JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

POINSOT

Note de M. Poinsot sur une certaine démonstration du principe des vitesses virtuelles, qu'on trouve au chapitre III du livre Ier de la Mécanique céleste

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 3 (1838), p. 244-248.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1838_1_3__244_0>

NOTE DE M. POINSOT

Sur une certaine démonstration du principe des vitesses virtuelles, qu'on trouve au chapitre III *du livre* Ier *de la Mécanique céleste.*

(On suppose que le lecteur a sous les yeux le passage dont il s'agit.)

L'équation

$$o = \Sigma . mS . \delta s + \Sigma . p . \delta f + \Sigma . R \delta r \ldots \quad (k) \text{ (page 39), t. I,}$$

est entièrement exacte, elle est même identique; elle a lieu aux différences finies, puisqu'elle n'est que la somme faite de toutes les équations relatives à chaque point du système, considéré dans le cas de l'équilibre, comme étant seul en équilibre en vertu de toutes les forces qui le sollicitent, c'est-à-dire, non-seulement de la force appliquée (mS), mais encore des forces de réaction (p) suivant les droites (f), et des résistances (R) normales aux surfaces fixes où il pourrait être obligé de se mouvoir.

Effaçons tout de suite les termes $\Sigma . R . \delta r$ qui ne font rien à la démonstration; et l'on aura simplement

$$o = \Sigma . mS . \delta s + \Sigma p \delta f,$$

qui est encore exacte, mais qui n'a plus lieu qu'aux différences infiniment petites, puisqu'on n'est en droit de compter comme nulles les vitesses virtuelles (δr), que dans le cas où les points décrivent sur les surfaces des arcs infiniment petits, auquel cas les vitesses virtuelles sont des sinus-verses d'arcs infiniment petits, et sont rigoureusement nulles. Mais, pour plus de clarté, supposons qu'il n'y ait point du tout de ces surfaces fixes, et que le système soit libre; la démonstration n'en doit pas moins réussir, puisqu'elle est générale.

On aura donc l'équation

$$o = \Sigma . mS . \delta s + \Sigma . p . \delta f,$$

qui sera identique et aura lieu aux différences quelconques, comme pour un seul point libre.

L'auteur remarque bien que si la liaison des parties du système consiste en ce que toutes les distances mutuelles f, f', f'', etc., soient *invariables*, on a séparément :

$$\Sigma . p . \delta f = o,$$

d'où l'on conclut

$$\Sigma . mS . \delta s = o,$$

c'est-à-dire que la somme des moments des *seules forces appliquées*, doit être nulle dans le cas de l'équilibre : ce qui est exact.

Mais il faut remarquer que cette équation n'a lieu qu'aux différences infiniment petites, car il n'est permis de compter comme nuls d'eux-mêmes tous les termes $p\delta f$, qu'autant qu'on dérange *infiniment peu* chaque droite (f). La différence des vitesses virtuelles des deux bouts de cette droite est le sinus-verse de l'angle que la droite fait sur elle-même en changeant de place; et cet angle doit être infiniment petit pour que le sinus-verse soit regardé comme nul.

Mais tout ceci n'a point de difficulté; il s'agit d'un système quelconque *variable de figure*, et il faut démontrer que dans l'équation,

$$o = \Sigma . mS . \delta s + \Sigma . p . \delta f,$$

on peut toujours supprimer $\Sigma . p . \delta f$, en assujétissant les variations à satisfaire aux équations de condition qui lient entre eux les points du système, et c'est là la grande difficulté.

D'abord j'observe que l'auteur n'a pas encore fait un seul pas vers la démonstration générale. Car démontrer que les termes $\Sigma . p . \delta f$ sont nuls d'eux-mêmes, ou démontrer que les termes $\Sigma . mS . \delta s$ sont nuls d'eux-mêmes, c'est identiquement la même chose; je ne dis pas seulement que l'un soit une conséquence de l'autre, comme il paraît par l'équation ci-dessus, mais que c'est une seule et même chose, et qu'on n'arrivera pas plus vite à l'une qu'à l'autre.

En effet, les forces (p) dans les droites (f) ne sont autre chose (au signe près, ce qui ne fait rien ici), que les composantes des forces mêmes (mS) appliquées au système. Cela est manifeste, puisque l'auteur dit que chaque point est seul en équilibre, en vertu des forces appliquées et de ces forces de réaction (p) dirigées suivant les droites (f) qui aboutissent à ce point. Les forces (p) ne sont donc, au signe près, que les forces appliquées (mS) décomposées dans les droites f, f', f'', etc. Donc, tout ce que l'auteur va dire pour démontrer que $\Sigma.p.\delta f$ est nul vous pourrez l'appliquer, mot à mot, pour démontrer que $\Sigma.m\mathrm{S}.\delta s$ est nul; donc l'auteur va prouver qu'on a toujours $\Sigma.m\mathrm{S}.\delta s = 0$, dans l'équilibre de tout système, c'est-à-dire qu'il va prouver le principe des vitesses virtuelles, comme s'il commençait de s'en occuper.

Il s'agit maintenant d'examiner cette démonstration.

L'auteur suppose le système animé des seules forces p, p', p'', etc.; il en est le maître : il peut choisir ces forces-là, au lieu des forces appliquées mS, m'S', etc., puisque les unes ne sont que les égales et contraires des autres, ou de leurs équivalentes.

