dA_{2n-1}$$

on n'a plus besoin de considérer d'autres équations différentielles, et même on ne rencontre plus aucune difficulté d'intégration : cette méthode en effet donne immédiatement les n équations cherchées à n constantes arbitraires.

« Substituez dans les équations

$$A_1 = \alpha_1, \quad A_2 = \alpha_2, \quad \ldots \quad A_{2n-1} = \alpha_{2n-1}, \quad \varphi = h,$$

pour $x, x_1, x_2, \ldots x_n, p_1, p_2, \ldots p_n$, les valeurs

$$x = 0, \quad x_1 = x_1^0, \quad x_2 = x_2^0, \quad \ldots \quad x_n = x_n^0,$$
$$p_1 = p_1^0, \quad p_2 = p_2^0, \quad \ldots \quad p_n = p_n^0;$$

alors on pourra exprimer les quantités $x_1^0, x_2^0, \ldots x_n^0, p_1^0, p_2^0, \ldots p_n^0$, en $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{2n-1}$, au moyen de ces équations. Soient les valeurs de $x_1^0, x_2^0, \ldots x_n^0$, ainsi trouvées,

$$\begin{aligned}
x_1^0 &= \Pi_1(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{2n-1}),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_2^0 &= \Pi_2(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{2n-1}),\\
x_n^0 &= \Pi_n(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{2n-1}),
\end{aligned}$$

les équations

$$\begin{aligned}
x_1^0 &= \Pi_1(A_1, A_2, \ldots A_{2n-1}),\\
x_2^0 &= \Pi_2(A_1, A_2, \ldots A_{2n-1}),\\
x_n^0 &= \Pi_n(A_1, A_2, \ldots A_{2n-1}),
\end{aligned}$$

qu'on déduit des précédentes en y mettant $A_1, A_2, \ldots A_{2n-1}$, au lieu de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{2n-1}$ respectivement, sont les n équations cherchées à n constantes arbitraires $x_1^0, x_2^0, \ldots x_n^0$, qui, combinées avec l'équation donnée $\varphi = h$, satisfont à l'équation différentielle

$$dx = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \ldots + p_n dx_n,$$

ou à sa transformée

$$0 = B_1 dA_1 + B_2 dA_2 + \ldots + B_{2n-1} dA_{2n-1}:$$

en d'autres termes le système de ces équations renferme la solution complète de l'équation différentielle proposée. »

En voici maintenant la démonstration :

Qu'on exprime, au moyen des équations

$$\varphi = h, \quad A_1 = \alpha_1, \quad A_2 = \alpha_2, \ldots \quad A_{2n-1} = \alpha_{2n-1},$$

les quantités $x_1, x_2, \ldots x_n, p_1, p_2, \ldots p_n$ en fonction de x, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{2n-1}$, et qu'on substitue ces valeurs dans les équations (voir p. 171 ci-dessus),

$$\begin{aligned}
P\frac{dx_1}{dx} &= \frac{d\varphi}{dp_1}, \quad -P\frac{dp_1}{dx} = \frac{d\varphi}{dx_1} + \frac{d\varphi}{dx}p_1,\\
P\frac{dx_2}{dx} &= \frac{d\varphi}{dp_2}, \quad -P\frac{dp_2}{dx} = \frac{d\varphi}{dx_2} + \frac{d\varphi}{dx}p_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
P\frac{dx_n}{dx} &= \frac{d\varphi}{dp_n}, \quad -P\frac{dp_n}{dx} = \frac{d\varphi}{dx_n} + \frac{d\varphi}{dx}p_n,
\end{aligned}$$

qui doivent devenir identiques par cette substitution, ainsi que l'équation qui en dérive

$$1 = p_1\frac{dx_1}{dx} + p_2\frac{dx_2}{dx} + \ldots + p_n\frac{dx_n}{dx}.$$

Prenant la différentielle partielle de cette dernière par rapport à l'une des constantes arbitraires α, on obtient, en multipliant par P et ayant égard en même temps aux autres équations,

$$\begin{aligned}
o = {}& \frac{d\varphi}{dp_1}\cdot\frac{dp_1}{d\alpha} + \frac{d\varphi}{dp_2}\cdot\frac{dp_2}{d\alpha} + \ldots + \frac{d\varphi}{dp_n}\cdot\frac{dp_n}{d\alpha}\\
& + P\left(p_1\frac{d^2x_1}{d\alpha dx} + p_2\frac{d^2x_2}{d\alpha dx} + \ldots + p_n\frac{d^2x_n}{d\alpha dx}\right).
\end{aligned}$$

Prenant aussi la différentielle partielle par rapport à α de l'équation $\varphi = h$, on obtient

$$\begin{aligned}
o = {}& \frac{d\varphi}{dp_1}\cdot\frac{dp_1}{d\alpha} + \frac{d\varphi}{dp_2}\cdot\frac{dp_2}{d\alpha} + \ldots + \frac{d\varphi}{dp_n}\cdot\frac{dp_n}{d\alpha}\\
& + \frac{d\varphi}{dx_1}\cdot\frac{dx_1}{d\alpha} + \frac{d\varphi}{dx_2}\cdot\frac{dx_2}{d\alpha} + \ldots + \frac{d\varphi}{dx_n}\cdot\frac{dx_n}{d\alpha},
\end{aligned}$$

ou, à l'aide des équations différentielles écrites en premier lieu,

$$\begin{aligned}
&\frac{d\varphi}{dp_1}\cdot\frac{dp_1}{d\alpha}+\frac{d\varphi}{dp_2}\cdot\frac{dp_2}{d\alpha}+\ldots+\frac{d\varphi}{dp_n}\cdot\frac{dp_n}{d\alpha}\\
&=\mathrm{P}\left(\frac{dp_1}{dx}\cdot\frac{dx_1}{d\alpha}+\frac{dp_2}{dx}\cdot\frac{dx_2}{d\alpha}+\ldots+\frac{dp_n}{dx}\cdot\frac{dx_n}{d\alpha}\right)\\
&+\frac{d\varphi}{dx}\left(p_1\frac{dx_1}{d\alpha}+p_2\frac{dx_2}{d\alpha}+\ldots+p_n\frac{dx_n}{d\alpha}\right);
\end{aligned}$$

ce qui, substitué dans l'équation précédente, fournit

$$o=\mathrm{P}\frac{d\left(p_1\frac{dx_1}{d\alpha}+p_2\frac{dx_2}{d\alpha}+\ldots+p_n\frac{dx_n}{d\alpha}\right)}{dx}+\frac{d\varphi}{dx}\left(p_1\frac{dx_1}{d\alpha}+p_2\frac{dx_2}{d\alpha}+\ldots+p_n\frac{dx_n}{d\alpha}\right);$$

en intégrant, à partir de $x=o$, il vient

$$p_1\frac{dx_1}{d\alpha}+p_2\frac{dx_2}{d\alpha}+\ldots+p_n\frac{dx_n}{d\alpha}=\mathrm{M}\left(p_1^\circ\frac{dx_1^\circ}{d\alpha}+p_2^\circ\frac{dx_2^\circ}{d\alpha}+\ldots+p_n^\circ\frac{dx_n^\circ}{d\alpha}\right),$$

où l'on a fait pour abréger

$$\mathrm{M}=e^{-\int_0^x\frac{d\varphi}{dx}\cdot\frac{dx}{\mathrm{P}}},$$

e étant la base des logarithmes népériens.

Considérant de même les quantités $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{2n-1}$, comme des variables, déterminées par les équations

$$\mathrm{A}_1=\alpha_1,\quad \mathrm{A}_2=\alpha_2,\ldots\quad \mathrm{A}_{2n-1}=\alpha_{2n-1},$$

on a

$$\begin{aligned}
&dx-(p_1dx_1+p_2dx_2+\ldots+p_ndx_n)\\
&=dx\left(1-p_1\frac{dx_1}{dx}-p_2\frac{dx_2}{dx}-\ldots-p_n\frac{dx_n}{dx}\right)\\
&\qquad-\Sigma\left(p_1\frac{dx_1}{d\alpha_i}+p_2\frac{dx_2}{d\alpha_i}+\ldots+p_n\frac{dx_n}{d\alpha_i}\right)d\alpha_i.
\end{aligned}$$

le signe Σ s'étend à toutes les valeurs de i comprises dans la série 1, 2,... $2n-1$. Comme l'on a

$$1-p_1\frac{dx_1}{dx}-p_2\frac{dx_2}{dx}-\ldots-p_n\frac{dx_n}{dx}=o,$$

et pour chaque valeur de i,

$$p_1 \frac{dx_1}{d\alpha_i} + p_2 \frac{dx_2}{d\alpha_i} + \ldots + p_n \frac{dx_n}{d\alpha_i} = \mathrm{M}\left(p_1^\circ \frac{dx_1^\circ}{d\alpha_i} + p_2^\circ \frac{dx_2^\circ}{d\alpha_i} + \ldots + p_n^\circ \frac{dx_n^\circ}{d\alpha_i}\right),$$

l'équation ci-dessus prend la forme

$$dx - (p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \ldots + p_n dx_n) = -\mathrm{M}\Sigma\left(p_1^\circ \frac{dx_1^\circ}{d\alpha_i} + p_2^\circ \frac{dx_2^\circ}{d\alpha_i} + \ldots + p_n^\circ \frac{dx_n^\circ}{d\alpha_i}\right) d\alpha_i,$$

ou, à l'aide de l'équation

$$dx_k^\circ = \Sigma \frac{dx_i^\circ}{d\alpha_i} d\alpha_i,$$

celle-ci

$$dx - (p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \ldots + p_n dx_n) = -\mathrm{M}(p_1^\circ dx_1^\circ + p_2^\circ dx_2^\circ + \ldots + p_n^\circ dx_n^\circ).$$

On conclut de cette équation identique, que l'équation

$$dx - (p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \ldots + p_n dx_n) = 0$$

peut être transformée dans la suivante

$$p_1^\circ dx_1^\circ + p_2^\circ dx_2^\circ + \ldots + p_n^\circ dx_n^\circ = 0,$$

à laquelle on satisfait en égalant les quantités x_1°, $x_2^\circ, \ldots x_n^\circ$, à des constantes arbitraires. C.Q.F.D.

