JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

ANATOLE DE CALIGNY

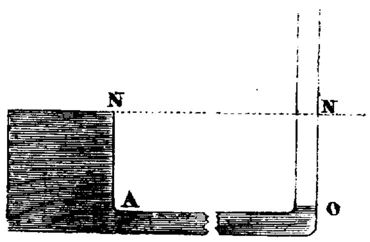
# Sur la Théorie des oscillations de l'eau dans les tuyaux de conduite

*Journal de mathématiques pures et appliquées 1^re^ série*, tome 3 (1838), p. 209-234.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1838_1_3__209_0>

## *Sur la Théorie des oscillations de l'eau dans les tuyaux de conduite;*

PAR ANATOLE DE CALIGNY.

1. Je suppose que du fond d'un réservoir à niveau constant N, on dérive horizontalement un tuyau de conduite à section constante, dont l'extrémité opposée se relève verticalement. Le tuyau horizontal est d'abord plein d'eau en repos jusqu'à la partie inférieure O de la portion verticale indéfiniment prolongée que je nommerai *tuyau d'ascension*: de ce point O partira l'oscillation que nous allons considérer. Le réservoir est d'ailleurs à niveau constant : je fais d'abord abstraction des résistances passives, frottements, etc.; je suppose le tuyau de conduite très long par rapport à la hauteur du niveau constant et du tuyau d'ascension. J'admets le parallélisme des tranches.




On sait qu'en vertu de la vitesse acquise depuis le point de départ jusqu'à la hauteur du niveau du réservoir, l'eau montera au-dessus de ce niveau. Commençons par déterminer d'une manière élémentaire l'équation des forces vives du système.

2. Il est évident que dans ce genre d'oscillation, comme dans les siphons, plus la colonne immobile au moment du départ sera longue,

plus la vitesse moyenne sera petite. Cette colonne étant très longue par hypothèse, la vitesse sera très petite. La pression du réservoir sur l'origine A du tuyau sera sensiblement constante et égale à la hauteur AN du niveau du réservoir au-dessus de l'origine. La force motrice, au moment du départ de la colonne oscillante sera mesurée par la hauteur ON du niveau du réservoir au-dessus du point O; mais elle ira sans cesse en diminuant en vertu de la pression résistante qui dans chaque élément du temps sera la hauteur d'eau pénétrée au-dessus du point de départ dans le tuyau vertical. Le diamètre du tuyau étant constant, je n'ai point à m'en occuper.

3. Au moment où l'eau arrivera à une hauteur donnée, la quantité de travail, développé depuis le point de départ, sera le produit du chemin parcouru, par la hauteur du réservoir au-dessus de ce point de départ, moins le produit de ce même chemin par une certaine pression résistante moyenne entre zéro et la hauteur effective de l'eau déjà pénétrée au-dessus du point de départ O; cette moyenne est la moitié de la hauteur effective. Pour le voir, il suffit suivant un mode de démonstration connu, de diviser cette hauteur en portions moindres que toute quantité donnée, et de remarquer que la pression résistante augmente comme les éléments d'un triangle dont la base est cette même hauteur effective.

Si donc nous appelons H la hauteur ON du réservoir au-dessus du point de départ, $h$ la hauteur effective obtenue par la colonne au-dessus de ce point de départ au moment que l'on considère, la quantité de travail moteur, moins la quantité de travail résistant développé jusqu'au même instant, sera représentée par

$$\mathrm{H}h - h \times \tfrac{1}{2}h = h \times \tfrac{1}{2}(2\mathrm{H} - h).$$

Considérons maintenant une droite double de H; partageons-la en deux segments $h$ et $2\mathrm{H} - h$. L'expression que nous venons de trouver est le produit d'un des segments de cette droite par la moitié de l'autre segment. Quand la hauteur atteinte est double de la hauteur H, la force vive trouvée est zéro et la colonne s'arrête. Sur cette hauteur 2H comme diamètre décrivons un demi-cercle. Le produit des deux segments considérés de ce diamètre, sera égal au carré de l'ordonnée correspondante du cercle. La force vive, que je définis égale à la différence des quantités de travail moteur et résistant développées avant l'époque que l'on considère, variera donc comme les carrés des ordonnées du demi-cercle. Il nous sera plus commode de dire qu'elle varie comme les cercles de la sphère du même diamètre, qui sont comme les carrés de ces mêmes ordonnées. J'emploie la définition de la force vive adoptée par M. Coriolis, parce qu'elle simplifie mes démonstrations.

4. La colonne liquide en mouvement étant supposée très longue et par conséquent d'une masse sensiblement constante, le carré de la vitesse variera comme les cercles de la sphère, et la vitesse elle-même, comme les ordonnées du grand cercle. Il est entendu qu'il ne s'agit pas tant ici d'avoir des valeurs absolues que d'en connaître l'ordre. Ces valeurs sont très faciles à déterminer dans tous les cas. Les vitesses dépendent de la longueur de la colonne oscillante; la force vive dépend du chemin parcouru et de la hauteur du niveau du réservoir au-dessus du point de départ, quand on fait abstraction des résistances passives. Il suffit pour s'en rendre compte, dans le cas d'une masse variable à laquelle on ne pourrait appliquer l'équation des forces vives, de bien saisir le cas où nous avons supposé la pression motrice constante sur l'origine à cause de la longueur de la colonne. L'inertie de la longue colonne horizontale, immobile au moment du départ, influe sur la vitesse moyenne jusqu'à ce que l'eau atteigne une hauteur donnée; mais cette hauteur étant une fois atteinte, l'inertie de cette longue colonne se trouve n'avoir pas changé la somme des forces vives accumulées le long du chemin. Voyez Carnot, rapport sur Manoury Dectot.

5. Il est cependant intéressant d'étudier le mode d'action des pressions dans les deux cas extrêmes; celui dont il a été question où la colonne immobile au moment du départ est très longue et celui où elle est très petite. Dans le premier cas nous avons deux choses à considérer, 1°. la pression venant immédiatement de la pesanteur, considérée soit comme résistance, soit comme puissance; 2°. la pression hydraulique de la colonne en mouvement dans le tuyau horizontal

en dessous de la colonne verticale. Quand la masse en mouvement n'a qu'une très petite vitesse; et c'est le cas d'une colonne très longue, la pression résistante provenant du poids de la colonne du tuyau d'ascension diffère très peu du poids effectif de cette colonne dans chaque élément du temps. Sa vitesse étant très petite, sa force vive ne la ferait monter que d'une très petite quantité si la force vive de la longue colonne qui pousse en arrière ne surmontait pas sa pression résistante. Ainsi, quand la colonne s'est élevée au-dessus du niveau, il faut admettre que la pression au point O est plus grande que la hauteur de ce niveau au-dessus de ce point; cette conséquence est confirmée par l'expérience suivante. Je pratique sur le tuyau de conduite, auprès du tuyau vertical, un orifice d'un diamètre petit relativement à celui de ce tuyau. Par cet orifice qui est en mince paroi, sort un jet d'eau qui sans être soutenu par des parois latérales, s'élève à de grandes hauteurs au-dessus du réservoir, avec la colonne oscillante. J'ai donné les détails du phénomène dans un autre mémoire, où je l'applique à des objets d'utilité publique.

