JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

TERQUEM

Sur les lignes conjointes dans les coniques

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 3 (1838), p. 17-19.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1838_1_3__17_0>

gallica NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Gallica de la Bibliothèque nationale de France
http://gallica.bnf.fr/

et catalogué par Mathdoc dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
http://www.numdam.org/journals/JMPA

Sur les lignes conjointes dans les coniques ;

PAR M. TERQUEM.

1. J'appelle *lignes conjointes* deux droites telles qu'en les prenant pour axes des coordonnées les coefficients des deux carrés dans l'équation de la courbe deviennent égaux.

2. Il est évident que deux droites conjointes coupent la conique, généralement parlant, en quatre points, situés sur un même cercle, que je désignerai sous le nom de *cercle conjoint ;* et réciproquement quatre points d'une conique étant sur un cercle, en les joignant deux à deux, on obtient deux lignes conjointes.

3. Deux diamètres égaux sont deux lignes conjointes ; il en est de même des asymptotes de l'hyperbole ; un diamètre principal se confond avec son conjoint.

4. PROBLÈME. *Étant donnée l'équation d'une conique, et celle d'une droite tracée dans son plan, trouver* 1°. *l'équation de la droite conjointe, passant par l'origine ;* 2°. *l'équation du cercle correspondant ?*

Solution. Soit

$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0$	(1),	équat. de la conique ; γ= angle des axes.
$ay+bx+c=0$	(2),	.... de la droite donnée.
$a'y+b'x=0$	(3),	.... de la droite conjointe cherchée
$(ay+bx+c)(a'y+b'x)=0$	(4),	... système des deux droites.

Ajoutant les équations (1) et (4), il vient

$$\left.\begin{array}{r}(A+aa')y^2+xy(B+ab'+a'b)+x^2(C+bb')+y(D+ca')\\ +x(E+cb')+F=0.\end{array}\right\} (5)$$

Pour que cette équation représente un cercle, l'on doit avoir

$$\begin{aligned}A+aa'&=C+bb'\\ B+ab'+a'b&=2\cos\gamma(A+aa');\end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\left.\begin{aligned} a' &= \frac{a(C-A)+b(2A\cos\gamma - B)}{d},\\ b' &= \frac{b(A-C)+a(2C\cos\gamma - B)}{d},\\ d^2 &= a^2 - 2ab\cos\gamma + b^2. \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Substituant les valeurs (6) dans l'équation (5), elle devient

$$\left.\begin{aligned} &A'y^2+2A'\cos\gamma x^2+A'x^2+y[Dd+ca(C-A)+cb(2A\cos\gamma-B)]\\ &\quad +x[Ed+cb(A-C)+ca(2C\cos\gamma-B)]+Fd=0,\\ &A'=Ab^2-Bab+Ca^2. \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Cette équation (7) est celle du cercle conjoint.

Ainsi la recherche de l'intersection d'une droite et d'une conique est ramenée à l'intersection de cette droite et du cercle (7) que l'on peut toujours facilement construire.

5. Si la droite (2) passe par l'origine, alors $c=0$; désignant par α, β, R les coordonnées du centre et le rayon du cercle conjoint, on aura

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \frac{d}{2A'\sin^2\gamma}(D\cos\gamma - E),\\ \beta &= \frac{d}{2A'\sin^2\gamma}(E\cos\gamma - D),\\ R^2 &= \frac{d}{4A'^2\sin^2\gamma}(E^2d - 2DEd\cos\gamma + D^2d - 4A'F\sin^2\gamma); \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

d'où l'on tire

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{E\cos\gamma - D}{D\cos\gamma - E}.$$

Ainsi tous les cercles conjoints qui correspondent à un même point, ont leurs centres situés sur une droite passant par ce point, perpendiculairement à la polaire de ce point; et cette droite est une normale, lorsque le point est situé sur la conique.

On peut donc, à l'aide de deux droites conjointes, mener une normale à la conique par un point donné sur cette courbe, et par conséquent aussi une tangente.

6. Si l'on fait

$$\frac{b'}{a'} = \frac{b}{a},$$

alors les droites conjointes sont parallèles aux axes principaux ; et il vient en ayant égard aux équations (6),

$$b^2(2A\cos\gamma - B) + 2ab(C - A) + a^2(B - 2C\cos\gamma) = 0, \quad (9)$$

équation qui donne les directions des axes principaux.

7. Soient x', y' les coordonnées d'un point de la conique ; en y transportant l'origine sans rien changer aux directions des axes, l'équation (1) prend la forme

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + D'y + E'x = 0, \quad (10)$$
$$D' = 2Ay' + Bx' + D,$$
$$E' = 2Cx' + By' + E:$$

l'équation de la tangente à l'origine est

$$D'y + E'x = 0:$$

l'équation (7) devient alors celle du cercle osculateur, en y faisant

$$a = D', \quad b = E', \quad c = 0:$$

elle se réduit à

$$L(y^2 + x^2 + 2xy\cos\gamma) + M^2(D'y + E'x) = 0, \quad (11)$$

où

$$L = AE^2 - BDE + CD^2 + F(B^2 - 4AC), \quad M^2 = D'^2 - 2D'E'\cos\gamma + E'^2,$$
$$\alpha = \frac{M^2}{2L\sin^2\gamma}.(D'\cos\gamma - E'),$$
$$\beta = \frac{M^2}{2L\sin^2\gamma}.(E'\cos\gamma - D'),$$
$$R = \frac{M^3}{2L\sin\gamma};$$

α, β et R, sont les coordonnées du centre de courbure, et le rayon de courbure ; la construction de ces lignes ne souffre aucune difficulté et il est inutile d'entrer dans la discussion des divers cas particuliers.

On voit aussi que lorsque la conique est tracée, on peut, à l'aide des lignes conjointes, et avec le compas *seul*, trouver des normales, des tangentes, etc.

Les mêmes considérations peuvent servir à déterminer les normales, les plans tangents, les deux lignes, centres et rayons de courbure, dans les surfaces du second degré.