L'analyse dont nous avons fait usage coïncide avec celle dont Pfaff s'est servi dans le mémoire cité pour démontrer que les rapports des $2n-1$ quantités obtenues, en donnant à i toutes les valeurs de 1 à $2n-1$ dans l'expression

$$p_1 \frac{dx_1}{d\alpha_i} + p_2 \frac{dx_2}{d\alpha_i} + \ldots + p_n \frac{dx_n}{d\alpha_i}$$

sont indépendants de x; mais il n'a pas ajouté la remarque que par cette raison ces quantités peuvent être prises proportionnelles aux quantités

$$p_1^\circ \frac{dx_1^\circ}{d\alpha_i} + p_2^\circ \frac{dx_2^\circ}{d\alpha_i} + \ldots + p_n^\circ \frac{dx_n^\circ}{d\alpha_i},$$

ce qui fait qu'on trouve l'équation différentielle transformée elle-même, et qu'on obtient immédiatement les n équations qui y satisfont. J'ajoute que lorsque la valeur particulière o, qu'on a donnée à x, présente des inconvénients, elle peut être remplacée par une autre valeur numérique quelconque.

Les expressions des quantités $x_1, x_2, \ldots x_n, p_1, p_2, \ldots p_n$ en x, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{2n-1}$, contiennent aussi la constante h. Différentiant par rapport à h les équations

$$\varphi = h, \quad 1 = p_1 \frac{dx_1}{dx} + p_2 \frac{dx_2}{dx} + \ldots + p_n \frac{dx_n}{dx},$$

et se rappelant que

$$\mathrm{P}\frac{dx_i}{dx} = \frac{d\varphi}{dp_i}, \quad \frac{d\varphi}{dx_i} = -\mathrm{P}\frac{dp_i}{dx} - \frac{d\varphi}{dx}p_i,$$

on trouve

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d\varphi}{dp}\cdot\frac{dp_1}{dh} + \frac{d\varphi}{dp_2}\cdot\frac{dp_2}{dh} + \ldots + \frac{d\varphi}{dp_n}\cdot\frac{dp_n}{dh} \\ &\quad + \mathrm{P}\left(p_1 \frac{d^2x_1}{dxdh} + p_2 \frac{d^2x_2}{dxdh} + \ldots + p_n \frac{d^2x_n}{dxdh}\right), \\ 1 &= \frac{d\varphi}{dp_1}\cdot\frac{dp_1}{dh} + \frac{d\varphi}{dp_2}\cdot\frac{dp_2}{dh} + \ldots + \frac{d\varphi}{dp_n}\cdot\frac{dp_n}{dh} \\ &\quad - \mathrm{P}\left(\frac{dp_1}{dx}\cdot\frac{dx_1}{dh} + \frac{dp_2}{dx}\cdot\frac{dx_2}{dh} + \ldots + \frac{dp_n}{dx}\cdot\frac{dx_n}{dh}\right) \\ &\quad - \frac{d\varphi}{dx}\left(p_1 \frac{dx_1}{dh} + p_2 \frac{dx_2}{dh} + \ldots + p_n \cdot \frac{dx_n}{dh}\right); \end{aligned}$$

d'où l'on conclut

$$\begin{aligned} 0 = 1 &+ \frac{\mathrm{P}d\left(p_1 \frac{dx_1}{dh} + p_2 \frac{dx_2}{dh} + \ldots + p_n \frac{dx_n}{dh}\right)}{dx} \\ &+ \frac{d\varphi}{dx}\left(p_1 \frac{dx_1}{dh} + p_2 \frac{dx_2}{dh} + \ldots + p_n \frac{dx_n}{dh}\right). \end{aligned}$$

Multipliant cette équation par $\frac{1}{\mathrm{MP}}$, et intégrant depuis $x = 0$ jusqu'à $x = x$, on obtient

$$0 = \int_0^x \frac{dx}{\mathrm{MP}} + \frac{1}{\mathrm{M}}\left(p_1 \frac{dx_1}{dh} + p_2 \frac{dx_2}{dh} + \ldots + p_n \frac{dx_n}{dh}\right)$$
$$-\left(p_1^\circ \frac{dx_1^\circ}{dh} + p_2^\circ \frac{dx_2^\circ}{dh} + \ldots + p_n^\circ \frac{dx_n^\circ}{dh}\right).$$

Quand on considère h comme variable, on doit, dans l'expression de dx ci-dessus trouvée (p. 176)

$$dx = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \ldots + p_n dx_n - \mathrm{M}(p_1^\circ dx_1^\circ + p_2^\circ dx_2^\circ + \ldots + p_n^\circ dx_n^\circ),$$

tenir compte d'un terme nouveau, savoir

$$\left(p_1 \frac{dx_1}{dh} + p_2 \frac{dx_2}{dh} + \ldots + p_n \frac{dx_n}{dh}\right) dh - \mathrm{M}\left(p_1^\circ \frac{dx_1^\circ}{dh} + p_2^\circ \frac{dx_2^\circ}{dh} + \ldots + p_n^\circ \frac{dx_n^\circ}{dh}\right) dh$$
$$= -\mathrm{M} \int_0^x \frac{dx}{\mathrm{MP}} \cdot dh,$$

et l'on a

$$dx = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \ldots + p_n dx_n - \mathrm{M}(p_1^\circ dx_1^\circ + p_2^\circ dx_2^\circ + \ldots + p_n^\circ dx_n^\circ)$$
$$+ \mathrm{M} \int_0^x \frac{dx}{\mathrm{MP}} \cdot dh.$$

Si l'on désigne par A_i° ce que devient A_i, et par φ° ce que devient φ, quand on fait en même temps $x = 0$, $x_i = x_i^\circ$, $p_i = p_i^\circ$, et si l'on élimine des $2n + 1$ équations

$$\varphi = 0, \quad \varphi_0 = h, \quad \mathrm{A}_1 = \mathrm{A}_1^\circ, \quad \mathrm{A}_2 = \mathrm{A}_2^\circ, \quad \mathrm{A}_{2n-1} = \mathrm{A}_{2n-1}^\circ,$$

les $2n$ quantités $p_1, p_2, p_3, \ldots p_1^\circ, p_2^\circ, \ldots p_n^\circ$, on obtient x exprimé en $x_1, x_2, \ldots x_n, x_1^\circ, x_2^\circ, \ldots x_n^\circ, h$; et les coefficients différentiels partiels de cette expression de x pris par rapport à ces quantités, sont

$$\frac{dx}{dx_1} = p_1, \qquad \frac{dx}{dx_2} = p_2, \ldots \quad \frac{dx}{dx_n} = p_n,$$
$$\frac{dx}{dx_1^\circ} = -\mathrm{M}p_1^\circ, \ \frac{dx}{dx_2^\circ} = -\mathrm{M}p_2^\circ, \ldots \ \frac{dx}{dx_n^\circ} = -\mathrm{M}p_n^\circ, \ \frac{dx}{dh} = \mathrm{M}\int_0^x \frac{dx}{\mathrm{MP}}.$$

Dans les deux intégrales qui entrent dans ces formules, savoir

$$\int \frac{d\varphi}{dx} \cdot \frac{dx}{\mathrm{P}}, \quad \int \frac{dx}{\mathrm{MP}},$$

on doit considérer les quantités x_i^0, p_i^0 comme des constantes, et exprimer toutes les variables en fonction d'une seule d'entre elles au moyen des intégrales complètes des équations différentielles ordinaires de la page 171.

Dans ce qui précède, j'ai pris pour constantes arbitraires les valeurs des variables correspondantes à $x=0$; mais on démontre par un calcul semblable, qu'en exprimant au moyen des intégrales complètes des équations différentielles ordinaires écrites ci-dessus (p. 171) toutes les variables par une seule quelconque d'entre elles ou par une autre quantité quelconque t, puis désignant les valeurs de $x, x_1, x_2, \ldots x_n$, $p_1, p_2, \ldots p_n$, correspondantes à $t=0$, par $x^0, x_1^0, x_2^0, \ldots x_n^0$, p_1^0, $p_2^0, \ldots p_n$, et considérant de même ces valeurs comme variables, on aura cette équation

$$dx - p_1 dx_1 - p_2 dx_2 - \ldots - p_n dx_n = \mathrm{M}(dx^0 - p_1^0 dx_1^0 - p_2^0 dx_2^0 - \ldots - p_n^0 dx_n^0) + \mathrm{M}\int_0^x \frac{dx}{\mathrm{MP}}\, dh,$$

où

$$\mathrm{M} = e^{-\int_{x^0}^{x} \frac{d\varphi}{dx}\cdot\frac{dx}{\mathrm{P}}}.$$

Si l'équation différentielle partielle proposée ne contient pas la fonction inconnue x, ce qui arrive dans les applications à la dynamique, on a

$$\frac{d\varphi}{dx} = 0, \quad \text{partant} \quad \mathrm{M} = 1.$$

Alors le système d'équations différentielles ordinaires se réduit au suivant,

$$dx_1 : dx_2 : \ldots : dx_n : dp_1 : dp_2 : \ldots : dp_n = \frac{d\varphi}{dp_1} : \frac{d\varphi}{dp_2} : \ldots : \frac{d\varphi}{dp_n} : -\frac{d\varphi}{dx_1} : -\frac{d\varphi}{dx_2} : \ldots : -\frac{d\varphi}{dx_n},$$

lequel système contient une équation et une variable x de moins. Après avoir intégré complétement ce dernier système, et après avoir exprimé toutes les variables x_i, p_i en fonction de x_1 et de $2n-1$ constantes arbitraires, on obtient x par une simple quadrature, à l'aide de l'équation

$$x - \alpha = \int_0^{x_1} \frac{P dx_1}{\frac{d\phi}{dp_1}},$$

α étant une nouvelle constante arbitraire, qui n'entre pas dans les expressions de $x_2, x_3, \ldots x_n, p_1, p_2, \ldots p_n$ en x_1. En désignant maintenant par $x_2^0, x_3^0, \ldots x_n^0, p_1^0, p_2^0, \ldots p_n^0$ les valeurs de ces expressions, correspondantes à la valeur $x = 0$, puis observant que $x_1^0 = 0$ et $M = 1$, on trouve par la formule générale (p. 179),

$$dx = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \ldots + p_n dx_n - (p_2^0 dx_2^0 + p_3^0 dx_3^0 + \ldots + p_n^0 dx_n^0) + \int_0^{x_1} \frac{dx_1}{\frac{d\phi}{dp_1}} dh + d\alpha,$$

où l'on a remplacé $\frac{dx}{P}$ par $\frac{dx_1}{\frac{d\phi}{dp_1}}$.