6. Quand on établit l'équation des forces vives de ce système, il faut bien prendre garde que la pression sensiblement constante est celle du réservoir sur l'origine du tuyau et non sur l'extrémité O, point de départ de la colonne oscillante. Si vous fermez cette extrémité et que vous l'ouvriez après un certain temps de repos, même en faisant abstraction de toute espèce de résistances passives, la pression du réservoir sur cette extrémité est très peu de chose dans les premiers instants du mouvement. La force motrice est d'abord employée à vaincre l'inertie de la colonne. Les détails de l'expérience précédente éclaircissent ces principes, le jet d'eau vertical oscillant dans l'air libre, suit la colonne du tuyau d'ascension. Quand on ferme l'extrémité O, on a un jet d'eau ordinaire, qui cesse au moment où l'on ouvre cette extrémité, et ne se relève qu'avec la colonne oscillante. La pression sur le point O croît comme la hauteur de la colonne au-dessus de ce point, abstraction faite du jet d'eau.

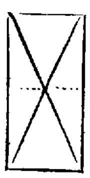
7. Je suppose maintenant que la longueur de la colonne immobile au moment du départ et l'inertie de l'eau du réservoir soient négligées : un des facteurs de la force vive, la masse, croîtra comme un des seg-

ments d'une ligne droite; l'autre diminuera donc comme l'autre segment ou comme les ordonnées d'un triangle, n° 3. Ce que les hydrauliciens nomment la *hauteur due à la vitesse*, serait au premier instant la hauteur du niveau du réservoir au-dessus du point du départ. Nous venons de voir qu'elle diminue comme les ordonnées d'un triangle. D'après le théorème de Bernouilli, la pression dans le mouvement permanent est la hauteur du réservoir moins la *hauteur due à la vitesse*. Sans donner plus de détails sur ce cas du mouvement oscillatoire, à cause de l'inertie de l'eau du réservoir que j'ai négligée, je conclus que dans le cas d'une colonne immobile au moment du départ, très courte, la pression moyenne supportée par les parois du tuyau d'ascension est bien moindre que dans le cas où cette même colonne était très longue. Je ne fais d'ailleurs cette observation que relativement à quelques phénomènes particuliers.

Entre ces deux cas extrêmes, celui où l'on néglige l'inertie des masses au moment du départ et celui où cette inertie est très grande à cause de la longueur de la colonne, se trouveront compris tous les cas de la pratique.

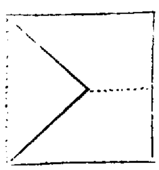
Quant à la pression dans le tuyau horizontal, elle dépend essentiellement des phénomènes de la pression hydraulique de la colonne en mouvement.

8. Nous savons déjà que la force vive varie comme les cercles d'une sphère, mais on verra combien il est commode de concevoir qu'elle varie comme les sections d'un système de figures terminées par des plans. Je vais d'abord donner une idée de ces transformations.



Il est facile de voir que les sections de la sphère varient comme celles d'un solide qui ressemble à une espèce de sablier formé par deux cubes dont on aurait ôté intérieurement deux pyramides quadrangulaires ayant chacune pour base une face d'un cube. Je prouve, par la simple transposition d'une pyramide, qu'elle varie aussi comme les éléments d'un solide assez élégant qui ressemble à la hache à double tranchant des anciens.

Coupez par la moitié les deux cubes, dont je parlais il y a un instant et formez-en deux prismes triangulaires dont la hauteur est double de celle d'un cube; placez-les face à face, de manière à ce qu'ils n'en forment qu'un de même hauteur, à base double. Retranchez-en deux pyramides quadrangulaires équivalentes à celles que j'avais retranchées des deux cubes pour avoir mon espèce de sablier. Ces pyramides retranchées ainsi sont opposées par la base au lieu de l'être par le sommet, et vous aurez le polyèdre dont je parle; une projection est composée de deux trapèzes, l'autre est un triangle rectangle et isoscèle. On peut lui donner une forme plus élégante, sans changer l'ordre de la variation des éléments. Chacune des moitiés symétriques peut être formée elle-même de quatre polyèdres symétriques; une projection est un hexagone à angles rentrants; l'autre est un losange. Mais il est inutile ici de le considérer sous cette forme; retranchons de l'autre forme deux pyramides triangulaires, plaçons-les (sans changer les distances de leurs sections à la base commune aux deux moitiés du polyèdre), sur les prismes qui restent, et nous retrouverons une figure formée par le reste de deux cubes dont on a ôté deux pyramides quadrangulaires.



En faisant varier l'angle des tranchants de cette espèce de hache, on ne changera pas l'ordre des variations des sections et le polyèdre sera équivalent à un ellipsoïde de révolution donné.

L'espèce de sablier, formé par la révolution d'un triangle rectangle et isoscèle autour d'un axe passant par le sommet de l'angle droit et parallèle à l'hypoténuse, est équivalent à une sphère, et ses sections normales à l'axe, sont équivalentes aux cercles de la sphère. Quand le triangle isoscèle n'a pas d'angle droit, il engendre une espèce de sablier, égal en volume à un ellipsoïde de révolution et les sections normales à l'axe sont équivalentes à celles de cet ellipsoïde.

Lorsqu'un trapèze, segment d'un triangle rectangle et isoscèle, tourne autour d'un axe, passant par son angle aigu et parallèle à la hauteur, il engendre un solide équivalent à un segment de sphère à deux bases, dont une est un grand cercle. Quand il tourne autour de la plus petite de ses deux bases parallèles, il engendre un solide équivalent à un segment de sphère à une base (sans que les sections varient de la même manière). La hauteur de ce segment est égale à celle du premier segment que j'avais considéré, etc.

Ces théorèmes et quelques autres sont très commodes dans le genre de recherches dont je m'occupe. Les démonstrations sont si simples, que je crois devoir les omettre.

9. En supposant le tuyau de conduite très large relativement à l'amplitude de l'oscillation, les théorèmes établis précédemment suffiraient à la rigueur pour déterminer le travail des résistances passives, proportionnelles aux premières et aux secondes puissances des vitesses, et les intégrales seraient fournies par l'expression du volume de la sphère, et par celle de l'aire du cercle. Mais je vais considérer les autres cas où le frottement est très puissant.

Commençons par étudier le mouvement d'une longue colonne liquide dans un tuyau horizontal croisé avec un tuyau d'ascension rectiligne, vertical, indéfiniment prolongé. En faisant d'abord abstraction des résistances passives, on trouverait que les forces vives varieraient comme les cercles d'une demi-sphère, à partir de l'époque où la colonne horizontale pénètre dans le tuyau d'ascension. Il suffit pour s'en rendre compte de voir qu'à partir de l'époque où l'eau de ma colonne oscillante, n$^{os}$ 1 — 5, était de niveau dans le tuyau et dans le réservoir, les choses se passaient comme si ce réservoir n'existant plus, ou avait eu simplement une colonne liquide dans un tuyau horizontal. On suppose les résistances passives indépendantes des pressions.

