JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

MOLINS

Extrait d'une Thèse sur le mouvement des Corps flottants de forme quelconque

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 3 (1838), p. 33-43.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1838_1_3__33_0>

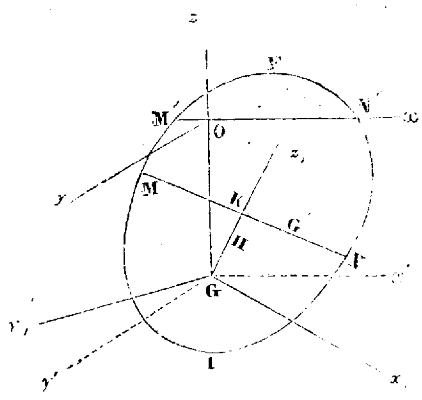
EXTRAIT

D'une Thèse sur le mouvement des Corps flottants de forme quelconque ;

PAR M. MOLINS,

Professeur au Collége d'Orléans.

Dans les traités de Mécanique, le problème du mouvement des corps flottants ne se trouve résolu que dans quelques cas particuliers fort simples qui supposent le corps symétrique par rapport à une section verticale; nous nous proposons de traiter le cas général où le corps est de forme quelconque, pour en déduire ensuite les cas particuliers déjà connus. Nous admettrons que le mouvement est très petit ou que le mobile ne s'écarte jamais beaucoup de sa position initiale.



Supposons qu'un corps flotte en équilibre à la surface d'un liquide, et qu'après l'avoir écarté très peu de cette position on lui imprime une faible impulsion : le problème à résoudre consiste à déterminer la nature du mouvement qu'il prendra en vertu de cette impulsion initiale, de son poids et de la pression verticale du liquide. La position du corps à un instant quelconque serait déterminée si l'on pouvait connaître celles du centre de gravité et d'une certaine section du corps passant par ce point et primitivement désignée; parmi les diverses sections que l'on peut prendre, on choisira de préférence une de celles qui contiennent deux des axes principaux relatifs au centre de gravité. Les équations par lesquelles on déterminera la position du corps seront celles du mouvement d'un corps entièrement libre sollicité par la pesanteur et la pression du liquide; remarquons d'ailleurs que les forces accélératrices étant verticales, il n'y a lieu à considérer, pour le centre de gravité, que son mouvement dans le sens vertical.

Cela posé, G étant la position du centre de gravité du corps à une époque quelconque du mouvement, soient $Gx_{,}$, $Gy_{,}$, $Gz_{,}$, les axes principaux relatifs à ce point, MN la section du corps par la surface du liquide quand il était en équilibre, M'N' le plan actuel de flottaison, H le centre de gravité du volume MIN primitivement déplacé, G' celui de la section MN. La position du corps sera rapportée à trois axes rectangulaires fixes Ox, Oy, Oz, dont les deux premiers sont situés dans le plan horizontal du niveau du liquide et dont le troisième est vertical. Puisque MN était le plan de flottaison à l'époque de l'équilibre, la droite GH qui joint les centres de gravité du corps et du volume plongé, doit être perpendiculaire à ce plan; nous allons supposer en premier lieu que l'axe principal $Gz_{,}$ soit aussi perpendiculaire à ce plan; nous traiterons ensuite le cas où cette condition n'est point remplie; ce sera le cas général du mouvement des corps flottants.

Nous désignerons par a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'' les cosinus des angles que font les axes mobiles $Gx_{,}$, $Gy_{,}$, $Gz_{,}$, avec chacun des axes Ox, Oy, Oz ou avec leurs parallèles Gx', Gy', Gz' menées par le point G, et par h le z du point G. On sait que l'on peut faire dépendre la détermination de ces neuf cosinus de celle de trois angles qu'on désigne par θ, ψ, φ, et qui sont : l'angle que le plan $x_{,}Gy_{,}$, fait avec le plan $x'Gy'$; l'angle que fait avec Gx' la trace du premier plan sur le second, et l'angle que $Gx_{,}$ fait avec cette même trace. Les quatre quantités h, θ, ψ, φ déterminent la position du corps à un instant quelconque et sont les inconnues du problème qu'il faut tâcher d'exprimer en fonction du temps en fonction du temps que nous désignerons par τ.