Cette équation donne

$$\left.\begin{array}{lll} \frac{dx}{dx_1} = p_1, & \frac{dx}{dx_2} = p_2, \ldots & \frac{dx}{dx_n} = p_n \\ \frac{dx}{dx_2^0} = -p_2^0, & \frac{dx}{dx_3^0} = -p_3^0, \ldots & \frac{dx}{dx_n^0} = -p_n^0 \end{array}\right\} \quad \frac{dx}{dh} = \int_0^{x_1} \frac{dx_1}{\frac{d\phi}{dp_1}}$$

Si par l'introduction d'un nouvel élément dt l'on donne aux équations différentielles ordinaires la forme qu'elles ont dans les problèmes de mécanique, on aura

$$\left.\begin{array}{ll} \frac{dx_1}{dt} = \frac{d\phi}{dp_1}, & \frac{dp_1}{dt} = -\frac{d\phi}{dx_1} \\ \cdots & \cdots \\ \frac{dx_n}{dt} = \frac{d\phi}{dp_n}, & \frac{dp_n}{dt} = -\frac{d\phi}{dx_n} \end{array}\right\} \quad dt = \frac{dx}{P}:$$

après avoir intégré complétement les équations

$$dx_1 : dx_2 : \ldots : dx_n : dp_1 : dp_2 : \ldots : dp_n = \frac{d\phi}{dp_1} : \frac{d\phi}{dp_2} : \ldots \frac{d\phi}{dp_n} : -\frac{d\phi}{dx_1} : -\frac{d\phi}{dx_2} : \ldots : -\frac{d\phi}{dx_n},$$

et formé les expressions de $x_2, x_3, \ldots x_n, p_1, p_2, \ldots p_n$, en fonction de x_1, on pourra calculer x et t par des quadratures, à l'aide des formules

$$x - \alpha = \int_0^{x_1} \frac{\mathrm{P}dx_1}{\frac{d\varphi}{dp_1}}, \quad t + \tau = \int_0^{x_1} \frac{dx_1}{\frac{d\varphi}{dp_1}},$$

α et τ étant des nouvelles constantes arbitraires.

Mais l'une de ces deux intégrales est la différentielle partielle de l'autre par rapport à h. En effet on a, d'après les formules précédentes,

$$\frac{dx}{dh} = \int_0^{x_1} \frac{dx_1}{\frac{d\varphi}{dp_1}} = t + \tau.$$

Si outre la variable x, il manque encore dans la fonction φ une seconde variable, x_n par exemple, on aura aussi $\frac{d\varphi}{dx_n} = 0$; donc les équations différentielles ordinaires donneront

$$dp_n = 0 \quad \text{ou} \quad p_n = \text{const.},$$

ce qui diminuera leur nombre de deux unités. Elles deviendront dans ce cas

$$dx_1 : dx_2 : \ldots : dx_{n-1} : dp_1 : dp_2 : \ldots dp_{n-1} = \frac{d\varphi}{dp_1} : \frac{d\varphi}{dp_2} : \ldots : \frac{d\varphi}{dp_{n-1}} : -\frac{d\varphi}{dx_1} : \ldots -\frac{d\varphi}{dx_{n-1}},$$

où l'on doit regarder p_n comme une constante.

Quand, par l'intégration de ces équations, on aura exprimé les quantités x_1, $x_2, \ldots x_{n-1}$, p_1, $p_2, \ldots p_{n-1}$, en fonction d'une seule d'entre elles, l'équation

$$dx_n = \frac{d\varphi}{dp_n} \cdot \frac{dx_i}{\frac{d\varphi}{dp_i}} = -\frac{d\varphi}{dp_n} \cdot \frac{dp_i}{\frac{d\varphi}{dx}}$$

donnera par une simple quadrature la valeur de x_n.

Mais on peut encore dans ce cas suivre une marche semblable à celle que M. Hamilton emploie pour remplacer la fonction S par V et transformer ainsi généralement l'équation $\varphi = h$ elle-même en une autre, dans laquelle le nombre de variables indépendantes est diminué d'une unité. En effet, la fonction φ ne contenant ni x ni x_n, on fera

$$x = y + p_n x_n;$$

par conséquent

$$dy = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \ldots + p_{n-1} dx_{n-1} - x_n dp_n.$$

Si l'on regarde dans cette équation p_n comme constante, elle se change en

$$dy = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \ldots + p_{n-1} dx_{n-1};$$

d'où il suit que les quantités $p_1, p_2, \ldots p_{n-1}$, deviennent les coefficients différentiels partiels de y pris par rapport à $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$, et que l'équation différentielle partielle proposée, dans laquelle on a regardé de même p_n comme constante, se change en une équation différentielle partielle en y à $n-1$ variables indépendantes x_1, $x_2, \ldots x_{n-1}$. Ayant trouvé y en fonction de $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$, de $n-1$ constantes arbitraires et de la constante p_n, on obtiendra la fonction cherchée x en éliminant p_n de l'équation

$$x = y + p_n x_n,$$

à l'aide de la relation

$$\frac{dy}{dp_n} = -x_n.$$

On peut ajouter à x_n une constante arbitraire; alors x renfermera n constantes arbitraires, comme une solution complète l'exige.

X.

Nous avons vu, par ce qui précède, comment on peut trouver une solution complète d'une équation différentielle partielle par l'intégration d'un *seul* système d'équations différentielles ordinaires. Maintenant je vais résoudre le problème inverse ; déduire les intégrales complètes du système d'équations différentielles ordinaires d'une solution complète quelconque.

Supposons donc que l'on connaisse une expression de x en x_1, $x_2, \ldots x_n$, avec n constantes arbitraires $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, satisfaisant à l'équation différentielle partielle proposée $\varphi = h$. Qu'on forme les $n - 1$ équations suivantes représentées par des proportions,

$$\frac{dx}{d\alpha_1} : \frac{dx}{d\alpha_2} : \ldots : \frac{dx}{d\alpha_n} = \beta_1 : \beta_2 : \ldots : \beta_n :$$

$\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n$, sont de nouvelles constantes arbitraires, et puisqu'elles n'entrent dans le calcul que par leurs rapports, elles équivalent seulement à $n - 1$ constantes. En introduisant une nouvelle quantité M, on peut poser

$$\frac{dx}{d\alpha^1} + \beta_1 \mathrm{M} = 0, \quad \frac{dx}{d\alpha_2} + \beta_2 \mathrm{M} = 0, \ldots \quad \frac{dx}{d\alpha_n} + \beta_n \mathrm{M} = 0.$$

Ces équations déterminent les $n + 2$ quantités x, x_1, $x_2, \ldots x_n$, M sont en fonction d'une seule d'entre elles. Différentiant l'équation

$$\frac{dx}{d\alpha_i} + \beta_i \mathrm{M} = 0,$$

et substituant dans sa différentielle la valeur de β_i, tirée de cette même équation, on a

$$0 = -\frac{dx}{d\alpha_i} \cdot \frac{d\mathrm{M}}{\mathrm{M}} + \frac{d^2x}{d\alpha_i dx_1} dx_1 + \frac{d^2x}{d\alpha_i dx_2} dx_2 + \ldots + \frac{d^2x}{d\alpha_i dx_n} dx_n,$$

de sorte que si l'on fait

$$\frac{dx}{dx_1} = p_1, \quad \frac{dx}{dx_2} = p_2, \ldots \quad \frac{dx}{dx_n} = p_n,$$

il vient

$$0 = -\frac{dx}{d\alpha_i} \cdot \frac{d\mathrm{M}}{\mathrm{M}} + \frac{dp_1}{d\alpha_i} dx_1 + \frac{dp_2}{d\alpha_i} dx_2 + \ldots + \frac{dp_n}{d\alpha} dx_n.$$

Si dans l'équation différentielle partielle proposée $\varphi = h$, on substitue la valeur donnée de x et les valeurs de $p_1, p_2, \ldots p_n$, qui s'en déduisent à l'aide de la différentiation partielle par rapport à $x_1, x_2, \ldots x_n$, cette équation doit devenir identique en $x_1, x_2, \ldots$

x_n, α_1, α_2,.. . α_n, h. Prenant donc la différentielle partielle par rapport à α_i, on trouve

$$0=\frac{d\varphi}{dx}\cdot\frac{dx}{d\alpha_i}+\frac{d\varphi}{dp_1}\cdot\frac{dp_1}{d\alpha_i}+\frac{d\varphi}{dp_2}\cdot\frac{dp_2}{d\alpha_i}+\ldots+\frac{d\varphi}{dp_n}\cdot\frac{dp_n}{d\alpha_i}.$$

