JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Note sur la Théorie des Équations différentielles

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 3 (1838), p. 255-256.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1838_1_3__255_0>

NOTE

Sur la Théorie des Équations différentielles ;

PAR J. LIOUVILLE.

Désignons par x une variable réelle qui peut croître depuis x jusqu'à X; par $P_1, P_2, \ldots P_n$, g des fonctions de x positives et continues; par r un paramètre variable; et par U une fonction de x et de r satisfaisant à l'équation différentielle

$$\frac{d.P_n d.P_{n-1} \ldots d.P_2 d.P_1 U}{dx^n} + grU = o:$$

enfin, pour déterminer les n constantes arbitraires implicitement contenues dans U, donnons-nous les valeurs des n quantités suivantes

$$P_1 U, \quad \frac{P_2 d.P_1 U}{dx}, \ldots\ldots \frac{P_n d.P_{n-1} \ldots d.P_1 U}{dx^{n-1}}$$

pour $x =$ x; admettons de plus que ces valeurs soient positives et indépendantes de r. Cela posé, la fonction U jouira de propriétés toutes semblables à celles de la fonction V dont on s'est occupé si souvent dans les deux premiers volumes de ce journal, et qui se présente en analyse lorsqu'on veut déterminer les lois du mouvement de la chaleur dans une barre hétérogène. Mais la méthode par laquelle je suis parvenu à démontrer ces propriétés pour la fonction U, qui satisfait à une équation linéaire d'un ordre quelconque n, diffère beaucoup de celle dont on avait fait usage pour la fonction particulière V qui répond au cas où $n = 2$: elle diffère également de celle que j'ai suivie pour traiter l'équation $\frac{d^3U}{dx^3} + rU = o$ qui est du troisième ordre, à coefficients constants, et à laquelle j'ai été conduit dans mon Mémoire sur l'intégration de l'équation $\frac{du}{dt} = \frac{d^3u}{dx^3}$ (Voyez le 25^{me} cahier du *Journal de l'Ecole Polytechnique*). Non-seulement tous les théorèmes que j'ai donnés dans ce dernier Mémoire peuvent être étendus aux équations linéaires à coefficients variables; mais on peut encore en démontrer beaucoup d'autres qui n'ont pas moins d'intérêt.

Dès que l'abondance des matières me permettra de prendre dans ce Journal une place suffisante, je m'empresserai d'y publier le Mémoire dont je viens d'indiquer les principaux résultats, et qui n'est du reste à mes yeux qu'une petite partie d'un très long travail que j'ai entrepris sur la théorie générale des équations différentielles et sur le développement des fonctions en séries.

Je me suis occupé aussi d'autres recherches d'un genre très différent et qui ont pour objet l'intégration des équations différentielles sous forme finie, en admettant dans l'expression de l'intégrale des fonctions algébriques, logarithmiques et exponentielles seulement. Par exemple étant donnée l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \mathrm{P}y,$$

dans laquelle P représente une fonction entière de x, je puis toujours décider par une méthode certaine s'il est possible ou non d'y satisfaire par une valeur de la forme $y = f(x)$, $f(x)$ étant une fonction qui ne renferme qu'un nombre limité de fois les signes relatifs aux opérations algébriques, exponentielles et logarithmiques. Dans le cas d'une réponse affirmative, la même méthode fournit aussi la valeur de y.