Maintenant désignons par M la masse du corps flottant et déterminons le mouvement de son centre de gravité en exprimant que la quantité M $\frac{d^2h}{d\tau^2}$ est égale à la résultante des forces qui sollicitent le corps. Ces forces sont le poids du corps et la résultante des pressions du liquide qui agit en sens inverse de la pesanteur et qui se décompose en deux parties, dont l'une est égale et contraire au poids du corps, et dont l'autre est égale au poids d'un volume de liquide égal à celui de la nouvelle partie plongée. Nous allons calculer cette nouvelle force, et pour cela nous formerons l'expression du volume compris entre les sections MN, M'N'. Nous appellerons V le volume primitivement plongé à l'époque de l'équilibre, ρ la densité du liquide, σ la surface de la section MN, s, t, u les coordonnées du point G' par rapport aux axes $Gx_{,}$, $Gy_{,}$, $Gz_{,}$, et enfin U le z du même point relatif aux axes fixes. On pourra remplacer M par ρV, et l'on aura visiblement

$$U = a''s + b''t + c''u + h.$$

Quant au volume MNM'N', pour l'obtenir, on le décomposera en une infinité de cylindres verticaux dont un quelconque aura pour expression $zd\lambda \cos\theta$, en désignant par $d\lambda$ un élément infiniment petit de la surface MN et par z sa distance au plan M'N'. Ce volume est donc égal à

$$\cos\theta \int zd\lambda = -\sigma U \cos\theta = -\sigma \cos\theta\,(a''s + b''t + c''u + h),$$

et l'on aura le poids de ce volume de liquide en multipliant cette expression par ρg, g étant la gravité. Il suit de là que l'équation du mouvement du centre de gravité est

$$(1) \qquad V\frac{d^2h}{d\tau^2} = -g\sigma\cos\theta(a''s + b''t + c''u + h),$$

ce qui donne une première relation entre la quantité h et les angles θ, ψ, φ, par la substitution des valeurs de a'', b'', c'' en fonction de ces derniers angles. On remarquera que dans la détermination du volume MNM'N', on le considère comme un cylindre tronqué, dont les bases sont la section MN et sa projection sur le plan M'N', supposition qui approche d'autant plus de l'exactitude que les quantités h, θ sont plus petites; il est facile de voir que l'erreur est du second ordre, par rapport à ces quantités.

Les quatre quantités h, θ, ψ, φ, sont liées entre elles par trois nouvelles relations qui exprimeront le mouvement de rotation autour du centre de gravité. Pour y arriver, désignons comme on le fait ordinairement par p, q, r, les composantes de la vitesse de rotation, suivant les axes $Gx_{,}$, $Gy_{,}$, $Gz_{,}$; ce sont des fonctions connues de θ, ψ, φ. Nous représenterons la distance GH par n qui sera une quantité positive ou négative, selon que le point H sera au-dessus ou au-dessous du point G; on aura pour les composantes parallèles aux axes principaux de la force $\rho g V$ qui exprime le poids du volume du liquide MIN :

$$\rho g V a'', \quad \rho g V b'', \quad \rho g V c'',$$

et les moments de cette force par rapport aux mêmes axes sont : $-\rho g V b'' n$ par rapport à $Gx_{,}$, $\rho g V a'' n$ par rapport à $Gy_{,}$, et zéro par rapport à $Gz_{,}$. En second lieu désignons par V' le volume MNM'N', et par $X_{,}$, $Y_{,}$, $Z_{,}$, les coordonnées du centre de gravité de ce volume, par rapport aux axes principaux; les composantes de la force $\rho g V'$, seront

$$\rho g V' a'', \ \rho g V' b'', \ \rho g V' c'',$$

et les moments par rapport aux mêmes axes

$$\rho g V'(c'' Y_{,} - b'' Z_{,}), \ \rho g V'(a'' Z_{,} - c'' X_{,}), \ \rho g V'(b'' X_{,} - a'' Y_{,}).$$

Nous désignerons enfin par A, B, C, les trois moments d'inertie principaux.