En comparant les deux systèmes de n équations qui résultent de cette équation et de la précédente, si l'on donne à i successivement les valeurs de $1, 2, \ldots n$, on arrive à cette suite de proportions

$$\frac{dM}{M}:dx_1:dx_2:\ldots dx_n=-\frac{d\varphi}{dx}:\frac{d\varphi}{dp_1}:\frac{d\varphi}{dp_2}:\ldots:\frac{d\varphi}{dp_n}$$

et comme on a

$$dx = p_1dx_1 + p_2dx_2 + \ldots + p_ndx_n,$$

cette suite fournit ces équations

$$P\frac{dM}{Mdx}=-\frac{d\varphi}{dx},\ P\frac{dx_1}{dx}=\frac{d\varphi}{dp_1},\ P\frac{dx_2}{dx}=\frac{d\varphi}{dp_2},\ldots\ P\frac{dx_n}{dx}=\frac{d\varphi}{dp_n},$$

où l'on a fait comme ci-dessus

$$P = p_1\frac{d\varphi}{dp_1}+p_2\frac{d\varphi}{dp_2}+\ldots+p_n\frac{d\varphi}{dp_n}.$$

Différentiant maintenant l'équation $\varphi=h$ par rapport à x_i, et faisant dans la différentielle

$$\frac{dp_k}{dx}=\frac{dp_i}{dx_k},$$

on obtient

$$0=\frac{d\varphi}{dx_i}+p_i\frac{d\varphi}{dx}+\frac{d\varphi}{dp_1}\cdot\frac{dp_i}{dx_1}+\frac{d\varphi}{dp_2}\cdot\frac{dp_i}{dx_2}+\ldots+\frac{d\varphi}{dp_n}\cdot\frac{dp_i}{dx_n},$$

et puisqu'on vient de trouver

$$\frac{d\varphi}{dp_1}=P\frac{dx_1}{dx},\ \frac{d\varphi}{dp_2}=P\frac{dx_2}{dx},\ldots\ \frac{d\varphi}{dp_n}=P\frac{dx_n}{dx},$$

on en conclut

$$0=\frac{d\varphi}{dx_i}+p_i\frac{d\varphi}{dx}+P\frac{dp_i}{dx}.$$

Ainsi l'on a déduit, par une analyse inverse, les $2n$ équations différentielles du premier ordre

$$\mathrm{P}\,\frac{dx_i}{dx} = \frac{d\varphi}{dp_i},\quad \mathrm{P}\,\frac{dp_i}{dx} = -\frac{d\varphi}{dx_i} - \frac{d\varphi}{dx}p_i,$$

des $2n$ équations

$$\varphi = h,\ \frac{dx}{d\alpha_1} : \frac{dx}{d\alpha_2} : \ldots : \frac{dx}{d\alpha_n} = \beta_1 : \beta_2 : \ldots \beta_n,$$
$$\frac{dx}{dx_1} = p_1,\ \frac{dx}{dx_2} = p_2, \ldots\ \frac{dx}{dx_n} = p_n;$$

ces dernières renfermant $2n$ constantes arbitraires, savoir h, α_1, $\alpha_2, \ldots \alpha_n$, et les rapports de $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n$, sont par conséquent les intégrales complètes des équations différentielles dont il s'agit.

XI.

La dernière analyse peut s'étendre aussi à la recherche plus générale, dans laquelle Pfaff comprend l'intégration des équations différentielles partielles du premier ordre, et l'on peut démontrer que connaissant un système quelconque de n équations à n constantes arbitraires, satisfaisant à l'équation différentielle

$$0 = \mathrm{X}_1 dx_1 + \mathrm{X}_2 dx_2 + \ldots + \mathrm{X}_{2n} dx_{2n},$$

(où l'on a changé la quantité x des formules précédentes en x_{2n}), on peut en déduire les intégrales complètes du système de $2n-1$ équations différentielles ordinaires établi par Pfaff et donné ci-dessus, p. 165.

Au moyen des n équations données, exprimez $x_1, x_2, \ldots x_n$, en fonction des variables $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots x_{2n}$, et des constantes α_1, $\alpha_2, \ldots \alpha_n$; formez les équations

$$\mathrm{X}_1 \frac{dx_1}{d\alpha_1} + \mathrm{X}_2 \frac{dx_2}{d\alpha_1} + \ldots + \mathrm{X}_n \frac{dx_n}{d\alpha_1} + \mathrm{M}\beta_1 = 0,$$
$$\mathrm{X}_1 \frac{dx_1}{d\alpha_2} + \mathrm{X}_2 \frac{dx_2}{d\alpha_2} + \ldots + \mathrm{X}_n \frac{dx_n}{d\alpha_2} + \mathrm{M}\beta_2 = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\mathrm{X}_1 \frac{dx_1}{d\alpha_n} + \mathrm{X}_2 \frac{dx_2}{d\alpha_n} + \ldots + \mathrm{X}_n \frac{dx_n}{d\alpha_n} + \mathrm{M}\beta_n = 0,$$

β_1, β_2,... β_n, *étant de nouvelles constantes arbitraires; en éliminant* M, *vous en déduirez* $n-1$ *équations qui, jointes aux* n *équations données, seront les intégrales complètes du système d'équations différentielles ordinaires, établi par Pfaff; ces intégrales, comme cela doit être, contiendront* $2n-1$ *constantes arbitraires, savoir* n *constantes* α_1, α_2,... α_n, *et* $n-1$ *rapports des constantes* β_1, β_2,... β_n.

Voici la démonstration de ce théorème.

Les expressions de x_1, x_2,... x_n en fonction x_{n+1}, x_{n+2},... x_{2n}, et des n constantes arbitraires, déduites des n équations données, devant satisfaire à l'équation

$$X_1dx_1 + X_2dx_2 + \ldots + X_{2n}dx_{2n} = 0,$$

il faut que

$$\begin{aligned}
&X_1\frac{dx_1}{dx_{n+1}} + X_2\frac{dx_2}{dx_{n+1}} + \ldots + X_n\frac{dx_n}{dx_{n+1}} + X_{n+1} = 0,\\
&X_1\frac{dx_1}{dx_{n+2}} + X_2\frac{dx_2}{dx_{n+2}} + \ldots + X_n\frac{dx_n}{dx_{n+2}} + X_{n+2} = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&X_1\frac{dx_1}{dx_{2n}} + X_2\frac{dx_2}{dx_{2n}} + \ldots + X_n\frac{dx_n}{dx_{2n}} + X_{2n} = 0.
\end{aligned}$$

Maintenant on peut supposer qu'on ait exprimé à l'aide des n équations

$$X_1\frac{dx_1}{d\alpha_i} + X_2\frac{dx_2}{d\alpha_i} + \ldots + X_n\frac{dx_n}{d\alpha_i} + M\beta_i = 0,$$

les $n+1$ quantités x_{n+1}, x_{n+2},... x_{2n}, M en fonction d'une seule d'entre elles, de M par exemple: alors ces quantités, et par conséquent x_1, x_2,...x_n, deviennent des fonctions de M, α_1, α_2,... α_n, β_1, β_2,... β_n. Pour distinguer par un signe particulier les coefficients différentiels partiels pris dans cette hypothèse, je les renfermerai entre des crochets; les coefficients différentiels partiels dépourvus de crochets se rapportant au cas où l'on considère x_1, x_2,... x_n, comme étant des fonctions de x_{n+1}, x_{n+2}, ... x_{2n}, α_1, α_2, ... α_n. On aura par conséquent

$$\begin{aligned}
X_1\left(\frac{dx_1}{d\alpha_i}\right) + X_2\left(\frac{dx_2}{d\alpha_i}\right) + \ldots + X_n\left(\frac{dx_n}{d\alpha_i}\right) = X_1\frac{dx_1}{d\alpha_i} + X_2\frac{dx_2}{d\alpha_i} + \ldots + X_n\frac{dx_n}{d\alpha_i} \\
+ \left(X_1\frac{dx_1}{dx_{n+1}} + X_2\frac{dx_2}{dx_{n+1}} + \ldots + X_n\frac{dx_n}{dx_{n+1}}\right)\left(\frac{dx_{n+1}}{d\alpha_i}\right) \\
+ \left(X_1\frac{dx_1}{dx_{n+2}} + X_2\frac{dx_2}{dx_{n+2}} + \ldots + X_n\frac{dx_n}{dx_{n+2}}\right)\left(\frac{dx_{n+2}}{d\alpha_i}\right) \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
+ \left(X_1\frac{dx_1}{dx_{2n}} + X_2\frac{dx_2}{dx_{2n}} + \ldots + X_n\frac{dx_n}{dx_{2n}}\right)\left(\frac{dx_{2n}}{d\alpha_i}\right) \\
= -M\beta_i - X_{n+1}\left(\frac{dx_{n+1}}{d\alpha_i}\right) - X_{n+2}\left(\frac{dx_{n+2}}{d\alpha_i}\right) \ldots - X_{2n}\left(\frac{dx_{2n}}{d\alpha_i}\right),
\end{aligned}$$

ou

$$X_1\left(\frac{dx_1}{d\alpha_i}\right) + X_2\left(\frac{dx_2}{d\alpha_i}\right) \ldots + X_{2n}\left(\frac{dx_{2n}}{d\alpha_i}\right) + M\beta_i = 0.$$

Différentiant cette équation par rapport à M, on obtient

$$\begin{aligned}
0 = \left(\frac{dX_1}{dM}\right)\left(\frac{dx_1}{d\alpha_i}\right) + \left(\frac{dX_2}{dM}\right)\left(\frac{dx_2}{d\alpha_i}\right) \ldots + \left(\frac{dX_{2n}}{dM}\right)\left(\frac{dx_{2n}}{d\alpha_i}\right) \\
+ X_1\left(\frac{d^2x_1}{dMd\alpha_i}\right) + X_2\left(\frac{d^2x_2}{dMd\alpha_i}\right) \ldots + X_{2n}\left(\frac{d^2x_{2n}}{dMd\alpha_i}\right) + \beta_i.
\end{aligned}$$