Nous connaissons ce que les hydrauliciens nomment le *coefficient du frottement proportionnel au carré de la vitesse moyenne dans le mouvement permanent.* Commençons par établir les formules du mouvement dont il s'agit comme si nous n'avions à tenir compte que de ce même *coefficient.*

11. Nous savons quelle serait la quantité de force vive suffisante pour qu'une colonne parvînt à une hauteur donnée, s'il n'y avait pas de résistance passive. Nous connaissons la loi de la variation des forces vives, et par suite quelle serait la quantité de travail nécessaire pour faire atteindre à l'eau la hauteur donnée dans l'hypothèse des résistances, en supposant cette quantité de travail fournie par un piston; mais il n'en est plus ainsi quand nous voulons substituer à ce piston fictif un surcroît de force vive, parce que ce surcroît de force vive occasionnerait lui-même un surcroît de frottement et ainsi de suite.

La quantité de force vive nécessaire pour suppléer à l'action de ce piston et faire monter la colonne à une hauteur donnée est donc exprimée par la somme des termes d'une série convergente.

D'après la définition de la force vive, n° 3, à un instant quelconque, la force vive doit être égale à la somme des quantités de travail de la pesanteur et de travail des résistances passives qui restent à vaincre. Le premier surcroît de force vive varie donc comme les volumes des segments d'une demi-sphère (n° 9).

12. Cette demi-sphère varie elle-même de sections comme un prisme triangulaire dont on ôte une pyramide quadrangulaire (n° 8). Les volumes des segmens du prisme triangulaire, considérés à partir de l'arète supérieure, varient comme leurs sections triangulaires ou comme les carrés des hauteurs de ces sections. Le solide dont les sections normales à sa hauteur varient comme les carrés des hauteurs dont il s'agit, est le cône ou la pyramide. Mais nous avons aussi à considérer les segments de la pyramide retranchée du prisme n° 8. Le volume de ces segments varie comme les cubes des hauteurs dont il s'agit : nous avons donc à trouver l'expression du volume du corps dont les sections normales à sa hauteur varient comme les cubes des distances au sommet. Cette expression est les trois quarts de celle du volume de la pyramide : je n'en donne pas la démonstration, qui se trouve dans tous les éléments de statique.

Nous savons donc déterminer le second surcroît de force vive nécessaire pour que la colonne atteigne une hauteur donnée, ou le second terme de la série. Si je veux déterminer les termes suivants pour l'expression desquels je pourrais me contenter en général d'avoir une approximation très grossière, je trouve des solides dont les sections varient comme les puissances quatrièmes, cinquièmes, etc., des distances au sommet, et j'approche de la vérité autant que je le désire. Il est entendu que les sections de chaque solide varieront comme une même puissance des hauteurs dont il s'agit.

Cependant je ne pousserai pas plus loin pour le moment cette approximation, parce que je n'ai pas de démonstrations élémentaires aussi simples pour déterminer les volumes des corps dont l'ensemble forme chaque terme de la série. Je me contente de dire que je peux trouver leurs volumes d'une manière assez approchée, par la géométrie élémentaire.

14. On a déjà vu combien il est utile de savoir que les sections de la demi-sphère varient comme celles d'un polyèdre dont une des projections est un trapèze, l'autre étant un triangle rectangle et isoscèle; on en va voir de nouveaux exemples.

Considérons toujours, comme nous venons de le faire, le mouvement d'une longue colonne d'eau dans un tuyau horizontal croisé avec un tuyau d'ascension. Proposons-nous de déterminer la forme générale de la courbe ayant pour ordonnées les forces vives à chaque hauteur obtenue par la colonne; nous savons que, s'il n'y avait pas de résistances passives, les ordonnées de cette courbe varieraient comme les sections d'une demi-sphère. La pression résistante de la pesanteur dans chaque élément du chemin parcouru, augmente avec la hauteur variable; mais les résistances passives diminuent quand la hauteur augmente, puisque la vitesse de la colonne diminue. Or, la force vive doit varier comme la somme des quantités de travail de la pesanteur et des résistances qui restent à vaincre. La véritable courbe des forces vives se rétrécit donc plus rapidement vers le sommet qu'une courbe de même hauteur dont les ordonnées varieraient comme les sections d'une demi-sphère.

15. La transformation précédente de la demi-sphère est très commode pour faire embrasser la marche des résultats. C'est un prisme triangulaire qui s'allonge graduellement vers son arête supérieure, n° 8, d'autant plus que l'on s'approche plus de cette arête. D'après le numéro précédent, la partie supérieure se raccourcit plus ou moins dans la forme modifiée en vertu des résistances passives.

16. Ces remarques sont immédiatement applicables; je suppose qu'on coupe le tuyau d'ascension à une certaine hauteur au-dessous de la limite que l'eau peut atteindre; la colonne versera par cette section : mais par la raison même que l'eau s'élèvera moins haut, il en sortira une plus grande quantité en vertu du principe des forces vives. Cette augmentation est accompagnée d'une augmentation du chemin parcouru par les frottements. Il s'agit de savoir si, dans le cas où le tuyau n'était pas coupé, la quantité de travail des frottements, pour ce qui restait de chemin à parcourir, était considérable relativement au reste

du travail des frottements, afin de déterminer la limite de la quantité dont ce versement peut en faire varier la somme totale. Or cela nous est donné immédiatement par la forme de la courbe des forces vives. On voit que plus le frottement est grand, plus la courbe se rétrécit rapidement vers le sommet et plus la portion rétrécie est petite relativement à la portion comprise au-dessous de la section de versement, en supposant d'ailleurs que le rapport de la hauteur de cette section, à la hauteur effective, dans le tuyau indéfiniment prolongé, soit toujours le même. Mais dans tous les cas, si l'on coupait le tuyau d'ascension très près du long tuyau horizontal, le chemin parcouru par le frottement serait considérablement augmenté. Le produit de l'eau versée par la hauteur du versement serait considérablement diminué. Je fais abstraction pour le moment de la force vive perdue en vertu de la vitesse de l'eau sortie; je suppose la colonne horizontale très longue par rapport à la colonne partielle sortie. D'ailleurs on peut supposer le tuyau évasé par le sommet, afin de négliger cette vitesse.

17. Je vais maintenant considérer une question qui semble d'abord différente: soit une colonne d'eau en mouvement dans un siphon dont les deux branches verticales se terminent à la même hauteur et dont une est assez évasée pour qu'on puisse négliger la perte de force vive provenant du versement; je suppose ce siphon complétement rempli d'eau, en mouvement vers la branche évasée, au premier instant que l'on considère; cela correspond au cas où une colonne oscillante du n° 1 rentre dans le réservoir de pression, après avoir déjà atteint dans sa descente le niveau de ce réservoir.

A mesure qu'en vertu de la vitesse (acquise par hypothèse d'une manière quelconque), la colonne liquide se transporte dans le sens du mouvement, l'eau baisse dans la branche non évasée. L'excès de hauteur de l'eau dans la branche évasée au sommet, augmente de plus en plus, quoique la hauteur n'augmente pas dans cette branche; cela revient au cas examiné dans les numéros précédents, où, dans un tuyau vertical indéfiniment prolongé, plus la colonne montait, plus la pression résistante augmentait; la résistance passive et le chemin qu'elle parcourait étaient les mêmes.