Si maintenant on se sert des formules générales du mouvement de rotation autour d'un point, on trouvera pour les équations du mouvement de rotation autour du centre de gravité,

$$C\frac{dr}{d\tau}+(B-A)pq=\rho g V'(b''X_{,}-a''Y_{,}),$$
$$B\frac{dq}{d\tau}+(A-C)rp=\rho g V a''n+\rho g V'(a''Z_{,}-c''X_{,}),$$
$$A\frac{dp}{d\tau}+(C-B)qr=-\rho g V b''n+\rho g V'(c''Y_{,}-b''Z_{,}).$$

Il y entre trois quantités $V'X_{,}$, $V'Y_{,}$, $V'Z_{,}$, qui expriment les moments du volume MNM'N', par rapport aux plans des axes principaux. Pour les déterminer, on exprimera que ces moments sont égaux aux sommes des moments des éléments qui composent le volume V', ce qui donne

$$V'X_{,}=\iiint x_{,}dx_{,}dy_{,}dz_{,},\quad V'Y_{,}=\iiint y_{,}dx_{,}dy_{,}dz_{,},\quad V'Z_{,}=\iiint z_{,}dx_{,}dy_{,}dz_{,}.$$

La quantité u étant le $z_{,}$ du point G', ou bien la distance GK, l'équation du plan de la section MN rapportée aux axes principaux, sera $z_{,}=u$, tandis que celle du plan M'N', par rapport aux axes Gx', Gy', Gz', sera $z=-h$; mais en appelant $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$, les coordonnées d'un point quelconque du plan M'N' par rapport aux axes principaux, on aura $z=a''x_{,}+b''y_{,}+c''z_{,}$, et l'équation de ce plan deviendra $a''x_{,}+b''y_{,}+c''z_{,}=-h$. Maintenant pour étendre les intégrales précédentes à tout le volume V', on intégrera d'abord par rapport à $z_{,}$ depuis le z de la section MN jusqu'à celui de la section M'N', ou bien depuis $z_{,}=u$ jusqu'à $z_{,}=-\frac{h}{c''}-\frac{a''}{c''}x-\frac{b''}{c''}y_{,}$. Les deux premières intégrales deviendront

$$V'X_{,}=-\left(\frac{h}{c''}+u\right)\iint x_{,}dx_{,}dy_{,}-\frac{a''}{c''}\iint x_{,}^{2}dx_{,}dy_{,}-\frac{b''}{c''}\iint x_{,}y_{,}dx_{,}dy_{,},$$
$$V'Y_{,}=-\left(\frac{h}{c''}+u\right)\iint y_{,}dx_{,}dy_{,}-\frac{a''}{c''}\iint x_{,}y_{,}dx_{,}dy_{,}-\frac{b''}{c''}\iint y_{,}^{2}dx_{,}dy_{,}.$$

ou bien en observant que l'on peut remplacer $\iint x_{,}dx_{,}dy_{,}$ par σs et $\iint y_{,}dx_{,}dy_{,}$ par σt, et désignant les trois intégrales $\iint x_{,}^{2}dx_{,}dy_{,}$, $\iint x_{,}y_{,}dx_{,}dy_{,}$, $\iint y_{,}^{2}dx_{,}dy_{,}$, par A', B', C',

$$V'X_{,}=-\frac{1}{c''}\left[\sigma s(h+c''u)+a''A'+b''B'\right],$$
$$V'Y_{,}=-\frac{1}{c''}\left[\sigma t(h+c''u)+a''B'+b''C'\right].$$

Ces quantités A', B', C', sont censées connues, elles dépendent de la nature et de l'étendue de la section MN, et de la direction des axes principaux. On trouvera aussi pour la quantité $V'Z_{,}$

$$
\begin{aligned}
V'Z_{,} &= \iiint z_{,}\,dx_{,}dy_{,}dz_{,} = \frac{1}{2}\iint\left[\left(\frac{h}{c''} + \frac{a''}{c''}x_{,} + \frac{b''}{c''}y_{,}\right)^2 - u^2\right]dx_{,}dy_{,} \\
&= \frac{1}{2c''^2}\left[(h^2 - c''^2u^2)\sigma + a''^2A' + b''^2C' + 2a''b''B' + 2h\sigma(a''s + b''t)\right].
\end{aligned}
$$

Enfin par la substitution des valeurs précédentes de $V'X_{,}$, $V'Y_{,}$, $V'Z_{,}$ les équations du mouvement de rotation deviendront

$$
(2)\left\{
\begin{aligned}
&C\frac{dr}{d\tau} + (B-A)pq = -\frac{\varrho g b''}{c''}\left[\sigma s(h + c''u) + a''A' + b''B'\right] + \frac{\varrho g a''}{c''}\left[\sigma t(h + c''u) + a''B' + b''C'\right], \\
&B\frac{dq}{d\tau} + (A-C)rp = \varrho g V a''n + \frac{\varrho g a''}{2c''^2}\left[\sigma(h^2 - c''^2u^2) + a''^2A' + b''^2C' + 2a''b''B'\right. \\
&\qquad\qquad \left. + 2h\sigma(a''s + b''t)\right] + \varrho g\left[\sigma s(h + c''u) + a''A' + b''B'\right], \\
&A\frac{dp}{d\tau} + (C-B)rq = -\varrho g V b''n - \frac{\varrho g b''}{2c''^2}\left[\sigma(h^2 - c''^2u^2) + a''^2A' + b''^2C' + 2a''b''B'\right. \\
&\qquad\qquad \left. + 2h\sigma(a''s + b''t)\right] - \varrho g\left[\sigma t(h + c''u) + a''B' + b''C'\right].
\end{aligned}
\right.
$$