D'un autre côté l'équation

$$X_1dx_1 + X_2dx_2 \ldots + X_{2n}dx_{2n} = 0,$$

en y considérant toutes les quantités comme étant des fonctions de M donne

$$X_1\left(\frac{dx_1}{dM}\right) + X_2\left(\frac{dx_2}{dM}\right) \ldots + X_{2n}\left(\frac{dx_{2n}}{dM}\right) = 0,$$

d'où l'on conclut en différentiant par rapport à α_i,

$$\begin{aligned}
0 = X_1\left(\frac{d^2x_1}{dMd\alpha_i}\right) + X_2\left(\frac{d^2x_2}{dMd\alpha_i}\right) + X_{2n}\left(\frac{d^2x_{2n}}{dMd\alpha_i}\right) \\
+ \left(\frac{dX_1}{d\alpha_i}\right)\cdot\left(\frac{dx_1}{dM}\right) + \left(\frac{dX_2}{d\alpha_i}\right)\cdot\left(\frac{dx_2}{dM}\right) \ldots + \left(\frac{dX_{2n}}{d\alpha_i}\right)\cdot\left(\frac{dx_{2n}}{dM}\right).
\end{aligned}$$

Par conséquent, au moyen de cette équation, la précédente multipliée par dM devient

$$\begin{aligned} 0 = dX_1\left(\frac{dx_1}{d\alpha_i}\right) + dX_2\left(\frac{dx_2}{d\alpha_i}\right) \ldots + dX_{2n}\left(\frac{dx_{2n}}{d\alpha_i}\right) \\ - dx_1\left(\frac{dX_1}{d\alpha_i}\right) - dx_2\left(\frac{dX_2}{d\alpha_i}\right) \ldots - dx_{2n}\left(\frac{dX_{2n}}{d\alpha_i}\right) + \beta_i dM, \end{aligned}$$

où l'on a remplacé $\left(\frac{dX_1}{dM}\right) dM$ par dX_1, $\left(\frac{dx_1}{dM}\right) dM$ par dx_1, etc. Éliminant β_i de cette équation à l'aide de l'équation

$$X_1\left(\frac{dx_1}{d\alpha_i}\right) + X_2\left(\frac{dx_2}{d\alpha_i}\right) + \ldots + X_{2n}\left(\frac{dx_{2n}}{d\alpha_i}\right) + M\beta_i = 0,$$

on obtient

$$\begin{aligned} 0 = dX_1\left(\frac{dx_1}{d\alpha_i}\right) + dX_2\left(\frac{dx_2}{d\alpha_i}\right) \ldots + dX_{2n}\left(\frac{dx_{2n}}{d\alpha_i}\right) \\ - dx_1\left(\frac{dX_1}{d\alpha_i}\right) - dx_2\left(\frac{dX_2}{d\alpha_i}\right) \ldots - dx_{2n}\left(\frac{dX_{2n}}{d\alpha_i}\right) \\ - \frac{dM}{M}\left[X_1\left(\frac{dx_1}{d\alpha_i}\right) + X_2\left(\frac{dx_2}{d\alpha_i}\right) \ldots + X_{2n}\left(\frac{dx_{2n}}{d\alpha_i}\right)\right]. \end{aligned}$$

Faisant, ce qui est permis, $\beta_n = 1$, on trouvera par la même analyse, pour les $n - 1$ autres constantes $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{n-1}$, des formules semblables à celle qu'on a trouvée précédemment pour α_i. On a d'abord

$$\begin{aligned} X_1\left(\frac{dx_1}{d\beta_i}\right) + X_2\left(\frac{dx_2}{d\beta_i}\right) \ldots + X_n\left(\frac{dx_n}{d\beta_i}\right) \\ = \left(X_1\frac{dx_1}{dx_{n+1}} + X_2\frac{dx_2}{dx_{n+1}} \ldots + X_n\frac{dx_n}{dx_{n+1}}\right)\left(\frac{dx_{n+1}}{d\beta_i}\right) \\ + \left(X_1\frac{dx_1}{dx_{n+2}} + X_2\frac{dx_2}{dx_{n+2}} \ldots + X_n\frac{dx_n}{dx_{n+2}}\right)\left(\frac{dx_{n+2}}{d\beta_i}\right) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ + \left(X_1\frac{dx_1}{dx_{2n}} + X_2\frac{dx_2}{dx_{2n}} \ldots + X_n\frac{dx_n}{dx_{2n}}\right)\left(\frac{dx_{2n}}{d\beta_i}\right) \\ = -\left[X_{n+1}\left(\frac{dx_{n+1}}{d\beta_i}\right) + X_{n+2}\left(\frac{dx_{n+2}}{d\beta_i}\right) \ldots + X_{2n}\left(\frac{dx_{2n}}{d\beta_i}\right)\right], \end{aligned}$$

ou $\quad 0 = X_1\left(\frac{dx_1}{d\beta_i}\right) + X_2\left(\frac{dx_2}{d\beta_i}\right) \ldots + X_{2n}\left(\frac{dx_{2n}}{d\beta_i}\right).$

Différentiant cette équation par rapport à M, et l'équation

$$o = X_1\left(\frac{dx_1}{dM}\right) + X_2\left(\frac{dx_2}{dM}\right) \ldots + X_{2n}\left(\frac{dx_{2n}}{dM}\right),$$

par rapport à β_i, soustrayant les résultats l'un de l'autre, multipliant le reste par dM, on obtient l'équation

$$o = dX_1\left(\frac{dx_1}{d\beta_i}\right) + dX_2\left(\frac{dx_2}{d\beta_i}\right) \ldots + dX_{2n}\left(\frac{dx_{2n}}{d\beta_i}\right)$$
$$- dx_1\left(\frac{dX_1}{d\beta_i}\right) - dx_2\left(\frac{dX_2}{d\beta_i}\right) \ldots - dx_{2n}\left(\frac{dX_{2n}}{d\beta_i}\right).$$

Pour lui donner la même forme, que nous avons trouvée pour l'équation qui se rapporte à α_i, nous en retrancherons l'équation

$$o = X_1\left(\frac{dx_1}{d\beta_i}\right) + X_2\left(\frac{dx_2}{d\beta_i}\right) \ldots + X_{2n}\left(\frac{dx_{2n}}{d\beta_i}\right),$$

multipliée par $\frac{dM}{M}$. De cette manière, on a

$$o = dX_1\left(\frac{dx_1}{d\beta_i}\right) + dX_2\left(\frac{dx_2}{d\beta_i}\right) \ldots + dX_{2n}\left(\frac{dx_{2n}}{d\beta_i}\right)$$
$$- dx_1\left(\frac{dX_1}{d\beta_i}\right) - dx_2\left(\frac{dX_2}{d\beta}\right) \ldots - dx_{2n}\left(\frac{dX_{2n}}{d\beta_i}\right)$$
$$- \frac{dM}{M}\left[X_1\left(\frac{dx_1}{d\beta_i}\right) + X_2\left(\frac{dx_2}{d\beta_i}\right) \ldots + X_{2n}\left(\frac{dx_{2n}}{d\beta_i}\right)\right].$$

Dans cette équation et dans l'équation semblable par rapport à α_i, ci-dessus trouvée, nous allons mettre pour les différentielles partielles $\left(\frac{dX_k}{d\alpha_i}\right)$, $\left(\frac{dX_k}{d\beta_i}\right)$, leurs valeurs développées :

$$\left(\frac{dX_k}{d\alpha_i}\right) = \frac{dX_k}{dx_1}\cdot\left(\frac{dx_1}{d\alpha_i}\right) + \frac{dX_k}{dx_2}\cdot\left(\frac{dx_2}{d\alpha_i}\right) \ldots + \frac{dX_k}{dx_{2n}}\cdot\left(\frac{dx_{2n}}{d\alpha_i}\right),$$
$$\left(\frac{dX_k}{d\beta_i}\right) = \frac{dX_k}{dx_1}\cdot\left(\frac{dx_1}{d\beta_i}\right) + \frac{dX_k}{dx_2}\cdot\left(\frac{dx_2}{d\beta_i}\right) \ldots + \frac{dX_k}{dx_{2n}}\cdot\left(\frac{dx_{2n}}{d\beta_i}\right);$$

et ordonner les expressions par rapport aux quantités $\left(\frac{dx_k}{d\alpha_i}\right)$, $\left(\frac{dx_k}{d\beta_i}\right)$ Alors ces équations se changent en celles-ci :

$$0 = T_1 \left(\frac{dx_1}{d\alpha_i}\right) + T_2 \left(\frac{dx_2}{d\alpha_i}\right) \ldots + T_{2n} \left(\frac{dx_{2n}}{d\alpha_i}\right),$$

$$0 = T_1 \left(\frac{dx_1}{d\beta_i}\right) + T_2 \left(\frac{dx_2}{d\beta_i}\right) \ldots + T_{2n} \left(\frac{dx_{2n}}{d\beta_i}\right),$$

où

$$T_1 = dX_1 - \left(\frac{dX_1}{dx_1} dx_1 + \frac{dX_2}{dx_1} dx_2 \ldots + \frac{dX_{2n}}{dx_1} dx_{2n}\right) - X_1 \frac{dM}{M},$$

$$T_2 = dX_2 - \left(\frac{dX_1}{dx_2} dx_1 + \frac{dX_2}{dx_2} dx_2 \ldots + \frac{dX_{2n}}{dx_2} dx_{2n}\right) - X_2 \frac{dM}{M},$$

. . . .

$$T_{2n} = dX_{2n} - \left(\frac{dX_1}{dx_{2n}} dx_1 + \frac{dX_2}{dx_{2n}} dx_2 \ldots + \frac{dX_{2n}}{dx_{2n}} dx_{2n}\right) - X_{2n} \frac{dM}{M}.$$

Si l'on multiplie ces valeurs de T_1, T_2, etc., par $dx_1, dx_2, \ldots dx_{2n}$, et qu'on en fasse la somme, tous les termes du second membre se détruisent, vu que l'on a

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \ldots X_{2n} dx_{2n} = 0,$$

et

$$\frac{dX_k}{dx_1} dx_1 + \frac{dX_k}{dx_2} dx_2 + \ldots + \frac{dX_k}{dx_{2n}} dx_{2n} = dX_k,$$

et l'on obtient l'équation

$$T_1 dx_1 + T_2 dx_2 + \ldots + T_{2n} dx_{2n} = 0,$$

ou ce qui est la même chose

$$T_1 \left(\frac{dx_1}{dM}\right) + T_2 \left(\frac{dx_2}{dM}\right) + \ldots + T_{2n} \left(\frac{dx_{2n}}{dM}\right) = 0;$$

puisque les différentielles dx_1, dx_2, etc., dans les formules précédentes, remplacent les produits $\left(\frac{dx_1}{dM}\right) dM$, $\left(\frac{dx_2}{dM}\right) dM$, etc.