18. Dans tous les cas étudiés aux numéros précédens, on doit chercher l'influence de la longueur de la colonne sur la perte de force

vive au versement, quand l'évasement n'est point parfait. Il faut une quantité donnée de force vive pour qu'une hauteur donnée soit atteinte et qu'un certain versement soit effectué ; si un des deux facteurs, la masse, est très considérable, le produit de l'eau versée par la moyenne des carrés des vitesses sera bien moindre que si c'est l'autre facteur de la force vive qui est grand.

19. J'ai considéré la manière dont se dépense la force vive, en la supposant acquise d'une manière quelconque, jusqu'au moment où elle arrive à un tuyau d'ascension croisé avec un tuyau horizontal. Cela revenait au cas où une colonne oscillante étant arrivée au niveau du réservoir de pression, comme je l'ai dit n° 1, l'eau montait ensuite au-dessus de ce niveau en vertu de la vitesse acquise. Je reprends maintenant le cas de la figure de ce n° 1, afin de considérer le mode d'accumulation des forces vives, depuis le point de départ O jusqu'au niveau N, en tenant compte des frottements, supposés sensiblement indépendants des pressions et proportionnels aux forces vives, ou au produit du carré de la vitesse moyenne dans chaque élément du temps, par la longueur de la portion de tuyau remplie dans ce même élément. Il est entendu que c'est la seule espèce de frottement dont je m'occupe spécialement dans ce mémoire.

20. Nous savons que, s'il n'y avait pas de résistances passives, la force vive varierait comme les cercles d'une demi-sphère depuis l'origine du mouvement jusqu'à ce que l'eau arrive au niveau N; mais dans l'hypothèse de ces résistances, il y aura une tangente à cette courbe des forces vives, parallèle à l'axe du tuyau, avant que la colonne ait atteint le niveau. En effet, il y a une certaine époque où ce qui reste de force motrice est moins puissant que le frottement; le maximum de la vitesse a donc lieu avant que la colonne ait atteint le niveau.

Je suppose que l'on connaisse la force vive à l'époque où ce niveau est atteint; on sait, par hypothèse, pour une force vive donnée, quelle serait la hauteur d'une colonne d'eau, de même diamètre que le tuyau, dont le poids serait égal à la résistance du frottement, quand l'eau arrive au niveau. On peut la nommer *colonne du frottement au niveau.* La force vive étant déjà diminuée à cette époque, nous savons que, pour trouver successivement les ordonnées inférieures, il faut tenir compte de la quantité de force vive absorbée par le frottement entre deux ordonnées, et qui dépend elle-même de la grandeur de ces ordonnées. La surface de la portion de courbe, ainsi déterminée par approximation, entre le niveau et une profondeur donnée, servira à déterminer le travail du frottement dans cet intervalle; mais au lieu de faire ce calcul, on pourra souvent se contenter du moyen suivant, en négligeant la portion de travail du frottement, provenant du renflement de la courbe entre le niveau et le point, dont il s'agit d'abord de déterminer la profondeur, où la colonne arrive avec une force vive égale à ce qu'elle redeviendra quand cette même colonne atteindra le niveau. Cette omission sera tout à l'avantage de la conséquence que je veux établir à la fin de ce mémoire sur la nature des frottements dans les mouvements oscillatoires.

Étant donnée la hauteur de la *colonne du frottement au niveau*, on peut déterminer immédiatement une profondeur moindre que la profondeur cherchée; il suffit d'en prendre une double de la hauteur de cette colonne du frottement. En effet, si à cette profondeur on a déjà la même force vive qu'au niveau, la résistance moyenne depuis ce point jusqu'au niveau, sera plus grande que le poids de cette *colonne du frottement* et la force motrice *moyenne* sera égale à ce même poids dans le même intervalle. A cause du renflement de la courbe du frottement, nous savons que la profondeur cherchée est plus grande.

21. Considérons maintenant la loi de la variation des forces vives, depuis le point de départ O jusqu'à ce que la colonne parvienne au point dont je viens de parler; puisque la résistance passive augmente avec la vitesse, dans les premiers instants, où cependant la force motrice est la plus considérable, la résistance passive est d'abord très peu de chose relativement à cette force motrice. La courbe des forces vives effectives est tangente au point de départ à la courbe des forces vives dépouillées de l'effet des résistances: plus la colonne augmente de vitesse jusqu'au maximum de force vive, plus la résistance augmente, tandis qu'au contraire la force motrice diminue, plus par conséquent, la forme de la courbe des forces vives effectives s'éloigne de celle de l'autre.

22. On voit, n° 20, que, depuis la profondeur où la force vive atteint la valeur qu'elle conservera en arrivant au niveau, jusqu'à

ce niveau, après avoir été augmentée dans l'intervalle, il y a une différence plus ou moins grande entre l'aire de la portion de la courbe effective et celle d'une portion de courbe dont les ordonnées varieraient comme les cercles d'une demi-sphère, depuis le point de départ de l'oscillation jusqu'au niveau. Enfin, depuis le point de départ jusqu'à ce que la colonne atteigne la profondeur dont il s'agit, la courbe est plus renflée à son origine, que si ses ordonnées augmentaient aussi rapidement que les cercles d'une demi-sphère, dont le grand cercle serait la force vive effective, au moment où la colonne atteint le niveau n° 21. La courbe des forces vives effectives, pour l'époque où la colonne oscillante n'a pas atteint le niveau, recouvre donc tout entière une courbe, dont l'ordonnée maximum représenterait la force vive au moment où la colonne atteint le niveau et dont les autres ordonnées varieraient depuis le point de départ comme les cercles d'une demi-sphère; son aire est plus grande que celle de cette dernière courbe.

23. Après avoir donné une idée assez exacte des véritables formes de la courbe des forces vives, depuis le point de départ jusqu'au niveau et depuis ce niveau jusqu'à la limite de hauteur obtenue par la colonne, je vais donner une formule empirique exprimant les rapports entre chaque hauteur obtenue au-dessus du niveau et la profondeur de chaque point de départ. Au moyen de quelques représentations géométriques des lois de l'oscillation de l'eau dans les tuyaux de conduite, on saisira facilement l'ensemble des résultats de mes expériences et des lois qui en résultent.

Soit $x$ le rapport entre la hauteur obtenue au-dessus du niveau N et la profondeur du point de départ au-dessous; D le diamètre constant du tuyau; L la longueur ON du chemin parcouru dans le tuyau par la colonne oscillante depuis le point de départ jusqu'au niveau du réservoir; F un coefficient constant déterminé par l'expérience. Je suis parvenu à une formule empirique de la forme suivante, pour des tuyaux dont les dimensions étaient à peu près des moyennes entre les dimensions analogues des tuyaux dans lesquels Bossut a fait des expériences sur le mouvement uniforme de l'eau.

Je trouve $x = \frac{1}{\frac{L}{D}F + 1}$ : le tuyau d'ascension est rectiligne et indéfiniment prolongé; le tuyau horizontal est plein d'eau immobile au moment du départ. Il s'agit de voir par quelle hypothèse on peut représenter dans l'espace le principe sur lequel reposerait cette formule en supposant le coefficient du frottement constant.

