# JOURNAL

DE

# MATHÉMATIQUES

## PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE



AD. GUIBERT


**Solution d'une question relative à la Probabilité des Jugements rendus à une majorité quelconque**


*Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série*, tome 3 (1838), p. 25-30.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1838_1_3__25_0>

# SOLUTION D'UNE QUESTION

## *Relative à la Probabilité des Jugements rendus à une majorité quelconque ;*

PAR M. AD. GUIBERT,

Répétiteur à l'École Polytechnique.

---

« Une affaire sera soumise à un tribunal de première instance, » puis à une cour d'appel de $2n+1$ juges, ou de $2n$ juges, déci- » dant en dernier ressort et à une majorité quelconque; dans le cas » de $2n$ juges, s'il y a partage égal, la cour adoptera l'opinion du » tribunal de première instance. Quelle est la plus grande des proba- » bilités de la bonté des arrêts prononcés par ces deux sortes de cours » d'appel? Les juges qui les forment sont supposés avoir la même » chance de ne point se tromper. »

Après avoir donné la solution de cette question, j'en traiterai une du même genre, à laquelle celle-ci donne lieu, quand on introduit des conditions nouvelles; j'aurai occasion, en terminant, d'établir une formule qui montre avec évidence comment augmente, avec le nombre des juges d'un tribunal, la probabilité du jugement qu'ils doivent prononcer à une majorité quelconque, et en supposant qu'ils aient tous la même chance de ne pas se tromper.

Soient

$p$ la probabilité qu'un juge de cour d'appel ne se trompe point,
P la probabilité que le jugement du tribunal de première instance sera bon,

$\left.\begin{matrix} P_{2n+1} \\ P_{2n} \end{matrix}\right\}$ les probabilités que les arrêts des cours d'appel de $2n+1$ et $2n$ juges seront conformes au bon droit.

Il s'agit de comparer entre elles les quantités $P_{2n+1}$ et $P_{2n}$.

D'après les principes fondamentaux du calcul des probabilités, on aura d'abord

$$P_{2n+1} = p^{2n+1} + (2n+1)(1-p)p^{2n} + \ldots + \frac{(2n+1)\ldots(n+2)}{1\ldots n}(1-p)^n p^{n+1},$$
$$P_{2n} = p^{2n} + 2n(1-p)p^{2n-1} + \ldots + P\,\frac{2n\ldots(n+1)}{1\ldots n}(1-p)^n p^n;$$

en multipliant le second membre de cette dernière égalité par $p+1-p$, on lui donnera aisément cette forme

$$P_{2n} = p^{2n+1} + (2n+1)(1-p)p^{2n} + \ldots + \frac{(2n+1)\ldots(n+2)}{1\ldots n}(1-p)^n p^{n+1} + \frac{2n\ldots(n+1)}{1\ldots n}(P-p)(1-p)^n p^n;$$

donc

$$P_{2n} = P_{2n+1} + \frac{2n\ldots(n+1)}{1\ldots n}(P-p)(1-p)^n p^n. \qquad \text{(A)}$$

Le problème est résolu par cette formule; elle fait voir en effet, que selon que l'on aura

$$P > p, \quad P = p, \quad P < p,$$

on aura respectivement

$$P_{2n} > P_{2n+1}, \quad P_{2n} = P_{2n+1}, \quad P_{2n} < P_{2n+1}.$$

J'admettrai, ce qui est vrai dans les temps ordinaires, que $p$ soit $> \frac{1}{2}$; alors, si la probabilité qu'un juge du tribunal de première instance ne se trompe point est supposée constante et aussi égale à $p$, on aura toujours $P > p$, et par conséquent $P_{2n} > P_{2n+1}$, à moins que le tribunal de première instance ne soit formé que d'un juge, auquel cas $P = p$ et $P_{2n} = P_{2n+1}$. L'inégalité $P > p$ est fondée sur l'augmentation avec le nombre des juges de la probabilité de la bonté de leur jugement; or, ce fait qui est évident sera d'ailleurs démontré par une des formules subséquentes, ainsi que je l'ai déjà annoncé.

Je suppose maintenant que chaque arrêt considéré soit rendu, et qu'il soit successivement conforme et contraire au jugement de première instance, dont les juges ont la même chance de ne pas se tromper que ceux de la cour d'appel, et je me propose de voir si à la cour de $2n$ juges correspondent encore des probabilités plus grandes que celles qui se rapportent à la cour d'appel renfermant un juge de plus.

