JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Nouvelles recherches sur la détermination des intégrales dont la valeur est algébrique

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 3 (1838), p. 20-24.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1838_1_3__20_0>

NOUVELLES RECHERCHES

Sur la détermination des intégrales dont la valeur est algébrique ;

PAR J. LIOUVILLE (*).

On nomme fonction algébrique d'une variable indépendante x toute fonction y qui peut être regardée comme la racine d'une équation de la forme

$$(1) \qquad y^\mu - \mathrm{L}y^{\mu-1} - \ldots - \mathrm{M}y - \mathrm{N} = 0,$$

L, ... M, N étant des polynomes entiers ou des fractions rationnelles en x. Cette équation est *irréductible* quand son premier membre n'est divisible par aucun polynome de même forme que ce premier membre, mais de degré inférieur à μ par rapport à y. Dire qu'une fonction algébrique est donnée, c'est dire que l'on possède l'équation irréductible (1) qui la détermine, ou du moins un ensemble de formules d'où l'on pourra, s'il est nécessaire, conclure cette équation par des calculs plus ou moins longs.

Je désignerai par z l'intégrale $\int y dx$ de la fonction algébrique y. Comme cette intégrale est, suivant les cas, algébrique ou transcendante, il était bon d'avoir une méthode certaine pour décider si la quantité z est exprimable ou non en termes algébriques, et pour en trouver la valeur lorsque la dernière hypothèse a lieu. Cette méthode, que je crois avoir donnée le premier, est consignée dans mes deux mémoires sur *la détermination des intégrales de valeur algébrique*.

(*) Quelques personnes m'ont engagé à reproduire ici cet article qui a déjà paru dans le *Compte rendu de l'Académie des Sciences* (séance du 28 août 1837).

dont l'Académie, sur le rapport de M. Poisson, a bien voulu ordonner l'insertion dans le *Recueil des Savans étrangers* (*).

Elle se compose de deux parties distinctes. Je considère, en premier lieu, les intégrales rationnelles d'un système d'équations différentielles linéaires d'un ordre quelconque, à coefficients rationnels; et je fais voir comment on peut trouver ces intégrales quand elles existent, ou du moins démontrer qu'elles n'existent pas. En second lieu, je prouve que la valeur de z, si elle est algébrique, se ramènera toujours à la forme

$$z = \alpha + \beta y + \gamma y^2 + \ldots + \lambda y^{\mu - 1},$$

$\alpha, \beta, \gamma, \ldots \lambda$ étant des fonctions rationnelles de x, liées à cette variable par un nombre égal d'équations différentielles linéaires. Tout se réduit donc à chercher, par le procédé dont on a parlé plus haut, les intégrales rationnelles de ces équations linéaires : s'il n'existe pas de telles intégrales, la quantité z ne sera exprimable par aucune fonction algébrique de x, et, dans le cas contraire, pour obtenir z, il suffira de déterminer $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \lambda$.

La méthode que je viens de rappeler en peu de mots ne laisse rien à désirer sous le rapport de la rigueur; mais, dans la pratique, elle est susceptible de quelques simplifications que je me propose d'exposer ici, sans sortir néanmoins du cercle des généralités.

1°. D'abord, il existe un moyen très simple de former les μ équations différentielles linéaires qui déterminent les μ inconnues $\alpha, \beta, \gamma \ldots \lambda$, en fonction de x. Toutes ces équations se déduisent en effet de la formule

$$\mathrm{S}_{m+1} = \mathrm{S}_m \frac{d\alpha}{dx} + \mathrm{S}_{m+1} \frac{d\beta}{dx} + \mathrm{S}_{m+2} \frac{d\gamma}{dx} + \ldots + \mathrm{S}_{m+\mu-1} \frac{d\lambda}{dx}$$
$$+ \frac{\beta}{m+1} \cdot \frac{d\mathrm{S}_{m+1}}{dx} + \frac{2\gamma}{m+2} \cdot \frac{d\mathrm{S}_{m+2}}{dx} + \ldots + \frac{(\mu-1)\lambda}{m+\mu-1} \cdot \frac{d\mathrm{S}_{m+\mu-1}}{dx},$$

(*) *Voyez* aussi le XXIIe cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, et le tome X du *Journal de M. Crelle*.

dans laquelle S_m désigne la somme des puissances $m^{\text{ièmes}}$ des racines de l'équation (1), S_{m+1} la somme de leurs puissances $(m+1)^{\text{ièmes}}$, etc. En faisant successivement $m=0$, $m=1, \ldots$ $m=\mu-1$, on obtiendra les μ équations demandées, savoir :

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} S_1 &= S_0 \frac{d\alpha}{dx} + \text{etc.},\\ S_2 &= S_1 \frac{d\alpha}{dx} + \text{etc.},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ S_\mu &= S_{\mu-1} \frac{d\alpha}{dx} + \text{etc.}, \end{aligned}\right.$$

dont la première (en observant que $S_1 = L$) donne immédiatement

$$\int L dx = \alpha S_0 + \beta S_1 + \ldots + \lambda S_{\mu-1}.$$

2°. Supposons que les coefficients $L, \ldots M, N$ soient entiers par rapport à x ; et nommons Δ le dernier terme de l'équation aux carrés des différences des racines de l'équation (1) : si l'on pose

$$\alpha = \frac{t}{\Delta},\quad \beta = \frac{u}{\Delta}, \ldots\ \lambda = \frac{w}{\Delta},$$

les inconnues nouvelles $t, u, \ldots w$, que l'on substituera ainsi aux inconnues $\alpha, \beta, \ldots \lambda$, ne pourront avoir que des valeurs entières, en sorte qu'il sera extrêmement facile de les déterminer à l'aide des équations (2) ou d'en prouver l'impossibilité par le secours de ces mêmes équations.