24. Je suppose que malgré le frottement, la courbe des forces vives, depuis le point de départ jusqu'au niveau, varie à peu près comme les cercles d'une demi-sphère, je veux dire d'une figure dont les sections normales à l'axe varient selon les mêmes rapports. Je suppose que depuis l'époque où la colonne a dépassé le niveau, la force vive varie aussi à peu près comme les cercles d'une demi-sphère, appuyée sur le même grand cercle au niveau. La hauteur de ce dernier solide est la hauteur effective obtenue au-dessus du niveau par la colonne oscillante. Ces hypothèses ne sont pas admissibles quand le travail du frottement est considérable par rapport à celui de la pesanteur, mais il nous sera très commode de nous en servir provisoirement. Il résulte d'ailleurs des nos 14 et 22, qu'il y a, jusqu'à un certain point, compensation dans les deux erreurs provenant de ces hypothèses, dont nous savons déterminer le degré d'exactitude et sur lesquelles nous reviendrons.

25. Il est facile de calculer le travail nécessaire pour conserver les vitesses de la colonne oscillante comme s'il n'y avait pas de frottement, *en surmontant ce frottement au moyen d'un piston:* il suffit de connaître ce que j'ai nommé, n° 20, *la colonne du frottement* pour une force vive donnée. Si par exemple on la connaît pour la force vive qui aura lieu dans cette hypothèse à l'époque où la colonne atteindra le niveau, il suffira d'en prendre les $\frac{2}{3}$, puisque la moyenne des cercles d'une sphère est les $\frac{2}{3}$ du grand cercle, et de multiplier ce résultat par le chemin parcouru, depuis le point de départ jusqu'à ce que la colonne atteigne le niveau. Nous ne cherchons d'abord la quantité de travail résistant surmonté par le piston (toujours supposé sans frottement) que dans ces limites.

26. Si nous supprimons ce piston, par la raison même que les vitesses sont diminuées par le frottement, ce frottement est moindre.

Or, si nous supposons (n° 24) que la force vive, tout en étant moindre, varie encore à peu près selon les mêmes rapports que dans le cas du piston ; le rapport du travail effectif du frottement au travail du frottement que l'on aurait à vaincre avec le piston, sera exprimé par le rapport de la force vive effective de la colonne arrivant au niveau, à la force vive dépouillée de l'effet de la résistance passive, puisque le chemin est le même, et que le rapport des forces vives moyennes, auxquelles les résistances passives sont proportionnelles, est exprimé par celui dont il s'agit.

27. Soit $x'$ le rapport de la force vive effective de la colonne arrivant au niveau à la force vive dépouillée de l'effet du frottement ; $F'$ le rapport du travail effectif du frottement à la différence du travail moteur et du travail résistant de la pesanteur, depuis le point de départ jusqu'à ce que la colonne atteigne le niveau ; d'après la définition de la force vive adoptée par M. Coriolis, j'ai l'équation

$$x' = 1 - F'.$$

Soit $F''$ le travail surmonté par le piston, ce qui a été dit au n° précédent se traduit ainsi :

$$x'F'' = F', \quad \text{d'où} \quad x' = 1 - x'F'' = \frac{1}{F'' + 1}.$$

Or, je dis que dans l'hypothèse admise n° 24, ce serait aussi le rapport entre la hauteur obtenue au-dessus du niveau du réservoir et la profondeur ON du point de départ au-dessous.

28. Le rapport du travail du frottement, dans l'hypothèse de la conservation des vitesses au moyen du piston, au travail de la pesanteur, dans un tuyau d'un diamètre constant donné, est en raison de l'amplitude théorique de l'oscillation. En effet, le travail de la pesanteur est le produit de la force motrice moyenne par le chemin parcouru depuis le point de départ jusqu'au niveau. Le travail du frottement, dans l'hypothèse dont il s'agit, est comme le volume de la demi-sphère ayant pour rayon ce chemin parcouru. Ainsi le travail de la pesanteur est comme le carré du chemin parcouru, et celui du frottement comme son cube. Le rapport du travail du frottement au travail de la pesanteur est donc, dans l'hypothèse du frottement pro-

portionnel aux carrés des vitesses, en raison du chemin parcouru depuis le point de départ O jusqu'au niveau N.

Si l'on considère le travail résistant de la pesanteur au-dessus du niveau, on trouvera le même rapport entre le travail du frottement que surmonterait le piston pour conserver les vitesses au-dessus du niveau, et ce travail résistant de la pesanteur; je veux dire que ce rapport sera proportionnel au chemin parcouru depuis le niveau jusqu'à la limite de l'amplitude.

29. Mais si pour conserver ces vitesses, on veut substituer un surcroît de force vive à l'action du piston, ce surcroît sera plus grand nécessairement que le travail surmonté par le piston, d'après les définitions dont je me sers. S'il lui était seulement égal, il occasionnerait lui-même un surcroît de frottement qui exigerait un second surcroît de force vive, et ainsi de suite. On trouverait une série convergente, n° 12.

Mais si chaque surcroît de force vive variait au-dessus du niveau, selon les mêmes rapports que les cercles d'une demi-sphère, en un mot si la force vive totale variait selon ces mêmes rapports, n° 24, chaque surcroît serait un terme de progression géométrique, dont la raison serait le rapport du premier terme, ou premier surcroît de force vive, à la force vive suffisante s'il n'y avait pas de frottement pour que la hauteur voulue fût atteinte.

Soit $\frac{1}{m}$ le rapport du premier surcroît à cette force vive, suffisante s'il n'y avait pas de frottement, quand la colonne arrive au niveau. Dans les hypothèses précédentes, cette dernière force vive devrait être multipliée par la somme des termes de la progression

$$1 + \frac{1}{m} + \frac{1}{m^2} + \frac{1}{m^3} \cdots\cdots$$

30. Je suppose, comme je l'ai dit (n° 27), le rapport de la hauteur effective au-dessus du niveau à la profondeur ON du point de départ égal à $\frac{1}{F'' + 1}$. Le rapport du travail qu'un piston aurait à surmonter, pour conserver les vitesses, comme s'il n'y avait pas de frottement, au travail résistant de la pesanteur (l'un et l'autre considérées dans le système depuis que la colonne a atteint le niveau) serait $\frac{F''}{F'' + 1}$ (n° 28).

La force vive effective, suffisante, s'il n'y avait pas de frottement, pour que la hauteur $\frac{1}{F''+1}$ fût obtenue, serait $\frac{1}{(F''+1)^2}$ de la force vive dépouillée de l'effet du frottement, au-dessous du niveau, puisqu'elle serait comme le grand cercle du rayon $\frac{1}{F''+1}$ égal à la hauteur effective. Je suppose que l'on remplace la quantité de travail du piston, considérée depuis que le niveau est atteint, par une quantité égale de force vive, celle-ci sera $\frac{F''}{F''+1}$ de celle qui vient d'être trouvée. Dans l'hypothèse du n° 29, l'expression $\frac{1}{(F''+1)^2}$ devra être multipliée par la somme des termes d'une progression géométrique décroissante, on aura $\frac{1}{m} = \frac{F''}{F''+1}$, cette somme sera $\frac{1}{1-\frac{F''}{F''+1}}$ ou $F''+1$. Multipliant par cette somme l'expression suffisante quand la colonne arrive au niveau, s'il n'y avait pas de frottement, on a $\frac{1}{(F''+1)^2} \times (F''+1) = \frac{1}{F''+1}$ de la force vive dépouillée de l'effet du frottement au-dessous du niveau. Or c'est précisément l'expression que nous avons trouvée pour la force vive effective au niveau, n° 27, ce qu'il fallait démontrer. Le rapport entre la hauteur obtenue au-dessus du niveau et la profondeur du point de départ est donc $\frac{1}{F''+1}$.

