JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

AUGUSTE MIQUEL

# Sur quelques questions relatives à la théorie des Courbes

*Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série*, tome 3 (1838), p. 202-208.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1838_1_3__202_0>

## *Sur quelques questions relatives à la théorie des Courbes;*

PAR AUGUSTE MIQUEL,

Régent de Mathématiques à Nantua.

### I.

Lorsque deux cercles matériels sont mobiles autour de leurs centres, si la somme de leurs rayons $r$ et $r'$, est égale à la distance constante $k$ de leurs centres, les cercles peuvent tourner ensemble sans que la circonférence de l'un glisse sur la circonférence de l'autre; et alors les vitesses de rotation sont dans le rapport inverse de celui des rayons.

Cela posé, nous dirons que deux courbes en général sont *syntrépentes* (*), quand elles peuvent tourner simultanément autour de chacune des extrémités O et O′ (fig. 3), d'une distance OO′ constante que nous appellerons $k$, sans jamais cesser d'être tangentes entre elles, et sans qu'il y ait glissement; c'est-à-dire, de manière que les deux arcs des deux courbes HM, HM′, qui passent dans le même espace de temps par le point H de contact (point qui peut d'ailleurs être variable de position, mais toujours sur la même droite OO′), soient constamment égaux entre eux. Et il est facile de voir que quand deux courbes satisfont à cette condition pour deux points O, O′, relatifs à chacune d'elles,

1°. La somme des rayons vecteurs OM, O′M′, des points correspondants M et M′, est constante (et égale à $k$);

2°. Les angles formés par ces rayons vecteurs avec les tangentes menées aux points M et M′, sont toujours égaux deux à deux.

(*) de συν τρέπειν, tourner ensemble.

Pour exprimer analytiquement ces deux caractères que nous prendrons désormais pour définition des syntrépentes, désignons par $\omega = \varphi(\rho)$ et $\omega = \psi(\rho)$ les équations polaires des deux courbes rapportées aux points O et O′ pris respectivement pour origines. D'après ce qui vient d'être dit, en posant

$$\mathrm{OM} = \rho,\quad \mathrm{OM'} = \rho',\quad \mathrm{MOX} = \omega,\quad \mathrm{M'O'X} = \omega',$$

on aura

$$\frac{\rho d\omega}{d\rho} = \frac{\rho' d\omega'}{d\rho'},$$

ou bien

$$\rho\varphi'(\rho) = \rho'\psi'(\rho') :$$

ce qui, en observant que $\rho + \rho' = k$, remplaçant en conséquence $\rho$ par $(k - \rho')$, et supprimant dans le résultat l'accent de la variable $\rho$, revient à

$$\rho\psi'(\rho) = (k - \rho)\,\varphi'(k - \rho).$$

Cette équation entre deux fonctions peut donner lieu à deux questions principales : la première est de déterminer l'une des fonctions lorsqu'on connaît l'autre ; la seconde est de déterminer les deux fonctions en supposant qu'elles doivent satisfaire en même temps, et à l'équation obtenue, et à une condition particulière donnée. Je vais m'occuper de la première question.

## II.

Une courbe étant donnée, soit proposé de lui trouver une syntrépente par rapport à une droite OO′. Soit $\omega = \varphi(\rho)$ l'équation de la courbe rapportée au point O ; en représentant par $\psi(\rho)$ la fonction correspondante à la courbe cherchée rapportée au point O′, on aura, d'après ce qui a été dit,

$$\psi'(\rho) = \frac{k-\rho}{\rho}\,\varphi'(k - \rho);$$

et l'on pourra trouver la fonction $\psi(\rho)$ toutes les fois qu'on saura intégrer $\frac{k-\rho}{\rho}\,\varphi'(k-\rho)$. Ainsi l'équation de la courbe cherchée peut être représentée par

$$\omega = \int \frac{k-\rho}{\rho}\,\varphi'(k-\rho)\,d\rho + \text{const.}$$

La constante arbitraire semblerait indiquer qu'il y a plusieurs courbes qui satisfont à l'énoncé pour une même valeur de $k$; mais il est facile de voir qu'elle ne donne en réalité que les diverses positions d'une même courbe. On peut donc la supprimer, en ayant soin de faire correspondre deux positions convenables de la courbe donnée et de la courbe cherchée.