Passons au cas général du mouvement des corps flottants. Dans ce qui précède, on a supposé que l'un des axes principaux $Gz_{,}$, était perpendiculaire au plan de la section MN, maintenant nous ne supposerons pas que cela ait lieu, et nous emploierons un nouveau système d'axes rectangulaires Gx'', Gy'', Gz'' dont l'un Gz'' sera perpendiculaire au plan MN. Ces nouveaux axes sont fixes dans l'intérieur du corps, et leur position par rapport aux axes principaux est connue ; nous désignerons par a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3, les cosinus des angles que font respectivement les nouveaux axes avec les axes principaux. L'équation du plan MN, par rapport aux nouveaux axes, sera $z'' = u'$, en appelant s', t', u', les coordonnées du point G' par rapport à ces axes, et celle du plan M'N' par rapport aux axes principaux $a''x_{,} + b''y_{,} + c''z_{,} = -h$. Pour avoir l'équation de ce dernier plan, par rapport aux nouveaux axes, nous désignerons les nouvelles coordonnées par x'', y'', z'', et nous aurons les formules suivantes qu'il faudra porter dans l'équation du plan M'N',

$$x_{,} = a_1 x'' + a_2 y'' + a_3 z'',$$
$$y_{,} = b_1 x'' + b_2 y'' + b_3 z'',$$
$$z_{,} = c_1 x'' + c_2 y'' + c_3 z''.$$

L'équation du plan devient par cette substitution,

$$-h = x''(a''a_1 + b''b_1 + c''c_1) + y''(a''a_2 + b''b_2 + c''c_2) + z''(a''a_3 + b''b_3 + c''c_3),$$

ou bien

$$-h = \alpha x'' + \beta y'' + \gamma z'',$$

en désignant par α, β, γ, les coefficients de x'', y'', z''. Connaissant les équations des plans des sections MN, M'N', par rapport aux axes Gx'', Gy'', Gz'', on déterminera comme nous l'avons vu tout à l'heure, les moments du volume de liquide MNM'N' par rapport à ces mêmes axes. En désignant par $X''Y''Z''$, les coordonnées relatives aux nouveaux axes du centre de gravité de ce volume, on aura

$$V'X'' = -\frac{1}{\gamma}[\sigma s'(h + \gamma u') + \alpha A'' + \beta B''] = T,$$
$$V'Y'' = -\frac{1}{\gamma}[\sigma t'(h + \gamma u') + \alpha B'' + \beta C''] = T',$$
$$V'Z'' = \frac{1}{2\gamma^2}[(h^2 - \gamma^2 u'^2)\sigma + \alpha^2 A'' + \beta^2 C'' + 2\alpha\beta B'' + 2h\sigma(\alpha s' + \beta t')] = T'';$$

A'', B'', C'', sont les valeurs des intégrales $\int\int x''^2 dx''dy''$, $\int\int x''y''dx''dy''$, $\int\int y''^2 dx''dy''$. Quant aux moments du volume V', relatifs aux axes principaux, ils seront donnés par les formules suivantes :

$$V'X_{,} = V'X''a_1 + V'Y''a_2 + V'Z''a_3 = Ta_1 + T'a_2 + T''a_3,$$
$$V'Y_{,} = V'X''b_1 + V'Y''b_2 + V'Z''b_3 = Tb_1 + T'b_2 + T''b_3,$$
$$V'Z_{,} = V'X''c_1 + V'Y''c_2 + V'Z''c_3 = Tc_1 + T'c_2 + T''c_3,$$

dans lesquelles $X_{,}$, $Y_{,}$, $Z_{,}$ expriment comme tout à l'heure, les coordonnées du centre de gravité du volume V' par rapport aux axes principaux. Il ne reste qu'à substituer ces expressions dans les équations du mouvement de rotation qui deviennent