D'après ce que nous avons dit, n° 28, la quantité $F''$ est en raison de $\frac{L}{D}$; nous avons donc pour sa valeur une expression de la forme $\frac{L}{D}F$, ce qui nous conduit à l'équation $x = \frac{1}{\frac{L}{D}F+1}$, formule empirique du (n° 23).

31. L'hypothèse sur laquelle repose cette formule, n° 24, n'est pas rigoureuse, mais la discussion précédente n'en est pas moins utile: elle fait voir, d'une manière élémentaire, par quelle représentation géométrique dans l'espace, on peut exprimer l'hypothèse dont il faudrait partir pour parvenir à cette formule, en supposant le coefficient constant.

32. Avant d'aller plus loin, je vais montrer, dans l'hypothèse du

n° 24, au moyen des expériences connues sur le mouvement de l'eau dans les tuyaux de conduite, quelle serait la valeur du coefficient, supposé constant F, si l'ordre des vitesses des filets considérés les uns par rapport aux autres et la nature du frottement qui résulte de cet ordre, étaient les mêmes dans les mouvemens oscillatoires que dans les mouvemens permanens, pour une même vitesse moyenne dans le même élément de l'espace et du temps. Les vitesses moyennes étant supposées un peu grandes, je me propose d'établir une formule au moyen de laquelle je puisse prouver que le frottement est moindre dans les mouvements oscillatoires que dans les mouvements permanents. Je dois donc me servir d'une des expériences employées dans les Tables de M. de Prony, qui donneraient le moindre coefficient du frottement. Cette expérience réunissant d'ailleurs toutes les conditions nécessaires, a été faite par Bossut, dans un tuyau de 2 pouces de diamètre et de 180 pieds de long, qui absorbait par son frottement les $\frac{27}{28}$ de la hauteur du réservoir au-dessus de l'orifice de sortie, c'est-à-dire 27 fois la *hauteur due* à la vitesse moyenne de sortie.

Soit $L = 10$ pieds, le tuyau d'ascension ayant par hypothèse le même diamètre que la conduite. D'après ce qui a été dit au commencement du Mémoire, n° 7, s'il n'y avait pas de résistance passive et que l'on fît abstraction de l'inertie de la colonne immobile dans les tuyaux au moment du départ, comme si l'on avait un simple tuyau rectiligne enfoncé verticalement dans un réservoir, ce que les hydrauliciens nomment dans tous les cas *la hauteur due* à la vitesse de la colonne, à l'instant où elle atteindrait le niveau, serait $\frac{1}{2}$ L ou 5 pieds; mais si le tuyau a, depuis le réservoir jusqu'à ce point, où il coupe la ligne de niveau, une longueur développée de 180 pieds, la force vive étant cependant, n° 4, la même quand la colonne arrive à ce point, *la hauteur due* à la vitesse ne sera que $\frac{1}{18}$ de 5 pieds. La longueur du tuyau, relativement à l'amplitude de l'oscillation, étant assez grande pour que la vitesse varie à peu près comme si la masse oscillante était constante, la moyenne *des hauteurs dues* aux vitesses variables sera les $\frac{2}{3}$ de $\frac{5}{18}$ pieds, puisque la moyenne des cercles d'une sphère est les $\frac{2}{3}$ du grand cercle. Elle sera donc $\frac{5}{27}$ pieds. Or, la pression moyenne qui serait nécessaire, dans l'hypothèse du frottement, pour maintenir, au moyen d'un piston, ces vitesses comme s'il n'y avait pas de frottement, diffère peu du poids d'une colonne d'eau de même diamètre que le tuyau et ayant 27 fois la hauteur moyenne $\frac{5}{27}$ pieds que je viens de trouver. Cette résistance moyenne serait donc exprimée par 5 pieds. La force motrice moyenne, depuis le point de départ de l'oscillation jusqu'à ce que la colonne arrive au niveau, est la moitié de la hauteur 10 pieds que le niveau du réservoir avait au-dessus de la tête de la colonne ascendante au moment du départ. Dans ce cas où $\frac{L}{D} = 60$, le travail résistant, surmonté par le piston, se trouve précisément égal au travail de la pesanteur; on a donc $\frac{L}{D}F = 1$ et $x = \frac{1}{2}$.

33. Quand le tuyau d'ascension n'a pas le même diamètre que le tuyau de conduite, il faut en tenir compte; mais je néglige pour un moment la résistance passive du tuyau d'ascension. Le travail de la pesanteur, depuis le point de départ jusqu'au niveau, est comme la section du tuyau d'ascension ON. La force vive moyenne serait donc proportionnelle à cette section s'il n'y avait aucune résistance passive; mais par cette raison le travail qui serait nécessaire pour maintenir avec un piston les vitesses, comme s'il n'y avait pas de frottement proportionnel aux forces vives dans le tuyau de conduite horizontal, serait, en supposant ce tuyau de conduite très long, et faisant pour un moment abstraction du frottement dans le tuyau d'ascension, comme le produit de cette section par le chemin parcouru dans la longue conduite, ou comme le carré de cette section. Le rapport de ce travail au travail de la pesanteur est donc en raison du rapport de la section du tuyau d'ascension à celle de la conduite. Il suffit, pour en tenir compte, de convenir que L est, dans tous les cas où le tuyau d'ascension est rectiligne, le *chemin parcouru* dans le long tuyau de

conduite, depuis l'époque du départ jusqu'à ce que la colonne coupe le niveau. Nous retrouvons ainsi, pour le cas où le frottement dans le tuyau d'ascension est négligeable, la formule $x = \frac{1}{\frac{L}{D}F + 1}$.

Quand le frottement dans le tuyau d'ascension ne pourra pas être négligé, on en tiendra compte en le supposant, comme à l'ordinaire, en raison inverse des cinquièmes puissances des diamètres. Pour le cas des tuyaux de zinc d'un petit diamètre, assez difficile à déterminer exactement dans l'intérieur, il serait inutile de chercher rigoureusement quelle longueur moyenne de tuyau d'ascension on doit prendre pour y avoir égard dans les calculs. Je prendrai tout simplement la moitié de la longueur qui se trouvera remplie en définitive par l'amplitude effective totale. Cette longueur m'était immédiatement donnée par l'expérience, mais il serait facile, si cela était nécessaire, de la trouver par quelques opérations numériques. Il est entendu qu'il s'agit du cas où le tuyau commence à se rétrécir au point de départ O de l'oscillation, le diamètre rétréci étant d'ailleurs constant. Dans la formule, on multipliera F par un coefficient relatif au rapport des diamètres et à cette moyenne comparée à la longueur de la conduite.