Des n équations

$$T_1 \left(\frac{dx_1}{d\alpha_i}\right) + T_2 \left(\frac{dx_2}{d\alpha_i}\right) \ldots + T_{2n} \left(\frac{dx_{2n}}{d\alpha_i}\right) = 0,$$

jointes aux $n - 1$ équations

$$T_1\left(\frac{dx_1}{d\beta_i}\right) + T_2\left(\frac{dx_2}{d\beta_i}\right) \ldots + T_{2n}\left(\frac{dx_{2n}}{d\beta_i}\right) = 0,$$

et à l'équation

$$T_1\left(\frac{dx_1}{dM}\right) + T_2\left(\frac{dx_2}{dM}\right) \ldots + T_{2n}\left(\frac{dx_{2n}}{dM}\right) = 0,$$

on déduit les $2n$ équations

$$T_1 = 0, \quad T_2 = 0, \quad \ldots \quad T_{2n} = 0,$$

qui coïncident avec les équations différentielles de Pfaff, quand on y change dN, X_{2n}, x_{2n}, en $\frac{dM}{M}$, X, x, respectivement. C.Q.F.D.

Voici comment on peut prouver que les équations

$$T_1 = 0, \quad T_2 = 0, \ldots \quad T_{2n} = 0,$$

résultent de celles que nous venons d'obtenir. Si l'on considère $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{n-1}$, M comme $2n$ quantités variables en même temps, les équations, qui existent entre ces quantités et les $2n$ quantités $x_1, x_2, \ldots x_{2n}$, n'établissent entre ces dernières aucune relation déterminée ; mais ces équations font seulement voir comment l'un des systèmes de $2n$ variables peut être exprimé par l'autre système de $2n$ variables. Qu'on désigne des variations quelconques des quantités $x_1, x_2, \ldots x_{2n}$ par $\delta x_1, \delta x_2, \ldots \delta x_{2n}$: ces variations sont indépendantes les unes des autres, puisqu'il n'y a aucune relation entre les quantités $x_1, x_2, \ldots x_{2n}$; en nommant $\delta\alpha_1, \delta\alpha_2, \ldots \delta\alpha_n$, $\delta\beta_1, \delta\beta_2, \ldots \delta\beta_{n-1}$, δM les variations correspondantes des quantités $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{n-1}$, M, on a

$$\begin{aligned} \delta x_k = {} & \left(\frac{dx_k}{d\alpha_1}\right)\delta\alpha_1 + \left(\frac{dx_k}{d\alpha_2}\right)\delta\alpha_2 \ldots + \left(\frac{dx_k}{d\alpha_n}\right)\delta\alpha_n, \\ & + \left(\frac{dx_k}{d\beta_1}\right)\delta\beta_1 + \left(\frac{dx_k}{d\beta_2}\right)\delta\beta_2 \ldots + \left(\frac{dx_k}{d\beta_{n-1}}\right)\delta\beta_{n-1}, \\ & + \left(\frac{dx_k}{dM}\right)\delta M. \end{aligned}$$

Donc multipliant les $2n$ équations, que nous avons trouvées ci-dessus,

$$T_1 \left(\frac{dx_1}{d\alpha_1}\right) + T_2 \left(\frac{dx_2}{d\alpha_1}\right) \ldots + T_{2n} \left(\frac{dx_{2n}}{d\alpha_1}\right) = 0,$$

$$T_1 \left(\frac{dx_1}{d\alpha_2}\right) + T_2 \left(\frac{dx_2}{d\alpha_2}\right) \ldots + T_{2n} \left(\frac{dx_{2n}}{d\alpha_2}\right) = 0,$$

. . . .

$$T_1 \left(\frac{dx_1}{d\alpha_n}\right) + T_2 \left(\frac{dx_2}{d\alpha_n}\right) \ldots + T_{2n} \left(\frac{dx_{2n}}{d\alpha_n}\right) = 0,$$

$$T_1 \left(\frac{dx_1}{d\beta_1}\right) + T_2 \left(\frac{dx_2}{d\beta_1}\right) \ldots + T_{2n} \left(\frac{dx_{2n}}{d\beta_1}\right) = 0,$$

$$T_1 \left(\frac{dx_1}{d\beta_2}\right) + T_2 \left(\frac{dx_2}{d\beta_2}\right) \ldots + T_{2n} \left(\frac{dx_{2n}}{d\beta_2}\right) = 0,$$

. . . .

$$T_1 \left(\frac{dx_1}{d\beta_{n-1}}\right) + T_2 \left(\frac{dx_2}{d\beta_{n-1}}\right) \ldots + T_{2n} \left(\frac{dx_{2n}}{d\beta_{n-1}}\right) = 0,$$

$$T_1 \left(\frac{dx_1}{dM}\right) + T_2 \left(\frac{dx_2}{dM}\right) \ldots + T_{2n} \left(\frac{dx_n}{dM}\right) = 0,$$

par $\delta\alpha_1$, $\delta\alpha_2$,... $\delta\alpha_n$, $\delta\beta_1$, $\delta\beta_2$, ...$\delta\beta_{n-1}$, δM respectivement, et faisant la somme, on trouve

$$T_1\delta x_1 + T_2\delta x_2 \ldots + T_{2n}\delta x_{2n} = 0,$$

Or, comme δx_1, δx_2,... δx_{2n}, sont des variations indépendantes, les unes des autres, cette équation ne peut pas avoir lieu à moins qu'on n'ait

$$T_1 = 0,\quad T_2 = 0,\quad T_{2n} = 0,$$

ce qu'il fallait démontrer.

On peut encore s'assurer par les considérations suivantes, qu'on obtient toujours par la méthode que j'ai indiquée, les intégrales complètes des équations différentielles ordinaires, établies par

Pfaff, quand on sait satisfaire à l'équation

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 \ldots + X_{2n} dx_{2n} = 0$$

par un système quelconque de n équations à n constantes arbitraires. Qu'on résolve ces n équations par rapport aux n constantes arbitraires de manière qu'elles prennent la forme

$$A_1 = \alpha_1, \quad A_2 = \alpha_2, \ldots A_n = \alpha_n,$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, étant les constantes arbitraires, qui n'entrent plus dans $A_1, A_2, \ldots A_n$. Pour que ces équations satisfassent à l'équation différentielle

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \ldots + X_{2n} dx_{2n} = 0,$$

il doit exister n multiplicateurs $U_1, U_2, \ldots U_n$, au moyen desquels on ait *identiquement*

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 \ldots + X_{2n} dx_{2n} = U_1 dA_1 + U_2 dA_2 + \ldots + U_n dA_n.$$

En supposant qu'on ait exprimé $x_1, x_2, \ldots x_n$ en $A_1, A_2, \ldots A_n$, $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots x_{2n}$, cette équation fournit

$$U_i = X_1 \frac{dx_1}{dA_i} + X_2 \frac{dx_2}{dA_i} \ldots + X_{2n} \frac{dx_{2n}}{dA_i}.$$

De l'analyse donnée par Pfaff lui-même, il suit que, sachant transformer d'une manière quelconque l'équation

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 \ldots + X_{2n} dx_{2n}$$

en une autre à $2n - 1$ variables seulement, on obtient les intégrales de ses équations différentielles ordinaires, en égalant ces $2n - 1$ variables à des constantes arbitraires. Or nous avons

$$0 = X_1 dx_1 + X_2 dx_2 \ldots + X_{2n} dx_{2n} = U_1 dA_1 + U_2 dA_2 \ldots + U_n dA_n$$

ou

$$o = \frac{U_1}{U_n} dA_1 + \frac{U_2}{U_n} dA_2 + \ldots + \frac{U_{n-1}}{U_n} dA_{n-1} + dA_n,$$

ce qui est une équation différentielle à $2n - 1$ variables seulement,

$$A_1, A_2, \ldots A_n, \frac{U_1}{U_n}, \frac{U_2}{U_n}, \ldots \frac{U_{n-1}}{U_n}.$$

Donc celles-ci égalées à des constantes arbitraires doivent être les intégrales complètes du système d'équations différentielles ordinaires de Pfaff. Or, elles coïncident parfaitement avec les $2n - 1$ équations telles que je les ai établies plus haut.

XII.