$$(3)\quad \begin{cases} C\,\frac{dr}{d\tau} + (B - A)\,pq = \rho g V n\,(a_3 b'' - b_3 a'') \\ \qquad + \rho g\,[T(a_1 b'' - b_1 a'') + T'(a_2 b'' - b_2 a'') + T''(a_3 b'' - b_3 a'')], \\ B\,\frac{dq}{d\tau} + (A - C)\,rp = \rho g V n\,(c_3 a'' - a_3 c'') \\ \qquad + \rho g\,[T(c_1 a'' - a_1 c'') + T'(c_2 a'' - a_2 c'') + T''(c_3 a'' - a_3 c''), \\ A\,\frac{dp}{d\tau} + (C - B)\,rq = \rho g V n\,(b_3 c'' - c_3 b'') \\ \qquad + \rho g\,[T(b_1 c'' - c_1 b'') + T'(b_2 c'' - c_2 b'') + T''(b_3 c'' - c_3 b''). \end{cases}$$

Telles sont les équations générales du mouvement de rotation. Quant au mouvement de translation on verra, comme plus haut, qu'il est déterminé par l'équation

$$M\,\frac{d^2h}{d\tau^2} = -\,\rho g \cos\theta'\,(a''s + b''t + c''u + h),$$

θ' étant l'angle formé par les axes Gz, Gz'', dont l'un est vertical et l'autre perpendiculaire au plan de la section MN. Comme on a $\cos\theta' = a''a_3 + b''b_3 + c''c_3$, l'équation précédente devient

$$(4)\qquad M\,\frac{d^2h}{d\tau^2} = -\,\rho g\,(a''a_3 + b''b_3 + c''c_3)\,(a''s + b''t + c''u + h).$$

Il est important de bien sentir la nécessité d'employer les nouveaux axes Gx'', Gy'', Gz'', dont l'un Gz'' est perpendiculaire au plan de la section MN ; c'est afin de pouvoir évaluer les moments de la partie MNM'N' par rapport aux axes principaux. En effet, l'évaluation de ces moments, suppose que le volume MNM'N' peut être regardé comme un cylindre tronqué, dont les génératrices seraient parallèles à l'axe Gz''; or cette supposition ne serait point permise si l'axe Gz'' n'était point perpendiculaire au plan MN.

Si dans les quatre équations auxquelles nous venons de parvenir, on substituait à la place de p, q, r, a'', b'', c'', leurs valeurs en fonction de θ, ψ, φ, on aurait quatre équations différentielles du second ordre entre les quantités h, θ, ψ, φ, dont la connaissance suffit pour déterminer la position du mobile. Ces équations ne sont intégrables que dans des cas particuliers; l'intégration amènerait huit constantes que l'on déterminerait d'après la position primitive et le mouvement initial du mobile.

Examinons maintenant quelques cas particuliers. Nous supposerons que le corps est symétrique par rapport à un plan vertical FMIN, qui est aussi celui dans lequel a eu lieu l'impulsion initiale : toutes les forces accélératrices étant verticales, il est clair que ce plan restera vertical pendant tout le mouvement, de sorte que le corps tournera autour du point G comme autour d'un axe perpendiculaire au plan de la section FMIN. Remarquons d'ailleurs que cet axe sera un des axes principaux du corps qui passent par le centre de gravité, à cause de la symétrie du corps par rapport au plan dont il s'agit ; par suite les deux autres axes principaux seront situés dans ce plan. Nous supposerons que $Gy_{,}$ soit l'axe principal perpendiculaire au plan FMIN : si l'on a eu soin de prendre les axes Gx', Gz' dans ce plan, les axes $Gy_{,}$, Gy' se confondront. On aura alors

$$\begin{array}{lll} a = \cos\theta, & b = 0, & c = \sin\theta, \\ a' = 0, & b' = 1, & c' = 0, \\ a'' = -\sin\theta, & b'' = 0, & c'' = \cos\theta, \\ s = k\sin\alpha, & t = 0, & u = k\cos\alpha, \end{array}$$

en désignant par k la droite GG′ et par α l'angle G′GK. L'équation (1) deviendra

$$V\frac{d^2h}{d\tau^2} = -g\sigma\cos\theta\,(k\cos\alpha\cos\theta - k\sin\alpha\sin\theta + h),$$

ou bien en remplaçant h par $-\zeta - k\cos(\theta+\alpha)$, ζ étant la distance du point G′ au plan M′N′,

$$(5) \qquad V\frac{d^2\zeta}{d\tau^2} - Vk\sin\alpha\,\frac{d^2\theta}{d\tau^2} + g\sigma\zeta = 0.$$

