JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

JOSEPH LIOUVILLE

Sur les deux derniers cahiers du Journal de M. Crelle

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 3 (1838), p. 1-3.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1838_1_3__1_0>

JOURNAL

DE MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

Sur les deux derniers cahiers du Journal de M. Crelle;

Par Joseph LIOUVILLE.

Ces deux cahiers renferment deux mémoires de M. Jacobi, écrits en allemand, et relatifs au calcul des variations et à la théorie des équations différentielles. L'importance du sujet et le nom de l'auteur nous ont engagés à faire traduire les mémoires de M. Jacobi, pour les insérer dans les prochains cahiers de notre Journal. Nous aurions bien voulu y trouver place aussi pour un mémoire de M. Plana, sur l'intégrale eulérienne de première espèce, et surtout pour deux articles très intéressants de M. Lejeune-Dirichlet. Mais cette satisfaction nous est refusée. Les lecteurs français seront donc obligés de recourir au journal même de M. Crelle pour prendre connaissance des recherches du géomètre de Berlin. Ils verront que l'auteur parle leur langue avec élégance et précision. Son premier mémoire a pour objet la démonstration de la convergence de la série $Y_0 + Y_1 +$ etc., dont les géomètres font usage dans la théorie de l'attraction des sphéroïdes.

Dans le second il s'occupe des séries

$$s = \Sigma_{i=0}^{i=p-1} \cos \frac{2i^2\pi}{p}, \quad t = \Sigma_{i=0}^{i=q-1} \sin \frac{2i^2\pi}{q},$$

où p est un nombre premier $4m+1$, et q un nombre premier $4m+3$. On démontre aisément les équations $s = \pm \sqrt{p}$, $t = \pm \sqrt{q}$; mais pour prouver que c'est le signe supérieur qui doit toujours avoir lieu, il faut recourir à des considérations très délicates, comme on le voit dans le mémoire de M. Gauss intitulé *Summatio quarumdam serierum singularium*. La méthode de M. Gauss consiste à transformer les sommes précédentes, ou plutôt les expressions générales, qui s'en déduisent en y remplaçant les nombres premiers p et q par un entier quelconque n, en produits de sinus d'arcs équidifférents, produits qui sont très faciles à évaluer et qui ne présentent plus aucune ambiguité de signe. M. Dirichlet s'est proposé d'obtenir d'une autre manière les valeurs exactes de s et t.

« Je suis parvenu, dit-il, au théorème suivant, qui comprend les » sommations précédentes :

» La somme de la série finie ou infinie

$$» \ \mathrm{F}(\alpha) = c_0 + c_1 \cos \alpha + c_2 \cos 2\alpha + \ldots,$$

» étant connue, on peut toujours exprimer au moyen de la fonc- » tion $\mathrm{F}(\alpha)$, les nouvelles séries

$$» \ c_0 + c_1 \cos 1^2 . \frac{2\pi}{n} + c_2 \cos 2^2 . \frac{2\pi}{n} + \ldots,$$

$$» \ c_1 \sin 1^2 . \frac{2\pi}{n} + c_2 \sin 2^2 . \frac{2\pi}{n} + \ldots,$$

» qui ont les mêmes coefficients que la précédente.

» Je me flatte que cette nouvelle manière de parvenir aux résultats
» si remarquables de M. Gauss pourra avoir quelque intérêt, l'histoire
» de la théorie des nombres nous montrant par de nombreux exem-
» ples, que c'est surtout dans cette partie de la science qu'il y a de
» l'avantage à envisager la même question sous des points de vue très
» différents. La méthode de M. Gauss était jusqu'à présent le seul
» moyen de vaincre la difficulté indiquée et qui consiste dans l'ambi-
» guité du signe. Celle que M. Libri a donnée, quoique très ingénieuse,
» ne paraît pas propre à résoudre cette difficulté, puisqu'elle fait dé-
» pendre les sommes cherchées d'une équation du second degré. Pour
» faire disparaître l'ambiguité que cette circonstance fait naître (*),
» le savant auteur a recours à l'expression transformée en produit,
» sans indiquer aucun moyen de parvenir à cette transformée. Mais ce
» passage de la somme au produit est à lui seul la question tout
» entière, puisqu'une fois effectué, il dispense de toute autre analyse,
» l'expression en produit étant du nombre de ceux qu'Euler a déter-
» minés depuis long-temps par les considérations les plus simples. »

(*) Voyez le *Journal de M. Crelle*, tome IX, page 187.