J'ai remarqué ci-dessus, que la méthode proposée par Pfaff, pour intégrer l'équation

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \ldots + X_{2n} dx_{2n} = o,$$

a cet inconvénient, qu'on n'établit à *priori* que le premier des systèmes d'équations différentielles ordinaires dont on doit s'occuper successivement : on ne peut qu'indiquer la manière dont chacun des autres est formé, et cela après l'intégration complète de tous les précédents. A cause de cette circonstance on ne peut pas se faire une idée nette de l'ensemble de la méthode. Pour le cas particulier qui fournit l'intégration des équations différentielles partielles du premier ordre, nous avons vu (IX), que l'intégration du premier de ces systèmes d'équations différentielles ordinaires suffit complétement, et qu'on n'a plus besoin d'établir et d'intégrer d'autres systèmes. Ce cas particulier peut encore être énoncé comme étant celui dans lequel un nombre $n - 1$ des $2n$ quantités $X_1, X_2, \ldots X_{2n}$, est égal à zéro. Soit par exemple

$$X_{n+2} = X_{n+3} = \ldots = X_{2n} = o,$$

de manière que l'équation proposée devienne

$$dx_{n+1} = \frac{-1}{X_{n+1}} (X_1 dx_1 + X_2 dx_2 \ldots + X_n dx_n).$$

Faisant

$$-\frac{X_1}{X_{n+1}} = p_1, \quad -\frac{X_2}{X_{n+1}} = p_2, \quad -\frac{X_n}{X_{n+1}} = p_n,$$

les quantités $p_1, p_2, \ldots p_n$, sont les coefficients différentiels partiels de x_{n+1}, considéré comme fonction de $x_1, x_2, \ldots x_n$, et l'élimination des $n-1$ quantités $x_{n+2}, x_{n+3}, \ldots x_{2n}$, de ces n équations donne l'équation différentielle partielle, qu'on devait intégrer. Maintenant, je vais démontrer qu'en appliquant la méthode, dont nous nous sommes servis pour ce cas *particulier*, à l'équation différentielle *générale* de Pfaff, on peut se débarrasser de l'inconvénient ci-dessus mentionné; car on réussit par-là à établir sans difficulté tous les systèmes qui sont à intégrer sans en avoir intégré aucun.

Pour arriver à ce résultat, on prendra dans les intégrales du premier des systèmes d'équations différentielles ordinaires établis par Pfaff, pour constantes arbitraires, les valeurs de $x_1, x_2, \ldots x_{2n-1}$, correspondantes à $x_{2n} = 0$, valeurs que nous désignerons par x_1^0, $x_2^0, \ldots x_{2n-1}^0$. En désignant aussi les valeurs correspondantes de X_1, $X_2, \ldots X_{2n}$ par X_1^0, $X_2^0, \ldots X_{2n}^0$, on obtient des équations de la forme

$$\begin{array}{ll}
x_1 = x_1^0 + x_{2n}\xi_1, & X_1 = X_1^0 + x_{2n}\Xi_1, \\
x_2 = x_2^0 + x_{2n}\xi_2, & X_2 = X_2^0 + x_{2n}\Xi_2, \\
\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\
x_{2n-1} = x_{2n-1}^0 + x_{2n}\xi_{2n-1}, & X_{2n} = X_{2n}^0 + x_{2n}\Xi_{2n},
\end{array}$$

$\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_{2n-1}, \Xi_1, \Xi_2, \ldots \Xi_{2n}$, étant des fonctions de x_{2n}, x_1^0, $x_2^0, \ldots x_{2n-1}^0$, qui ne deviennent pas infinies pour $x_{2n} = 0$. En substituant ces valeurs de $x_1, x_2, \ldots x_{2n-1}$, telles qu'on les trouve par l'intégration complète des équations différentielles ordinaires établies par M. Pfaff, dans l'équation

$$0 = X_1 dx_1 + X_2 dx_2 \ldots + X_{2n} dx_{2n},$$

on obtient

$$\begin{aligned}
0 = {} & (X_1^0 + x_{2n}\Xi_1)\, d(x_1^0 + x_{2n}\xi_1) \\
& + (X_2^0 + x_{2n}\Xi_2)\, d(x_1^0 + x_{2n}\xi_2) \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + (X_{2n-1}^0 + x_{2n}\Xi_{2n-1})\, d(x_{2n-1}^0 + x_{2n}\xi_{2n-1}) \\
& + (X_{2n}^0 + x_{2n}\Xi_{2n})\, dx_{2n} \\
= {} & B dx_{2n} + B_1 dx_1^0 + B_2 x_2^0 \ldots + B_{2n-1} dx_{2n-1}^0,
\end{aligned}$$

où (i désignant un des nombres $1, 2, \ldots 2n-1$)

$$\begin{aligned} B_i &= X_i^\circ + x_{2n}\Xi_i \\ &+ x_{2n}\left(X_1^\circ \frac{d\xi_1}{dx_i^\circ} + X_2^\circ \frac{d\xi_2}{dx_i^\circ} \ldots + X_{2n-1}^\circ \frac{d\xi_{2n-1}}{dx_i^\circ}\right) \\ &+ x_{2n}^2\left(\Xi_1 \frac{d\xi_1}{dx_i^\circ} + \Xi_2 \frac{d\xi_2}{dx_i^\circ} \ldots + \Xi_{2n-1} \frac{d\xi_{2n-1}}{dx_i^\circ}\right). \end{aligned}$$

Mais Pfaff a démontré, que si au moyen des intégrales complètes de ses équations différentielles ordinaires, on exprime les $2n$ variables $x_1, x_2, x_3, \ldots x_{2n}$, en fonction de l'une d'entre elles, de x_{2n} par exemple, et de $2n-1$ constantes arbitraires, et qu'ensuite on substitue ces valeurs dans lesquelles on considère aussi les constantes arbitraires comme variables, dans l'expression

$$X_1dx_1 + X_2dx_2 + \ldots + X_{2n}dx_{n};$$

le coefficient de dx_{2n} s'évanouit, et les rapports des coefficients des différentielles des constantes arbitraires deviennent indépendans de x_n. On a donc

$$B = 0,$$

et les rapports de B_1, B_2, B_{2n-1}, sont indépendants de x_{2n}.

Par conséquent, ils ne sont pas changés, quand on fait $x_{2n} = 0$, dans les expressions de $B_1, B_2, \ldots B_{2n-1}$; on obtient donc

$$B_1 : B_2 : \ldots : B_{2n-1} = X_1^\circ : X_2^\circ : \ldots : X_{2n-1}^\circ,$$

ou en introduisant un facteur M,

$$B_1 = MX_1^\circ, \quad B_2 = MX_2^\circ, \ldots \quad B_{2n-1} = MX_{2n-1}^\circ.$$

Ainsi nous voyons qu'en introduisant les variables $x_1^\circ, x_2^\circ, \ldots x_{2n-1}^\circ, x_{2n}$ au lieu des variables $x_1, x_2, \ldots x_{2n-1}, x_{2n}$, et moyennant les expressions

$$x_1 = x_1^\circ + x_{2n}\xi_1, \quad x_2 = x_2^\circ + x_{2n}\xi_2, \ldots \quad x_{2n-1} = x_{2n-1}^\circ + x_{2n}\xi_{2n-1},$$

auxquelles on est conduit (p. 195) par l'intégration complète des équations différentielles ordinaires de Pfaff, l'équation différentielle proposée

$$o = X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \ldots + X_{2n} dx_{2n},$$

se change en celle-ci :

$$o = X_1^\circ dx_1^\circ + X_2^\circ dx_2^\circ + \ldots + X_{2n-1}^\circ dx_{2n-1}^\circ,$$

c'est-à-dire en une équation différentielle, qui contient une variable de moins et qu'on trouve, en faisant $x_{2n} = o$ dans la proposée, et en y remplaçant $x_1, x_2, \ldots x_{2n-1}$ par $x_1^\circ, x_2^\circ, \ldots x_{2n-1}^\circ$. Et réciproquement l'intégration de la dernière équation donnera donc l'intégration de la proposée, en exprimant dans ses équations intégrales x_1°, $x_2^\circ, \ldots x_{2n-1}^\circ$ en x_1, $x_2, \ldots x_{2n-1}$, x_{2n}, à l'aide des équations ci-dessus établies.

Cela posé, on doit d'après la méthode de Pfaff égaler une des quantités x_1°, $x_2^\circ, \ldots x_{2n-1}^\circ$, qui entrent dans l'équation

$$o = X_1^\circ dx_1^\circ + X_2^\circ dx_2^\circ \ldots + X_{2n-1}^\circ dx_{2n-1}^\circ,$$

à une constante arbitraire : soit donc

$$x_{2n-1}^\circ = \alpha_1,$$

α_1 étant une constante arbitraire. Alors l'équation différentielle se change en

$$o = X_1^\circ dx_1^\circ + X_2^\circ dx_2^\circ \ldots + X_{2n-2}^\circ dx_{2n-2}^\circ,$$

où l'on doit remplacer x_{2n-1} par α_1 dans les fonctions X_1°, $X_2^\circ, \ldots X_{2n-1}^\circ$. Ayant intégré cette équation différentielle par un système de $n-1$ équations à $n-1$ constantes arbitraires, on y joindra l'équation

$$x_{2n-1}^\circ = \alpha_1,$$

et l'on exprimera x_1°, $x_2^\circ, \ldots x_{2n-1}^\circ$ en x, $x_1, \ldots x_{2n}$, à l'aide des équations intégrales du premier système ; alors on aura les n équations à n constantes arbitraires, qui satisfont à l'équation différentielle proposée

$$o = X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \ldots + X_{2n} dx_{2n}.$$

Maintenant on peut réduire de la même manière l'équation, à laquelle on a ramené la proposée, à une autre qui renferme deux variables de moins. Le second système d'équations différentielles, qu'on doit intégrer pour atteindre ce but, se déduit du premier, en omettant les deux dernières équations de celui-ci, faisant $x_{2n} = 0$, $x_{2n-1} = \alpha_1$ et remplaçant x_i, X_i par x_i°, X_i°. Alors on parvient à $2n - 3$ équations différentielles ordinaires aux $2n - 2$ variables x_1°, x_2°, ... x_{2n-2}°. Pour constantes arbitraires, on prendra comme précédemment les valeurs de x_1°, x_2°, ... x_{2n-3}° correspondant à $x_{2n-2}^\circ = 0$, et que nous désignerons par $x_1^{\circ\circ}$, $x_2^{\circ\circ}$, ... $x_{2n-3}^{\circ\circ}$, et l'on nommera $X_i^{\circ\circ}$, la valeur correspondante de X_i°; alors le problème est réduit à celui d'intégrer l'équation

$$X_1^{\circ\circ}dx_1^{\circ\circ} + X_2^{\circ\circ}dx_2^{\circ\circ} \ldots + X_{2n-4}^{\circ\circ}dx_{2n-4}^{\circ\circ} = 0,$$