Soit pour exemple à déterminer la syntrépente d'une ellipse tournant autour d'un de ses foyers pris pour centre de rotation. Son équation est

$$\rho = a + \frac{c\rho\cos\omega - c^2}{a},$$

qui revient à

$$\omega = \operatorname{arc\,cos}\frac{a\rho - b^2}{c\rho},$$

d'où l'on tire

$$\varphi'(\rho) = \frac{d\omega}{d\rho} = -\frac{b}{\rho\sqrt{-b^2+2a\rho-\rho^2}}.$$

Par conséquent,

$$\varphi'(k-\rho) = -\frac{b}{(k-\rho)\sqrt{-b^2+2a(k-\rho)-(k-\rho)^2}};$$

et par suite, on aura pour équation de la courbe cherchée :

$$\omega = \int \frac{(k-\rho)\,\varphi'(k-\rho)}{\rho}\,d\rho = -\int \frac{b}{\rho\sqrt{c^2-(a-k+\rho)^2}}\,d\rho.$$

On pourrait déterminer la valeur de cette intégrale en commençant par la rendre rationnelle au moyen des procédés ordinaires; mais on peut l'obtenir plus simplement et sous une forme plus commode. Pour cela, observons que, d'après ce qui précède, on a évidemment

$$\int \frac{d\rho}{\rho\sqrt{-b^2+2a\rho-\rho^2}} = -\frac{1}{b}\operatorname{arc\,cos}\frac{a\rho-b^2}{\sqrt{a^2-b^2}\,.\,\rho},$$

et que pour passer de cette intégrale à la suivante,

$$\int \frac{d\rho}{\rho\sqrt{c^2-(a-k+\rho)^2}},$$

il suffit de changer $a$ en $(k-a)$, et $b^2$ en $(k-a)^2-c^2$. Opérant donc ce changement, et multipliant par $-b$, on trouve facilement

$$\omega = \frac{b}{\sqrt{(k-a)^2-c^2}} \text{ arc cos } \frac{(k-a)\rho-(k-a)^2+c^2}{c\rho},$$

équation qui détermine, pour la même ellipse, une infinité de syntrépentes différentes, correspondant aux diverses valeurs attribuées à $k$.

Par exemple, en faisant (fig. 4),

$$k = 2a,$$

on a une ellipse égale à la première, comme il est d'ailleurs facile de le prévoir *à priori.*

J'appellerai *isotrépente* une courbe qui, comme l'ellipse, aura pour syntrépente une courbe égale à elle-même.

Quant à l'équation générale des syntrépentes de l'ellipse, elle représente une famille de courbes faciles à construire pour chaque valeur de $k$, en observant que $\text{arc cos}\,\frac{(k-a)\rho-(k-a)^2+c^2}{c\rho}$ represente l'arc correspondant à un rayon vecteur quelconque d'une ellipse dont le grand axe serait $2(k-a)$ et l'excentricité $2c$. En désignant cet arc par $\omega_1$ et $\frac{b}{\sqrt{(k-a)^2-c^2}}$ par $m$, l'équation des syntrépentes de l'ellipse se réduira à

$$\omega = m\omega_1.$$

## III.

Une courbe étant donnée, on peut se proposer, comme cas particulier de la théorie précédente, de lui trouver une syntrépente dont tous ses points décrivent des droites parallèles entre elles. Pour cela il faut supposer $k=\infty$ dans l'équation générale des syntrépentes de la proposée, après avoir fait préalablement,

$$\rho = k - x \quad \text{et} \quad \omega = \frac{y}{k},$$

hypotheses qui rendent $\rho$ infiniment grand et $\omega$ infiniment petit, et ramènent la courbe cherchée à des coordonnées rectangulaires.

