JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

JOSEPH LIOUVILLE

Observations sur un Mémoire de M. Libri, relatif à la Théorie de la Chaleur

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 3 (1838), p. 350-354.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1838_1_3__350_0>

OBSERVATIONS

Sur un Mémoire de M. Libri, *relatif à la Théorie de la Chaleur ;*

Par Joseph LIOUVILLE.

(Présentées à l'Académie des Sciences le 19 février 1838.)

Je me suis occupé depuis quelque temps de la recherche des lois générales du mouvement de la chaleur dans une armille, en supposant la chaleur spécifique, la conductibilité intérieure et le pouvoir émissif variables d'un point à l'autre, et même variables pour chaque point déterminé en raison des températures différentes que ce point doit prendre successivement. J'espère être en mesure de soumettre bientôt au jugement de l'Académie les résultats de mon travail. Mais, avant de le terminer, j'ai dû lire les Mémoires que l'on a déjà publiés sur ce sujet et spécialement celui que M. Libri a fait imprimer à Florence en 1829 et à Berlin en 1831, dans le Journal de M. Crelle (t. VII, p. 116). Cette double (*) publication étant à mes yeux une garantie du soin que l'auteur a mis à revoir son analyse, présentée plusieurs années auparavant à cette Académie, j'ai dû l'examiner avec attention. M. Libri annonce d'ailleurs dans sa préface qu'il a trouvé et qu'il développera une méthode nouvelle d'approximation, et l'on sent quelle importance les géomètres doivent attacher aux méthodes de ce genre

---

(*) C'est *triple* qu'il faut lire, car une première édition du même mémoire a paru à Pise en 1827.

qui sont pour ainsi dire seules applicables dans les problèmes de Mécanique céleste et de Physique mathématique. Mais quel n'a pas été mon étonnement quand j'ai reconnu que les formules données par M. Libri sont inexactes et que le principe général sur lequel il s'appuie est inadmissible.

L'équation différentielle de M. Libri diffère de celle que Fourier a employée lorsqu'il a résolu pour la première fois le problème de l'armille. La raison en est simple. M. Libri rejette la loi de refroidissement connue sous le nom de *loi de Newton*, et il y substitue la loi exacte donnée par MM. Dulong et Petit. Outre les termes ordinaires, son équation contient ainsi un terme qui exprime la différence entre la loi de MM. Dulong et Petit et celle de Newton. Ce terme est multiplié par un très petit coefficient δ dont M. Libri néglige le carré et les puissances supérieures, au moins à une première approximation.

Cela étant, la valeur complète de la température doit être composée de deux parties, l'une indépendante de δ, l'autre multipliée par δ. L'équation du problème se décompose en effet en deux autres qui doivent servir à déterminer ces deux parties. L'intégration dont elles dépendent étant effectuée, il faut ensuite, à l'aide des constantes arbitraires que cette intégration introduit, représenter l'état initial des températures, c'est-à-dire l'état des températures des points de l'armille à l'époque où le refroidissement commence : cet état initial ne dépend en aucune manière du petit coefficient δ par rapport auquel on ordonne l'approximation; il resterait encore le même si δ était nul et la loi de Newton rigoureuse. Par conséquent l'état initial doit s'exprimer à l'aide de la partie de la température qui est indépendante de δ : celle que δ multiplie doit se réduire à zéro à l'origine du refroidissement.

Les raisonnements précédents nous font connaître la valeur initiale de chacune des deux parties dont la température se compose, et tous ceux qui ont l'habitude de l'analyse sentent bien que le problème n'offre plus maintenant aucune difficulté. La méthode que nous venons d'indiquer est d'ailleurs familière aux géomètres. C'est d'elle, par exemple, qu'ils font usage pour résoudre le problème du pendule qui se meut dans un milieu résistant comme le carré de la vitesse. Nous n'avons pas besoin d'ajouter ici que l'équation différentielle qui détermine la partie de la température indépendante de δ doit être intégrée complétement, puisqu'elle doit servir seule à représenter l'état initial des températures qui est tout-à-fait arbitraire.

La solution que je viens d'indiquer n'est pas celle de M. Libri. Celle que M. Libri a donnée diffère précisément de la nôtre en ce que l'auteur juge suffisant de prendre *une valeur particulière* de la partie indépendante de δ. Pour représenter l'état initial, il se sert des constantes arbitraires contenues dans les termes multipliés par δ. Nous ne pensons pas qu'aucun géomètre puisse jamais admettre cette théorie. Si M. Libri ordonne l'approximation par rapport aux puissances de δ, en négligeant le carré et les puissances supérieures de δ, cela tient sans doute à ce qu'il regarde les termes de la série en δ comme décroissant très rapidement, en sorte que chacun d'eux est très petit par rapport aux précédents. Comment donc peut-il espérer de représenter l'état initial, qui est arbitraire et indépendant de δ, à l'aide des termes très petits qui ont δ pour coefficient ? N'est-ce pas à peu près comme si les astronomes essayaient de représenter le mouvement elliptique des planètes à l'aide des seuls effets produits par leurs perturbations ?

Voici les propres paroles de l'auteur : il est nécessaire de les faire connaître avant d'aller plus loin.