34. Dans ce qui précède, j'ai seulement tenu compte du rapport du chemin parcouru au diamètre, sans faire entrer dans la formule la longueur du tuyau de conduite. Si ce tuyau est plus long, les surfaces frottantes sont, il est vrai, plus grandes, mais la moyenne des carrés des vitesses est moindre, comme nous l'avons vu, de façon que cela fait compensation relativement au calcul des frottements. Il se présente même un résultat assez intéressant : quand il y a un coude brusque, un rétrécissement, ou une cause quelconque assez sensible de déviations brusques de filets, plus le tuyau de conduite est long, plus la colonne oscillante s'élève haut dans un même tuyau d'ascension, pour une même profondeur ON du point de départ. Le seul cas où il serait désavantageux d'allonger outre mesure le tuyau de conduite, est celui où, par suite de cet allongement, relativement à une hauteur donnée du réservoir au-dessus du point de

départ de l'oscillation, la moyenne des carrés des vitesses serait au-dessous de la valeur pour laquelle il serait trop inexact de ne compter que sur le terme de la résistance proportionnelle aux carrés des vitesses. Plus le tuyau est long, plus la vitesse avec laquelle se fait un choc est petite dans la limite du chemin parcouru; cela explique le fait dont il s'agit. On tiendra compte en général de ce choc ou des déviations, quand la colonne sera sensiblement constante, en multipliant F par l'unité plus un coefficient en raison inverse du rapport de la longueur au diamètre.

35. Les résultats de la formule précédente sont conformes à un grand nombre d'expériences que j'ai faites sur des tuyaux de zinc, dont le diamètre intérieur était à peu près une moyenne entre les diamètres 16 lignes et 2 pouces, employés par Bossut, dans ses expériences sur le mouvement permanent. Les longueurs variant de 100 à 150 pieds, peuvent être aussi regardées comme des moyennes entre les longueurs employées par Bossut. Je ne donnerai pas ici le détail de ces expériences; on les trouvera dans des recueils spéciaux. Je dirai seulement que la formule empirique $x = \frac{1}{\frac{L}{D}F + 1}$ ne donne pas des résultats trop forts, au moins depuis $\frac{L}{D} = 10$ jusqu'à $\frac{L}{D} = 90$.

Dans le cas où le tuyau d'ascension avait un pouce de diamètre, depuis le point de départ O jusqu'à la limite de l'oscillation, on en tenait compte, n° 33. Les résultats de la formule ainsi modifiée n'étaient pas supérieurs à ceux des expériences, je néglige par prudence des quantités qui peuvent provenir de quelque erreur dans la mesure des diamètres. Dans le calcul qui va suivre, je vais seulement m'occuper des cas où l'on peut négliger le frottement dans le tuyau d'ascension.

36. Quand la longueur du chemin parcouru dans le grand tuyau de conduite est petite relativement à son diamètre, les hypothèses du n° 24, sur lesquelles on peut établir la formule, diffèrent peu de la vérité, parce que les formes des courbes ayant pour ordonnées les forces vives, diffèrent peu de ce qu'admettent ces hypothèses, d'ailleurs les erreurs se compensent jusqu'à un certain point n° 24.

57. Ce qui précède nous apprend déjà que pour les amplitudes peu considérables par rapport au diamètre, la somme des coefficients des résistances passives n'est pas sensiblement plus grande que le coefficient du frottement proportionnel aux carrés des vitesses moyennes ordinaires dans les mouvements permanents. Or, cette somme de résistances comprend non-seulement ici ce genre de frottement, mais un genre de résistances particulier aux petites vitesses qui succèdent à l'état de repos de la colonne oscillante. J'ai traité cette question dans un Mémoire qui commence le t. XIII des *Annales des Mines*. La somme des résistances comprend aussi celle d'un coude à angle droit vif, d'un diamètre moindre que la conduite, et quelques autres causes de perte de force vive, dont je parlerai dans un autre mémoire. Le coefficient de la résistance du frottement proprement dit est donc moindre que dans le mouvement permanent, pour mes oscillations d'une petite amplitude, puisqu'il suffit pour expliquer le déchet.

Quant à celles dont les amplitudes sont grandes, la compensation, dont j'ai parlé au numéro précédent, n'est plus évidente au-delà de certaines limites. Mais quand $\frac{L}{D}$ ne surpasse pas 60, les méthodes exposées n° 12 et n° 27, suffiraient pour faire voir que dans mes oscillations le coefficient du frottement dont il s'agit, ne peut pas être sensiblement plus grand que dans les mouvements permanents.

On peut approcher de la vérité d'une manière plus rigoureuse et très simple. Puisque les sections de la demi-sphère varient comme celles d'un prisme triangulaire qui s'allongent à mesure que l'on s'éloigne du centre n° 15, le volume d'un segment quelconque de sphère à une base, est plus grand que le produit de cette base par la moitié de la hauteur de ce segment. Cela est vrai, à plus forte raison, n° 22, pour les segmens de la figure modifiée, au-dessous du niveau N en vertu du frottement. La profondeur au-dessous du niveau N, à laquelle la colonne ascendante arrivera, quand elle aura la quantité de force vive, qu'elle doit conserver en coupant ce niveau, est plus grande, n° 20, que le double de la hauteur de la *colonne du frottement au niveau*. La surface d'un trapèze dont la grande base sera L, pour un système d'un diamètre constant, la petite base le double de la hauteur de la *colonne du frottement au niveau*, et dont la hauteur sera simplement celle de cette dernière colonne, exprimera l'intégrale du travail du frottement au-dessous du niveau, en négligeant les portions de courbes retranchées par les lignes droites. Pour mes grandes oscillations, cette aire sera plus grande que celle que j'ai fait entrer dans l'équation du n° 27. En refaisant le calcul du travail du frottement au-dessous du niveau avec cette correction et en calculant le travail au-dessus du niveau par la méthode d'intégration exposée n° 12, on trouve que le frottement proportionnel aux forces vives. suffit pour expliquer assez sensiblement le déchet, malgré les renflements des courbes que j'ai négligés. Le coefficient de ce frottement est donc moindre dans toutes ces oscillations que dans les mouvements permanents, puisqu'il y a encore d'autres résistances.

On conçoit qu'au-delà d'une certaine limite d'amplitude, le chemin parcouru, avec une vitesse presque permanente, aux environs du maximum, étant considérable, la nature du frottement doit se rapprocher plus ou moins de celle du frottement dans les mouvements permanents.

Je me contente ici de donner d'une manière succincte un moyen, reposant sur la Géométrie élémentaire, d'établir une loi immédiatement applicable au calcul de l'effet des machines hydrauliques, dont un grand nombre ne sont autre chose, selon moi, que des colonnes oscillantes plus ou moins gênées par des obstacles.

Je n'entrerai pas ici dans le détail des formes plus ou moins intéressantes sous lesquelles se présentent les lois des oscillations de l'eau dans les tuyaux de conduite. Je dirai seulement que l'étude de la forme de la courbe des forces vives ne doit pas simplement être considérée comme un moyen d'intégration. On en va voir deux exemples.

