JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur l'Intégration d'une classe d'Équations différentielles

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 3 (1838), p. 31-32.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1838_1_3__31_0>

Sur l'Intégration d'une classe d'Équations différentielles ;

Par J. LIOUVILLE.

Dans un élégant Mémoire imprimé, tome II, page 457, de ce Journal, M. Binet obtient entre autres résultats, le théorème suivant : *On peut toujours intégrer l'équation* $\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{dR}{rdr}u$, *où* r *dépend de* t *selon la formule* $t = \int \frac{rdr}{\sqrt{2r^2R + A^2}}$, R *étant une fonction quelconque de* r. Cette intégrale d'une équation différentielle linéaire du second ordre présente beaucoup d'analogie avec celles que M. Jacobi vient de trouver pour les équations différentielles qui servent à distinguer les *maxima* et les *minima* dans le calcul des variations. Elle excitera sans aucun doute l'attention des géomètres. Voici une méthode très simple pour parvenir à plusieurs intégrales du même genre. Soit

$$(1) \qquad f(x, y, y', \ldots y^{(n)}) = 0$$

une équation différentielle de l'ordre n; $y', \ldots y^{(n)}$, étant les dérivées successives de y. L'intégrale complète de cette équation contiendra n constantes arbitraires $a, b, \ldots c$ et sera de la forme...... $y = F(x, a, b, \ldots c)$ ou plutôt $\Pi(x, y, a, b, \ldots c) = 0$. Maintenant différencions par rapport à a les deux membres de l'équation (1), et représentons par u la dérivée $\frac{dy}{da}$. Il nous viendra

$$(2) \qquad \frac{df}{dy} \cdot u + \frac{df}{dy'} \cdot \frac{du}{dx} + \ldots + \frac{df}{dy^{(n)}} \cdot \frac{d^n u}{dx^n} = 0.$$

On aurait eu la même équation si, au lieu de poser $\frac{dy}{da} = u$, on avait posé $\frac{dy}{db} = u$ ou $\frac{dy}{dc} = u$. Donc les dérivées de y prises par rapport aux n constantes $a, b, \ldots c$ représentent autant d'intégrales particulières de l'équation linéaire (2), en sorte que

$$u = \alpha \frac{dy}{da} + \beta \frac{dy}{db} + \ldots + \gamma \frac{dy}{dc}$$

en est l'intégrale complète, α, $\beta, \ldots \gamma$, étant des constantes arbitraires.

Si l'on avait seulement une intégrale particulière de l'équation (1), avec m constantes arbitraires, on trouverait, par la même méthode, m intégrales particulières de l'équation (2). Par les méthodes connues, on réduirait donc l'intégration de cette équation (2) à celle d'une autre équation de l'ordre $(n - m)$.

Il est bon de rappeler aussi qu'à l'aide de chaque intégrale particulière de l'équation (2), on abaisse d'une unité l'ordre de l'équation

$$(3) \qquad \frac{df}{dy} v - \frac{d\left(\frac{df}{dy'} v\right)}{dx} + \ldots \pm \frac{d^n\left(\frac{df}{dy^{(n)}} v\right)}{dx^n} = 0,$$

comme Lagrange l'a fait voir dans les premières pages du mémoire intitulé: *Solution de différents problèmes de calcul intégral.*

Outre le mémoire de M. Jacobi dont j'ai parlé plus haut, il en existe un autre très considérable sur les équations différentielles de la dynamique. Tous les deux, je l'espère, paraîtront dans mon Journal. Mais je n'ai pas encore lu le second que l'on traduit actuellement. Il est fort possible que les mémoires de M. Jacobi renferment les divers résultats que je viens d'indiquer en peu de mots. Mais quand même cela serait, il y aurait toujours quelque avantage à les avoir détachés de longues théories, comme je le fais dans cet article. Ils deviennent en effet si simples qu'on ne pourra manquer de les introduire désormais dans les éléments. Je me propose de développer, dans un autre article, quelques-unes de leurs nombreuses conséquences. En attendant le lecteur peut en faire l'application au cas particulier où la fonction f se réduit à $y'' - \varphi(y)$, l'équation (1) étant alors immédiatement intégrable.