Soient $P'_{2n+1}$, $P''_{2n+1}$ ces probabilités, dans le cas de $2n+1$ juges, et suivant que l'arrêt rendu est ou n'est pas conforme au jugement du tribunal de première instance. Soient $P'_{2n}$, $P''_{2n}$ les probabilités analogues et qui se rapportent à la cour de $2n$ juges. Le principe de la probabilité des hypothèses donnera les égalités

$$P'_{2n+1} = \frac{PP_{2n+1}}{PP_{2n+1} + (1-P)(1-P_{2n+1})},$$

$$P''_{2n+1} = \frac{(1-P)P_{2n+1}}{(1-P)P_{2n+1} + P(1-P_{2n+1})},$$

$$P_{2n} = \frac{P\left[p^{2n} + 2n(1-p)p^{2n-1} + \ldots + \frac{2n\ldots(n+1)}{1.2\ldots n}(1-p)^n p^n\right]}{P\left[p^{2n} + \ldots + \frac{2n\ldots(n+1)}{1\ldots n}(1-p)^n p^n\right] + (1-P)\left[(1-p)^{2n} + \ldots + \frac{2n\ldots(n+1)}{1\ldots n}(1-p)^n p^n\right]}$$

$$P''_{2n} = \frac{(1-P)\left[p^{2n} + 2n(1-p)p^{2n-1} + \ldots + \frac{2n\ldots n}{1\ldots(n-1)}(1-p)^{n-1}p^{n+1}\right]}{(1-P)\left[p^{2n} + \ldots + \frac{2n\ldots n}{1\ldots(n-1)}(1-p)^{n-1}p^{n+1}\right] + P\left[(1-p)^{2n} + \ldots + \frac{2n\ldots n}{1\ldots(n-1)}(1-p)^{n+1}p^{n-1}\right]}$$

les événements observés étant ici l'accord ou le désaccord du jugement et des arrêts.

La somme des numérateurs de $P'_{2n+1}$, $P''_{2n+1}$ est $P_{2n+1}$, c'est-à-dire, la probabilité de la bonté de l'arrêt quel que soit le jugement de première instance; la somme des dénominateurs est l'unité, et ces deux résultats confirment l'exactitude de ces valeurs. Des vérifications semblables s'observent à l'égard des deux formules suivantes.

Pour faciliter les comparaisons dont il s'agit, je remplace dans ces dernières égalités, $P_{2n}$ par sa valeur donnée par l'équation (A), et j'obtiens ainsi

$$P' = \frac{PP_{2n+1} + \frac{2n\ldots(n+1)}{1\ldots n} P(1-p)^{n+1}p^n}{PP_{2n+1} + (1-P)(1-P_{2n+1}) + \frac{2n\ldots(n+1)}{1\ldots n}(P+p-2Pp)(1-p^n)p^n},$$

$$P''_n = \frac{(1-P)P_{2n+1} - \frac{2n\ldots(n+1)}{1\ldots n}(1-P)(1-p)^n p^{n+1}}{(1-P)P_{2n+1} + P(1-P_{2n+1}) - \frac{2n\ldots(n+1)}{1\ldots n}(P+p-2Pp)(1-p)^n p^n};$$

or, si l'on calcule les numérateurs des différences

$$P'_{2n+1} - P'_{2n}, \quad P_{2n+1} - P''_{2n},$$

on pourra aisément les mettre sous ces formes respectives

$$\frac{2n\ldots(n+1)}{1\ldots n} P(1-P)\left(\frac{P_{2n+1}}{1-p} - 1\right)(1-p), \quad \frac{2n\ldots(n+1)}{1\ldots n} P(1-P)(p-P_{2n+1}),$$

ce qui prouve que la première différence est positive, et la seconde négative, ou que l'on a

$$P'_{2n+1} > P'_{2n}, \quad P''_{n+1} < P'';$$

ainsi la probabilité de la bonté de l'arrêt de la cour de $2n$ juges, est plus petite ou plus grande que celle de même nature, relative à la cour de $2n+1$ juges, selon que le jugement et l'arrêt s'accordent ou ne s'accordent pas.

Je passe à la démonstration d'une formule dont il a été question.