3°. Il sera plus commode encore d'opérer de la manière suivante. On désignera par $\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_\mu$ de nouvelles inconnues liées aux anciennes par les relations

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \alpha S_0 + \beta S_1 + \ldots + \lambda S_{\mu-1},\\ \rho_2 &= \alpha S_1 + \beta S_2 + \ldots + \lambda S_\mu,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \rho_\mu &= \alpha S_{\mu-1} + \beta S_\mu + \ldots + \lambda S_{2(\mu-1)}. \end{aligned}$$

Les valeurs de ρ_1, ρ_2, ... ρ_μ seront nécessairement entières si l'intégrale $\int y dx$ est exprimable en termes algébriques, et la première d'entre elles, savoir ρ_1, sera égale à $\int L dx$. C'est dans cette substitution d'inconnues nouvelles, dont les valeurs ne peuvent être qu'entières, aux inconnues anciennes, dont les valeurs pouvaient être fractionnaires, que réside le caractère principal de la méthode que je propose aujourd'hui. Cette méthode, comme on voit, n'exige plus que l'on sache trouver dans tous les cas les intégrales rationnelles d'un système d'équations différentielles linéaires. La nature particulière des équations (2) donne lieu à des simplifications que la méthode générale ne comporte pas, et permet de former *à priori* les dénominateurs des inconnues α, β, ... λ, ou de remplacer α, β, ... λ par d'autres inconnues ρ_1, ρ_2, ... ρ_μ, qui n'ont pas de dénominateurs.

4°. On aurait encore à déterminer des inconnues *entières* σ_2, σ_3, ... σ_μ si l'on posait

$$\sigma = \alpha \frac{dS_1}{dx} + \frac{\beta}{2}\cdot\frac{dS_2}{dx} + \frac{\gamma}{3}\cdot\frac{dS_3}{dx} + \ldots + \frac{\lambda}{\mu}\cdot\frac{dS_\mu}{dx},$$

$$\sigma_3 = \frac{\alpha}{2}\cdot\frac{dS_2}{dx} + \frac{\beta}{3}\cdot\frac{dS_3}{dx} + \frac{\gamma}{4}\cdot\frac{dS_4}{dx} + \ldots + \frac{\lambda}{\mu+1}\cdot\frac{dS_{\mu-1}}{dx},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sigma_\mu = \frac{\alpha}{\mu-1}\cdot\frac{dS_{\mu-1}}{dx} + \frac{\beta}{\mu}\cdot\frac{dS_\mu}{dx} + \frac{\gamma}{\mu+1}\cdot\frac{dS_{\mu+1}}{dx} + \ldots + \frac{\lambda}{2(\mu-1)}\cdot\frac{dS_{2(\mu+1)}}{dx},$$

équations auxquelles se joindra l'équation donnée plus haut,

$$\int L dx = \alpha S_0 + \beta S_1 + \ldots + \lambda S_{\mu-1}.$$

On sera même ainsi conduit à des calculs généralement plus simples que les précédents, parce que la dérivée $\frac{dS_n}{dx}$ est un polynome dont le degré est inférieur d'une unité au degré de S_n.

5°. Si les coefficients de l'équation (1) sont fractionnaires, on les rendra entiers en remplaçant y par $\frac{y}{T}$, T étant un polynome convenablement choisi; et il s'agira de trouver l'intégrale $\int \frac{y dx}{T}$. Cette intégrale sera encore de la forme

$$\int \frac{y\,dx}{\mathrm{T}} = \alpha + \beta y + \gamma y^2 + \ldots + \lambda y^{\mu-1},$$

et pour remplacer les inconnues α, β, $\gamma, \ldots \lambda$, dont les valeurs sont fractionnaires, par d'autres inconnues ρ_1, $\rho_2, \ldots, \rho_\mu$, dont les valeurs seront entières, il suffira de poser

$$\frac{\rho_1}{\mathrm{U}} = \alpha \mathrm{S}_0 + \beta \mathrm{S}_1 + \ldots + \lambda \mathrm{S}_{\mu-1},$$

$$\frac{\rho_2}{\mathrm{U}} = \alpha \mathrm{S}_1 + \beta \mathrm{S}_2 + \ldots + \lambda \mathrm{S}_{\mu},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\rho_\mu}{\mathrm{U}} = \alpha \mathrm{S}_{\mu-1} + \beta \mathrm{S}_{\mu} + \ldots + \lambda \mathrm{S}_{2(\mu-1)}:$$

S_m désigne, comme ci-dessus, la somme des puissances $m^{\text{ièmes}}$ des racines de l'équation (1); U est le plus grand commun diviseur des deux polynomes T, $\frac{d\mathrm{T}}{dx}$.

Tels sont les théorèmes à l'aide desquels on peut trouver l'intégrale $\int y\,dx$ ou reconnaître l'impossibilité de cette intégrale, sous forme algébrique. Ils sont dignes, ce me semble, par leur élégance de fixer un moment l'attention des géomètres; peut être même serait-il bon de les introduire dans les traités élémentaires de calcul intégral.