38. Quand il y a des résistances passives, on ne peut plus supposer comme le fait avec raison M. Navier pour le cas où il n'y a pas de frottement, qu'il faut commencer à rétrécir le tuyau d'ascension à la hauteur du niveau, pour obtenir, avec un diamètre rétréci donné, le maximum de hauteur. Ce fait s'explique tout naturellement; dans

le cas des résistances, le maximum de la force vive a lieu avant que la colonne atteigne le niveau. La recherche de la profondeur à laquelle on doit commencer ce rétrécissement sera utile dans les applications.

Je suppose que la portion du tuyau d'ascension, comprise entre le point de départ et le niveau, soit plus grosse que la conduite, ou que, sans être plus grosse, elle soit inclinée, afin que la force motrice moyenne ait une plus grande longueur de chemin à parcourir. S'il n'y a pas de frottement, la force vive emmagasinée au moment où la colonne atteint le niveau est plus grande, ce chemin étant ainsi augmenté. Mais quand il y a du frottement, après être parvenue à une certaine distance du niveau, la colonne ne peut plus que diminuer de force vive. Ainsi, passé ce point, au lieu d'augmenter le chemin parcouru jusqu'au niveau, il faut le diminuer autant que possible, en ayant égard aux contractions de veines fluides, etc. et au frottement du tuyau d'ascension, afin d'obtenir dans ce tuyau le maximum de hauteur.

39. Parmi les formes sous lesquelles se présentent dans mes expériences les lois du frottement, il y en a plusieurs faciles à expliquer par ce qui précède et cependant assez intéressantes, par exemple :

1°. Quand tout le tuyau d'ascension est rétréci à partir du point O, l'eau partant du repos, et par conséquent *sans coup de bélier primitif*, s'élève plus haut que dans le tuyau d'ascension non rétréci, ou si on la fait verser à la même hauteur dans les deux cas, elle redescend plus bas dans le tuyau d'ascension rétréci que dans l'autre. On suppose le tuyau de conduite très long, afin de négliger autant que possible le frottement du tuyau d'ascension et la perte de force vive résultant du changement de diamètre. On conçoit d'ailleurs que le diamètre du tuyau d'ascension ne doit pas être excessivement petit.

2°. Quand on commence à rétrécir le tuyau d'ascension à la hauteur du niveau, il y a un coup de bélier et l'eau monte évidemment plus haut que dans le tuyau d'ascension non rétréci au niveau; or à cause de la modification du travail des frottements, le produit de la quantité d'eau soulevée au-dessus du niveau, par la hauteur de son centre de gravité au-dessus de ce même niveau, est augmenté en vertu du rétrécissement, comme si le rétrécissement avait augmenté la force vive au lieu d'en détruire par une contraction quelconque, etc., etc.

40. Je ne m'arrêterai pas davantage sur ces détails relatifs à des machines particulières. Mon principal but est de faire voir que dans les mouvements oscillatoires d'une certaine amplitude et d'une certaine vitesse, le coefficient du frottement, proprement dit, est moindre que dans les mouvements permanents, qu'au moins il n'est jamais plus grand; aussi dans les expériences que j'ai faites aux bassins Saint-Victor sur de *rapides* oscillations dans les tuyaux rectilignes, j'ai trouvé le coefficient de la somme des résistances moindre que dans les expériences objet de ce Mémoire; mais je ne peux pas en donner ici le détail; elles sont d'une espèce toute particulière.

Les autres termes de la résistance des parois peuvent être déterminés par des méthodes élémentaires fournies aussi par la Géométrie. On les trouvera en partie, ainsi que mes recherches sur les siphons, dans les *Annales des Mines*, tome XIII. Je préviens que l'hypothèse de la conservation des vitesses au moyen d'un piston, ne pourrait pas servir *dans la pratique* à estimer le travail nécessaire pour cette conservation, comme je l'ai supposé ici seulement, pour simplifier des explications. On verra comment j'ai tiré parti des expériences de Dubuat et d'Eytelwein. Les expériences de Dubuat sur les siphons n'étaient peut-être pas faites assez en grand pour en conclure si le frottement est ou n'est pas influencé par les pressions; plusieurs de mes oscillations ont eu jusqu'à 5 et 6 mètres d'amplitude, et je n'ai rien vu qui ne soit conforme à l'opinion de Dubuat sur l'indépendance du frottement relativement aux pressions, confirmée aussi par les expériences de M. Leroy et de M. Gueymard sur le mouvement permanent dans des conduites en siphon.

Je suppose d'après cela que chaque tranche isolée, frappant par sa circonférence une couronne d'aspérités des parois, perde une quantité de force vive proportionnelle à celle qu'elle avait en arrivant au choc, la vitesse d'une couronne liquide étant *interceptée*, quant à sa composante immédiatement utile au transport de l'eau. Dans un mouvement permanent, chaque tranche qui arrive au point de versement d'un tuyau a frappé le même nombre d'aspérités, elle aura donc nécessité, pour conserver sa vitesse permanente, une quantité de travail proportionnelle au carré de cette vitesse. La *hauteur due* à la vitesse moyenne de sortie est donc, ce qui est conforme à l'expérience pour les vitesses ordinaires, la différence entre la hauteur du réservoir et une hauteur proportionnelle au carré de cette vitesse, en supposant le carré de la vitesse moyenne peu différent de la moyenne des carrés des vitesses.

Cependant, d'après divers auteurs, la résistance, proportionnelle au carré de la vitesse, provient de ce que le nombre de molécules est proportionnel à la vitesse, et de ce que la résistance de chaque molécule, relativement au choc ou à l'adhérence, est selon eux simplement proportionnelle à la promptitude de l'arrachement. Mais alors le travail de la résistance serait seulement proportionnel au produit de l'eau passée, par sa vitesse moyenne. Pour les oscillations d'une même colonne, dans le long tuyau de conduite, le travail du frottement à chaque oscillation serait comme le produit de l'amplitude par la vitesse moyenne. Or, si l'on conservait ces vitesses avec le piston, elles varieraient comme les ordonnées d'un cercle ayant l'amplitude pour diamètre. L'intégrale du travail de ce frottement serait donc comme l'aire de ce cercle, au lieu d'être comme le volume de la sphère du même diamètre; le travail de la pesanteur, n° 28, est aussi comme le carré de ce diamètre; le rapport de la hauteur effective au-dessus du niveau, à la profondeur ON du point de départ, quand on supprime l'hypothèse du piston, ne dépendrait donc pas de la grandeur de l'amplitude. J'ai fait voir par des considérations rationnelles dans mon premier Mémoire (*Annales des Mines*, tome XIII), que le coefficient du frottement doit augmenter, il est vrai, avec l'amplitude dans un même tuyau, mais seulement dans certaines limites. Mes expériences fournissent donc un nouveau moyen de décider la question. C'est bien des phénomènes du choc des fluides que dépend le terme de la résistance des parois, proportionnel aux carrés des vitesses des fluides dans les conduites, et ce sont les autres termes qui se trouvent expliqués par les divers phénomènes de l'adhérence. La colonne liquide est ainsi en vibration, même indépendamment des phénomènes découverts par M. Savart, et qui se retrouvent d'ailleurs, au moins jusqu'à un certain point, dans mon jet d'eau oscillant dans l'air libre.