« Cependant, si au lieu d'intégrer complétement la première des » équations linéaires que nous avons obtenues, pour prendre des intégrales particulières des autres, comme on le fait pour les équations » différentielles ordinaires, on commence par prendre des intégrales » particulières des premières équations que l'on veut considérer, et » que l'on n'intègre complétement que celle à laquelle on veut arrêter » l'approximation, on obtiendra le nombre de fonctions arbitraires » qui est nécessaire pour satisfaire à toutes les conditions du problème, » et on sera assuré, comme on le démontre directement, de pouvoir » éviter toujours les arcs de cercle. Nous avons effectué le calcul que » nous venons d'indiquer, sur les deux premières équations linéaires » que fournit le problème, et nous avons trouvé une formule qui se » compose de celle que M. Fourier avait déjà donnée, et d'un terme » de correction multiplié par une petite quantité. En embrassant » un plus grand nombre d'équations, on trouverait la même expression, plus des termes multipliés par les puissances ascendantes de la

» petite quantité par rapport à laquelle on a développé. La méthode
» que nous venons d'exposer peut s'appliquer à l'intégration par
» approximation d'une classe assez étendue d'équations aux différen-
» tielles partielles; mais ces recherches ne sauraient trouver place ici,
» et elles formeront le sujet d'un mémoire particulier. »

A la lecture de ce passage on va sans doute demander comment, après avoir négligé, à l'exception d'un seul, tous les termes indépendants de δ, l'auteur finit par retrouver la formule même de Fourier augmentée seulement d'une petite quantité qui la corrige. Cela tient à une nouvelle faute qui s'est glissée dans son analyse. Ne pouvant en effet représenter à l'aide de termes qui ont δ pour facteur l'état initial où δ n'entre pas, l'auteur a supprimé ce facteur δ en le fondant pour ainsi dire dans les constantes arbitraires introduites par l'intégration. Mais par là il a détruit la subordination établie entre les deux parties dont l'ensemble compose la valeur de la température; il a fait rentrer dans la première une portion de la seconde dont il négligeait tout-à-l'heure le carré : en un mot sa formule ne peut devenir propre à représenter l'état initial sans cesser en même temps de satisfaire à l'équation différentielle du problème.

Au reste, sans pousser plus loin une discussion que la double erreur commise par M. Libri rendrait à la fin trop minutieuse, je dirai qu'au premier coup d'œil jeté sur la formule on peut reconnaître qu'elle est inexacte. Son terme de correction est en effet une exponentielle dont l'exposant n'est pas déterminé (*). Cet exposant peut prendre différentes valeurs suivant qu'il a plu à l'auteur de choisir pour la

(*) En omettant un facteur fonction de l'abscisse seulement, l'exponentielle dont nous parlons est de la forme $e^{-2\left(b+\frac{am^2}{r^2}\right)t}$, où t désigne le temps et r le rayon de l'armille : a et b sont des quantités connues, tandis que m représente un nombre entier dont la valeur n'est pas déterminée par l'analyse de l'auteur. Toutefois M. Libri dit de prendre pour m le plus petit nombre entier qui ne satisfasse pas à l'équation $br^2 \pm 2am^2 = 0$; mais ce choix du plus petit nombre ne dérive nullement de ses calculs et paraît tout-à-fait arbitraire. Qu'on adopte au reste cette valeur de m ou telle autre valeur particulière qu'on voudra, la formule de M. Libri n'en deviendra pas plus exacte. Nous citerons en passant un théorème bizarre que l'auteur énonce. « Lorsque les conditions du problème permettront, dit-il, de faire » $m = 0$, le terme de correction, pour la première approximation, se réduira à partie indépendante de δ telle ou telle intégrale particulière; et de là résultent autant d'expressions diverses de la température en fonction du temps et de l'abscisse. Or, le problème du mouvement de la chaleur dans une armille étant déterminé par sa nature, la formule que l'on donne pour le résoudre doit être aussi déterminée. Nous avons donc eu raison d'annoncer que la solution de M. Libri est inadmissible.

J'adresse avec confiance ces réflexions à l'Académie. Ni dans les mots, ni dans les choses, je n'ai, je crois, blessé les convenances. On doit être indulgent pour ces fautes légères qui échappent aux meilleurs auteurs et même pour certaines fautes graves produites par la rapidité de la composition. Mais comment ne pas relever une erreur que l'on fait servir de base à une théorie fondamentale, et dont l'auteur, à la fin de son Mémoire publié après de longues méditations, annonce devoir donner bientôt des applications nouvelles.

P. S. M. Libri n'ayant fait aucune réponse aux objections contenues dans la Note qui précède, la discussion soulevée entre nous se trouve jugée par cela même. Mais, je dois dire que l'honneur d'avoir reconnu le premier l'inexactitude de ses formules ne m'appartient pas. Cette inexactitude a été en effet signalée d'abord par M. Kelland qui, dans un ouvrage sur la Théorie de la Chaleur publié à Cambridge l'année dernière et que l'on m'a communiqué depuis quelques jours seulement, s'exprime à ce sujet de la manière la plus positive (page 69). Néanmoins comme M. Kelland ne développe pas les motifs de son opinion, j'ai pensé qu'il pouvait encore être utile de publier ici l'article qu'on vient de lire.

» $-\frac{\delta}{2}e^{-2bt}$, et on trouvera qu'il est indépendant des coordonnées et qu'il ne dépend » que du temps. » Je laisse aux géomètres le soin d'apprécier ce singulier résultat. J'ajouterai seulement que si M. Libri fait ici $m = 0$, cela ne l'empêche pas, trois pages plus loin, de regarder l'exponentielle $e^{-2\left(b+\frac{am^2}{r^2}\right)t}$ comme étant toujours infiniment plus petite que $e^{-\left(b+\frac{a}{r^2}\right)t}$ pour des valeurs de t infiniment grandes, quel que soit le rapport $\frac{a}{b}$.