Ensuite, il décompose les forces p, p', p'', etc. (qui, remarquez bien, agissent déjà dans les droites f, f', f'', etc.), en d'autres, dont les unes q, q', q'', etc., agissent *encore* dans les droites f, f', f'', etc., et se détruisent, dit-il, d'elles-mêmes, sans produire d'action sur les courbes décrites. Mais si elles se détruisent d'elles-mêmes sans produire d'action sur les courbes décrites, on pourrait donc ôter ces courbes ou ces canaux dans lesquels les points sont pour le moment renfermés, et ces points resteraient en équilibre en vertu des seules forces q, q', q'', etc. : mais, par hypothèse, ils sont aussi en équilibre en vertu des seules forces p, p', p'', etc., dirigées dans les mêmes droites; d'où il paraît que ces premières composantes q, q', q'', etc., sont encore les mêmes forces p, p', p'', etc., qu'il a d'abord considérées; que par conséquent, les secondes composantes T, T', T'', etc., perpendiculaires, et les autres tangentielles aux courbes décrites, sont nulles d'elles-mêmes : de sorte que l'auteur n'aurait encore fait que changer le nom de ses forces, sans faire un seul pas vers la démonstration.

Mais pour voir la chose avec plus de clarté, suivons l'auteur plus loin. Accordons-lui que chaque force (p) est décomposée en une autre (q), une autre T, et une autre tangentielle. Accordons encore que toutes les forces tangentielles se détruisent d'elles-mêmes sur chaque point.

Alors le groupe des forces (p) *dirigées dans les droites* f, f', f'', etc., sera donc réduit au groupe des forces (q) *dirigées dans les mêmes droites*, et au groupe des forces (T) perpendiculaires aux courbes décrites; et l'on aura, comme l'auteur le suppose, l'équation

$$o = \Sigma (q - p)\delta f + \Sigma . \mathrm{T} . \delta i, \qquad \text{(page 41)}$$

Mais actuellement, comment peut-il savoir que l'on a séparément l'équation

$$\Sigma . q\delta f = o ?$$

Est-ce parce que les forces q, q', q'', etc., se font équilibre d'elles-mêmes sur le système? Mais la loi de l'équilibre des forces q, q', q'', etc., lui est aussi inconnue que la loi de l'équilibre des forces p, p', p'', etc. qui se font aussi équilibre, ou des forces appliquées mS, m'S', etc. qui se font aussi équilibre : l'équation $o = \Sigma . q . \delta f$ est donc le principe même des vitesses virtuelles qu'il cherche, et l'auteur paraît être dans le cercle vicieux.

Pour s'en convaincre, qu'on prenne ici l'exemple d'un système formé de quatre points liés ensemble par une seule équation donnée entre leurs distances mutuelles f, f', f'', etc. J'ai démontré ailleurs (*), que les forces p, p', p'', etc., qu'on suppose être en équilibre sur le système, sont nécessairement proportionnelles à de certaines fonctions tirées de l'équation dont il s'agit. D'autres forces quelconques q, q', q'', etc., qu'on imaginerait aussi en équilibre dans les mêmes droites, seraient donc exactement proportionnelles aux premières p, p', p'', etc. : Ainsi l'on ne peut avoir, pour poser l'équation $o = \Sigma q\delta f$, aucune raison qu'on ne l'ait également pour poser tout d'un coup $o = \Sigma p\delta f$, c'est-à-dire, l'équation même qu'on veut démontrer.

L'auteur, il est vrai, dit encore qu'on a $o = \Sigma . q . \delta f$, en vertu de

---

(*) Voyez notre *Statique*, 7^e édition, page 435.

l'équation (k). Mais l'équation (k) n'est qu'une identité formée de toutes les équations relatives à chaque point, considéré comme seul en équilibre en vertu de toutes les forces qui le sollicitent. D'après cela, il supposerait donc que toutes les forces (q) ont, autour de chaque point, des résultantes nulles. Alors tout le groupe des forces q, q', q'', etc., dont il nous a parlé est parfaitement nul; il ne resterait donc enfin, à chaque point, que les forces perpendiculaires T, T', T'', etc.; il suppose donc que les forces p, p', p'', etc. peuvent se réduire à des forces perpendiculaires aux courbes décrites; 1° ce qu'on ne sait pas; 2° ce qui ne suffit pas pour l'équilibre, et par conséquent pour démontrer la loi de l'équilibre.

De quelque côté qu'on l'examine, on voit que cette démonstration est illusoire: on ne l'avait regardée jusqu'ici que comme obscure, et difficile à comprendre; elle avait un défaut plus grave, et qu'il était bon de découvrir, parce qu'il y a toujours quelque chose d'instructif dans la recherche d'une erreur qui a pu échapper à un grand géomètre.

Quant au principe des vitesses virtuelles, il est, comme on sait, très vrai, et bien établi sur d'autres preuves. Et j'observerai même à ce sujet, que c'est souvent cette certitude qu'on a *d'ailleurs* de la vérité d'un théorème, qui nous expose à en donner de fausses démonstrations. Comme on est rassuré d'avance sur le résultat, on marche avec moins de précaution, on prend facilement pour preuve ce qui ne prouve point, et pour différent ce qui est le même sous une autre forme. Il faut donc toujours se défier d'une démonstration nouvelle qu'on veut donner d'une vérité déjà bien connue et bien démontrée, surtout quand la nouvelle démonstration paraît plus simple et plus rapide: et même, si elle a été plus longue et plus laborieuse, il y a encore une illusion à craindre; c'est que la longueur et l'ennui du voyage font souvent croire qu'on doit être arrivé.