(qu'on déduit de la proposée, en y faisant $x_{2n} = 0$, $x_{2n-2} = 0$, $x_{2n-1} = \alpha_1$, $x_{2n-3} = \alpha_2$, où α_1, α_2, représentent des constantes arbitraires, et en y remplaçant X, x, par $X^{\circ\circ}$, $x^{\circ\circ}$) par un système de $2n - 2$ équations à $n - 2$ constantes arbitraires. Qu'on y joigne l'équation

$$x_{2n-3}^{\circ\circ} = \alpha_2,$$

et qu'on exprime $x_1^{\circ\circ}$, $x_2^{\circ\circ}$, ... $x_{2n-3}^{\circ\circ}$ en x_1°, x_2°, ... x_{2n-2}°, à l'aide des équations intégrales du second système, qu'on y joigne encore l'équation

$$x_{2n-1}^\circ = \alpha_1,$$

et qu'on exprime x_1°, x_2°, ... x_{2n-1}° en x_1, x_2, ... x_{2n}, à l'aide des équations intégrales du premier système : alors on aura les n intégrales de l'équation proposée à n constantes arbitraires. Si l'on continue ainsi à débarrasser chaque équation, à laquelle on a réduit la proposée, de deux variables, en y égalant l'une des variables à zéro, une autre à une constante arbitraire, on arrive enfin à une équation qui ne renferme que deux variables

$$X_1dx_1 + X_2dx_2 = 0,$$

où l'on doit faire $x_{2n} = x_{2n-2} \ldots = x_4 = 0$, $x_{2n-1} = \alpha_1$, $x_{2n-3} = \alpha_2$, ... $x_3 = \alpha_{n-1}$, dans les expressions de X_1, X_2.

Donc si l'on désigne par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, des constantes arbitraires, l'ensemble du procédé nécessaire pour établir les divers systèmes d'équations différentielles ordinaires qu'on doit intégrer, consiste en ce qui suit : dans le premier système d'équations différentielles ordinaires on fera $x_{2n} = 0$, $x_{2n-1} = \alpha_1$; omettant les deux dernières équations et remplaçant x_i, X_i par x_i^0, X_i^0, on obtiendra le second système : on y fera $x_{2n-2}^0 = 0$, $x_{2n-3}^0 = \alpha_2$, on en omettra de même les deux dernières équations, et l'on écrira x_i^{000}, X_i^{000}, au lieu de x_i^{00}, X_i^{00}; de cette manière on obtiendra le troisième système : on y fera $x_{2n-4}^{00} = 0$, $x_{2n-5}^{00} = \alpha_3$, on en omettra comme auparavant les deux dernières équations, et l'on écrira x_i^{000}, X_i^{000} au lieu de x_i^{00}, X_i^{00}; on obtiendra ainsi le quatrième système d'équations différentielles, et ainsi de suite : enfin on parviendra à l'équation, qui représente le $n^{ième}$ système

$$X_1^{0^{(n-1)}} dx_1^{0^{n-1}} + X_2^{0^{n-1}} dx_2^{0^{n-1}} = 0.$$

Si l'on désigne par $x_1^{0^{n-m}}$, $x_2^{0^{n-m}}, \ldots x_{2m+1}^{0^{n-m}}$ les valeurs que les quantités $x_1^{0^{n-m-1}}$, $x_2^{0^{n-m-1}}, \ldots x_{2m+1}^{0^{n-m-1}}$, prennent dans les $2m+1$ intégrales du $(n-m)^{me}$ système d'équations différentielles, quand on y fait $x_{2m-2}^{0^{n-m-1}} = 0$, alors toutes les équations intégrales des différens systèmes, combinés avec les équations

$$x_{2n-1}^0 = \alpha_1, \quad x_{2n-3}^{00} = \alpha_2, \quad x_{2n-5}^{000} = \alpha_3, \ldots \quad x_1^{0^n} = \alpha_n,$$

donnent la solution demandée. Car dans ces n équations, on peut exprimer $x_1^{0^n}$ en $x_1^{0^{n-1}}$, $x_2^{0^{n-1}}$, à l'aide de l'intégrale de l'équation différentielle du $n^{ième}$ système ; puis $x_1^{0^{n-1}}$, $x_2^{0^{n-1}}$, $x_3^{0^{n-1}}$ en $x_1^{0^{n-2}}$, $x_2^{0^{n-2}}$, $x_3^{0^{n-2}}$, $x_4^{0^{n-2}}$, à l'aide des trois intégrales du $(n-1)^{me}$ système ; puis $x_1^{0^{n-2}}$, $x_2^{0^{n-2}}$, $x_3^{0^{n-2}}$, $x_4^{0^{n-2}}$, $x_5^{0^{n-2}}$ en $x_1^{0^{n-3}}$, $x_2^{0^{n-3}}, \ldots x_6^{0^{n-3}}$, à l'aide des cinq intégrales du $(n-2)^{me}$ système d'équations différentielles, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'à l'aide de l'intégration du premier système, on ait exprimé toutes les quantités qui entrent dans les n équations en fonction des variables indépendantes x_1, $x_2, \ldots x_{2n}$.

Nous avons vu que quand $n-1$ des $2n$ quantités $\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \ldots \mathrm{X}_{2n}$, s'évanouissent (ce qui donne le cas des différentielles partielles du premier ordre), alors l'intégration du premier système d'équations différentielles suffit. Lorsqu'un nombre $n-m$ de ces quantités s'annule seulement, de manière qu'on ait

$$\mathrm{X}_1 = \mathrm{X}_2 = \ldots = \mathrm{X}_{n-m} = 0,$$

on n'a qu'à continuer le procédé indiqué, jusqu'à ce qu'on ait réduit l'équation différentielle proposée à une équation à $2n-2m+2$ variables, qui aura la forme

$$0 = \mathrm{X}^{\circ\,\overline{m-1}}_{n-m+1} dx^{\circ\,\overline{m-1}}_{n-m+1} + \mathrm{X}^{\circ\,\overline{m-1}}_{n-m+2} dx^{\circ\,\overline{m-1}}_{n-m+2} \ldots + \mathrm{X}^{\circ\,\overline{m-1}}_{2n-2m+2} dx^{\overline{m-1}}_{2n-2m+2},$$

car les coefficients de $dx^{\circ\,\overline{m-1}}_1$, $dx^{\circ\,\overline{m-1}}_2$, ... $dx^{\circ\,\overline{m-1}}_{n-n}$ s'évanouissent. L'intégration du $m^{ième}$ système d'équations différentielles, suffit pour trouver les $n-m+1$ équations, qui satisfont à cette équation différentielle, et l'on n'a plus besoin d'intégrer aucun autre système.

On peut encore intégrer l'équation

$$\mathrm{X}_1 dx_1 + \mathrm{X}_2 dx_2 \ldots + \mathrm{X}_{2n} dx_{2n} = 0,$$

par une méthode différente de celle de Pfaff. Considérant x_1, x_2, comme variables, on peut faire

$$\mathrm{X}_1 dx_1 + \mathrm{X}_2 dx_2 = \mathrm{U} du,$$

par l'intégration d'une équation différentielle ordinaire du premier ordre à deux variables. Considérant de même x_3 et x_4 comme variables, on obtient

$$\mathrm{X}_1 dx_1 + \mathrm{X}_2 dx_2 + \mathrm{X}_3 dx_3 + \mathrm{X}_4 dx_4 = \mathrm{U} du + \mathrm{U}' dx_3 + \mathrm{U}'' dx_4,$$

où par l'introduction de u au lieu de x_1 les quantités U, U', U'', deviennent des fonctions de u, x_2, x_3, x_4. A l'aide de l'intégration d'une équation différentielle partielle du premier ordre à trois variables, il est facile de démontrer qu'on peut donner à cette expression la forme

$$U du + U' dx_3 + U'' dx_4 = V_1 dv_1 + V_2 dv_2.$$

Considérant encore x_5, x_6, comme variables, on obtient

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 \ldots + X_6 dx_6 = V_1 dv_1 + V_2 dv_2 + V' dx_5 + V'' dx_6;$$

en introduisant dans cette équation v_1, v_2, au lieu de x_1, x_2, les quantités V_1, V_2, V', V'', deviennent des fonctions de v_1, v_2, x_3, x_4, x_5, x_6. A l'aide de l'intégration d'une équation différentielle partielle du premier ordre à quatre variables, on donnera à l'expression précédente, la forme

$$V_1 dv_1 + V_2 dv_2 + V' dx_5 + V'' dx_6 = W_1 dw_1 + W_2 dw_2 + W_3 dw_3,$$

d'où

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 \ldots + X_6 dx_6 = W_1 dw_1 + W_2 dw_2 + W_3 dw_3,$$

et ainsi de suite. Continuant ainsi, après avoir intégré d'abord une équation différentielle ordinaire du premier ordre à deux variables, ensuite successivement des équations différentielles partielles du premier ordre à 3, 4,... n variables, on obtiendra enfin par l'intégration d'une équation différentielle partielle du premier ordre à $n+1$ variables, les n équations demandées. Puisque d'après le premier procédé décrit ci-dessus, une équation différentielle partielle du premier ordre à $k+1$ variables, exige l'intégration de $2k-1$ équations différentielles ordinaires du premier ordre à $2k$ variables, il est visible que par ce second procédé on a besoin d'intégrer autant de systèmes d'équations différentielles ordinaires à autant de variables que par le premier. Lorsque m des quantités x_1, x_2,... x_{2n} s'évanouissent, on peut aussi commencer par l'intégration d'une équation différentielle partielle du premier ordre à $n+2$ variables.