Pour voir ce que deviennent les équations (2), remarquons que les angles φ, ψ, étant ici égaux à 90°, rendent nulles les expressions de p et r, et donnent $qd\tau = d\theta$; en outre la quantité $B' = \iint x_{,}y_{,}dx_{,}dy_{,}$ est nulle, à cause que la trace du plan FMIN sur la section MN divise celle-ci en deux parties symétriques. Il en résulte que les seconds membres de la première et de la troisième des équations (2) sont nuls, et comme p et r le sont aussi, ces équations deviennent $\frac{dr}{d\tau}=0$, $\frac{dp}{d\tau}=0$, ce qui n'apprend rien de nouveau. Mais la deuxième des équations (2) devient, en négligeant les termes du second ordre en θ et ζ,

$$\mathrm{B}\,\frac{dq}{d\tau}=-\rho g\mathrm{V}n\theta-\tfrac{1}{2}\rho g\theta\sigma\,(h^2-u^2)+\rho g\,[(h+u)\,\sigma k\sin\alpha-\mathrm{A}'\theta],$$

ou bien, en rejetant le second terme du second membre parce qu'il est du second ordre en θ, ζ,

$$\text{(6)}\qquad \mathrm{B}\frac{d^2\theta}{d\tau^2}=-\rho g\,[\theta\,(\mathrm{V}n+\mathrm{A}')+\sigma k\zeta\sin\alpha].$$

On intègre sans peine les équations (5) et (6) qui sont deux équations linéaires simultanées du second ordre : nous ne nous arrêterons donc pas à ces détails de calcul. Nous ajouterons seulement que l'on déduit des formules auxquelles on arrive, la condition de la stabilité de l'équilibre du corps flottant; ainsi l'on trouve que les valeurs de ζ et θ doivent nécessairement rester très petites pendant toute la durée du mouvement, lorsque la quantité n est positive, c'est-à-dire lorsque le centre de gravité du corps est situé au-dessous du centre de gravité du volume primitivement plongé.

Les équations (5) et (6) montrent que les mouvements de rotation et de translation ne sont pas indépendants l'un de l'autre ; ils sont intimement liés entre eux. Mais veut-on les rendre indépendants, on n'a qu'à supposer $\alpha=0$, c'est-à-dire que la droite GH passe en G' : les équations deviennent

$$\text{(7)}\qquad \frac{d^2\zeta}{d\tau^2}+\frac{g\sigma\zeta}{\mathrm{V}}=0,$$

$$\text{(8)}\qquad \frac{d^2\theta}{d\tau^2}+\frac{\rho g\theta\,(\mathrm{V}n+\mathrm{A}')}{\mathrm{B}}=0.$$

Il est facile d'arriver directement aux équations (5) et (6), de même qu'aux équations (7) et (8). Dans ce dernier cas il faut supposer le corps symétrique par rapport à la section FMIN qui contient la droite GH, et par rapport à la section passant par la même droite, et perpendiculaire à la première, ce qui revient à supposer que $Gz_{,}$ est un des axes principaux qui passent au point G, ainsi que la perpendiculaire $Gy_{,}$ au plan FMIN. Comme ces nouveaux calculs n'offriraient maintenant aucun intérêt, nous n'insisterons pas davantage à ce sujet: nous nous bornerons à tirer quelques conséquences des équations (7) et (8). Leur intégration donne

$$\zeta = \chi \cos \tau \sqrt{\frac{g\sigma}{V}}, \quad \theta = \omega \cos \tau \sqrt{\frac{\rho g (Vn + A')}{B}},$$

χ et ω étant les valeurs initiales de ζ et θ. La première de ces formules montre que le centre de gravité du corps, dont la distance au plan M'N' est exprimée par $\zeta + u$, se meut verticalement comme un pendule simple dont la longueur serait $\frac{V}{\sigma}$. La seconde montre que la droite $Gz_{,}$ qui fait avec la verticale Gz' l'angle désigné par θ, exécute des oscillations de part et d'autre de cette verticale, à la manière d'un pendule simple dont la longueur serait $\frac{B}{\rho (Vn + A')}$; l'inspection de cette même formule, montre encore que l'équilibre sera stable. lorsque n sera positif ou lorsque le centre de gravité du corps est plus bas que celui du volume de liquide déplacé.