Si dans l'équation

$$P_{2n+1} = p^{2n+1} + (2n+1)(1-p)p^{2n} + \ldots + \frac{(2n+1)\ldots(n+2)}{1\ldots n}(1-p)^n p^{n+1},$$

on fait croître $n$, il n'en résulte pas très clairement que $P_{2n+1}$ augmente en même temps; cependant il est évident, sans le secours d'aucune formule, qu'il en doit être ainsi ; pour en trouver une qui rende cela manifeste, je change $n$ en $n-1$, et cette équation devient

$$P_{2n-1}=p^{2n-1}+(2n-1)(1-p)p^{2n-2}+\ldots+\frac{(2n-1)\ldots(n+1)}{1\ldots(n-1)}(1-p)^{n-1}p^{n},$$

puis je multiplie ce second membre par $p+1-p$, et le résultat permet de poser, en ajoutant et retranchant la quantité..... $\frac{2n\ldots(n-1)}{1\ldots n}P(1-p)^n p^n$,

$$P_{2n-1}=p^{2n}+2n(1-p)p^{2n-1}+\ldots+\frac{2n\ldots(n+1)}{1\ldots n}P(1-p)^n p^n$$
$$+\frac{2n\ldots(n+1)}{1\ldots n}(\tfrac{1}{2}P)(1-p)^n p^n,$$

ou

$$P_{2n-1}=P_{2n}+\frac{2n\ldots(n+1)}{1\ldots n}(\tfrac{1}{2}-P)(1-p)^n p^n;$$

à cette équation j'ajoute membre à membre l'équation (A), et il vient

$$P_{2n+1}=P_{2n-1}+\frac{2n\ldots(n+1)}{1\ldots n}(p-\tfrac{1}{2})(1-p)^n p^n.$$

Au second membre le second terme étant toujours positif, il s'ensuit que $P_{2n+1}$ augmente quand $n$ augmente. Si $n$ était supposé infini, $P_{2n+1}$ atteindrait sa plus grande valeur qui est l'unité, et que l'on peut obtenir en transformant d'abord de nouveau la valeur de $P_{2n+1}$, de la manière suivante.

On remplace successivement $n$, dans cette formule, par $n-1$, $n-2$,... 3, 4, et l'on a

$$P_{2n-1}=P_{2n-3}+\frac{(2n-2)\ldots n}{1\ldots(n-1)}(p-\tfrac{1}{2})(1-p)^{n-1}p^{n-1},$$
$$P_{2n-3}=P_{2n-5}+\frac{(2n-4)\ldots(n-1)}{1\ldots(n-2)}(p-\tfrac{1}{2})(1-p)^{n-2}p^{n-2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$P_5=P_3+\frac{4.3}{1.2}(p-\tfrac{1}{2})(1-p)^2p^2,$$
$$P_3=p+\tfrac{2}{1}(p-\tfrac{1}{2})(1-p)p;$$

de ces expressions on déduit facilement que

$$P_{2n+1} = p + (p - \tfrac{1}{2})\left[\frac{4}{1}x + \frac{3.4}{1.2}x^2 + \frac{4.5.6}{1.2.3}x^3 + \ldots + \frac{(n+1)\ldots 2n}{1\ldots n}x^n\right],$$

en posant $(1-p)p = x$ : soit maintenant $n$ infini, on aura à évaluer la série

$$\frac{2}{1}x + \frac{3.4}{1.2}x^2 + \frac{4.5.6}{1.2.3}x^3 + \ldots + \frac{(n'+1)\ldots 2n'}{1\ldots n'} + \text{etc.},$$

en désignant par $n'$ le rang du terme général. Les parties composant cette suite, qui est convergente, puisque $x$ a pour maximum $\frac{1}{4}$, sont les termes successifs du milieu, dans les développements de toutes les puissances de degré pair du binome $1+x$; si l'on remplace $4x$ par $y$, le terme général se transforme évidemment en

$$\frac{1.3.5\ldots(2n'-1)}{2n'} \times \frac{1}{2.3\ldots n'}y^{n'},$$

ce qui montre qu'il n'est autre que le terme général du développement de $(1-y)^{-\frac{1}{2}} - 1$; donc, $n$ étant infini, on aura

$$P_{2n+1} = p + (p - \tfrac{1}{2})\left[(1-4x) - 1\right] = p + \tfrac{1}{2}(2p-1)\left(\frac{1}{2p-1} - 1\right),$$

ou, en réduisant,

$$P_{2n+1} = 1.$$