Prenant pour exemple de cette tranformation l'équation générale des syntrépentes de l'ellipse, trouvée plus haut, on obtient

$$y = b \,\text{arc} . \cos . \frac{a-x}{c},$$

ou

$$x = a - c . \cos \frac{y}{b};$$

ou enfin, en changeant de coordonnées,

$$x = c . \cos \frac{y}{b},$$

équation d'une *sinusoïde.*

## IV.

Pour en revenir aux syntrépentes en général, soient MN et RS (fig. 5), deux courbes syntrépentes par rapport aux centres O et O'. Considérons deux autres courbes, R'S' et M'N', la première syntrépente de MN, la seconde syntrépente de M'N'. Soient O'' et O''' les centres de rotation de ces nouvelles courbes, situés sur la droite OO', et soit H le point de contact commun de toutes les courbes. Il résulte de ces hypothèses que la courbe MN peut tourner simultanément avec la courbe RS sans cesser de lui être tangente, et sans qu'il y ait glissement entre ces courbes; qu'en même temps la courbe R'S' peut tourner en remplissant les mêmes conditions par rapport à la courbe MN, et qu'il en est de même de la courbe M'N' par rapport à RS. Il suit de là nécessairement que les courbes M'N', R'S', peuvent tourner simultanément sans cesser d'être tangentes, et sans qu'il y ait entre elles glissement; et qu'on peut en dire de même des courbes S'R' et SR. Donc les courbes M'N' et R'S' sont syntrépentes par rapport à la distance O'''O'', en même temps que les courbes RS et R'S' sont syntrépentes par rapport à la distance O'O'' (*). On peut donc conclure généralement de ce qui vient d'être dit :

Que, si deux courbes sont syntrépentes entre elles, chacune des syntrépentes de la première sera syntrépente de chacune des syntrépentes de la seconde; et que deux quelconques des syntrépentes de l'une d'elles seront intérieurement syntrépentes entre elles.

## V.

Cherchons encore, pour terminer, l'équation générale des courbes isotrépentes. Soit

$$\omega = \varphi(\rho)$$

l'équation d'une pareille courbe. On aura, d'après le n° I,

$$\rho\varphi'(\rho) = (k - \rho)\,\varphi'(k - \rho),$$

représentant toujours une quantité arbitraire, mais qui reste la même pour une même courbe. Faisons

$$\rho\varphi'(\rho) = \mathrm{F}(\rho);$$

$(k - \rho)\,\varphi'(k - \rho)$ deviendra $\mathrm{F}(k - \rho)$; et l'on aura

$$\mathrm{F}(\rho) = \mathrm{F}(k - \rho).$$

$\mathrm{F}(\rho)$ est donc une fonction symétrique de $\rho$ et de $(k - \rho)$, fonction

(*) Dans ce dernier cas, la distance des centres O', O'', est constamment égale, non à la somme, mais à la différence des rayons qui passent par le point de contact. Pour ne pas confondre, nous dirons que les courbes R'S' et RS sont syntrépentes *intérieurement*.

que nous représenterons simplement par F. On aura ainsi

$$\varphi'(\rho) = \frac{\mathrm{F}}{\rho};$$

et par suite, l'équation des courbes isotrépentes sera

$$\omega = \int \frac{\mathrm{F}}{\rho}\, d\rho + \text{const.}$$

A l'aide de cette équation on pourra trouver autant de courbes isotrépentes qu'on voudra, en prenant pour F une fonction symétrique quelconque de $\rho$ et de $k - \rho$.

L'équation polaire de l'ellipse peut se ramener à cette forme, en y faisant $k = 2a$; car elle revient à

$$\omega = -\int \frac{\frac{b}{\sqrt{-b^2 + \rho(2a - \rho)}}}{\rho}\, d\rho.$$