

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

C. STURM

Mémoire sur l'Optique

Journal de mathématiques pures et appliquées 1^{re} série, tome 3 (1838), p. 357-384.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1838_1_3_357_0

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

MÉMOIRE SUR L'OPTIQUE;

PAR C. STURM.

I.

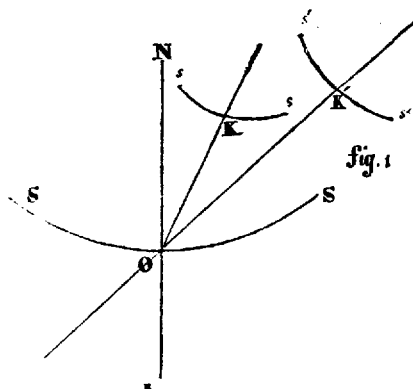
Lorsque des rayons lumineux homogènes émanés d'un point éprouvent une suite de réfractions ou de réflexions, ils se trouvent après chaque réfraction ou réflexion, constamment normaux à une certaine suite de surfaces, d'où il résulte qu'ils forment toujours deux séries de surfaces développables qui se coupent partout à angles droits suivant chaque rayon.

Cette propriété remarquable des faisceaux lumineux a été d'abord reconnue par Malus pour le cas d'une seule réfraction ou réflexion; M. Dupin et d'autres géomètres après lui l'ont démontrée dans toute sa généralité, et en ont tiré quelques conséquences. M. Hamilton a aussi publié sur ce sujet plusieurs mémoires très étendus dans *les Transactions* de l'Académie d'Irlande; il a considéré la marche des rayons, soit ordinaires, soit extraordinaires.

Mais on n'a pas, à ma connaissance, cherché à déterminer d'une manière précise les surfaces caustiques formées par les intersections successives des rayons, et qui ne sont autre chose que le lieu des centres de courbure de celles auxquelles ces rayons sont normaux, ou le lieu des arêtes de rebroussement des surfaces développables dans lesquelles le faisceau se décompose. La résolution de cette question est l'objet du mémoire suivant.

On y trouvera des formules propres à la construction des surfaces caustiques par points. Quand les rayons sont dirigés dans un même plan, ces formules se réduisent à celle que Jacques Bernouilli a donnée pour les caustiques planes, et que Petit a reproduite avec quelques développements dans la *Correspondance de l'École Polytechnique*.

Concevons un faisceau de rayons lumineux qui passent d'un milieu homogène dans un autre séparé du premier par une surface quelconque S , en suivant la loi de la réfraction ordinaire. Considérons un rayon incident quelconque qui rencontre la surface séparatrice S en un point O ; soit NOz la normale à cette surface au point O . Sur la direction du rayon incident que nous supposerons prolongée indéfiniment de part et d'autre du point O , prenons à volonté un point K , et sur celle du rayon réfracté correspondant un point K' , qui soit situé du même côté que le point K par rapport à la normale NOz . Rapportons ces points à un système quelconque d'axes rectangulaires; soient X, Y, Z , les coordonnées du point d'incidence O ; x, y, z , celles du point K , et x', y', z' celles du point K' : désignons par a, b, c , les cosinus des angles que la partie ON de la normale fait avec les trois axes rectangulaires; par α, β, γ et α', β', γ' , les cosinus des angles que font avec les mêmes axes les deux droites OK et OK' qu'on suppose dirigées du point O vers les points K et K' .



Il faut d'abord exprimer que la normale ON et les droites OK et OK' , suivant lesquelles sont dirigés le rayon incident et le rayon réfracté, se trouvent dans un même plan, ou que les deux plans NOK et NOK' coïncident.

Or, la perpendiculaire au plan NOK , élevée par le point O d'un côté de ce plan, fait avec les trois axes rectangulaires des angles dont les cosinus sont respectivement

$$\frac{by - c\beta}{\sin NOK}, \quad \frac{ac - a\gamma}{\sin NOK}, \quad \frac{a\beta - b\alpha}{\sin NOK}.$$

De même les cosinus des angles que la perpendiculaire au plan NOK' fait avec les axes, sont

$$\frac{b\gamma' - c\epsilon'}{\sin \text{NOK}'}, \quad \frac{ca' - a\gamma'}{\sin \text{NOK}'}, \quad \frac{a\epsilon' - b\alpha'}{\sin \text{NOK}'}$$

On exprime que ces deux perpendiculaires coïncident et sont en outre situées d'un même côté du plan qui contient les deux angles NOK et NOK', en posant

$$\frac{b\gamma - c\epsilon}{\sin \text{NOK}} = \frac{b\gamma' - c\epsilon'}{\sin \text{NOK}'}, \quad \frac{ca - a\gamma}{\sin \text{NOK}} = \frac{ca' - a\gamma'}{\sin \text{NOK}'}, \quad \frac{a\epsilon - b\alpha}{\sin \text{NOK}} = \frac{a\epsilon' - b\alpha'}{\sin \text{NOK}'}. \quad (1)$$

De plus, en représentant par $\frac{\lambda}{\lambda'}$ le rapport constant du sinus de l'angle d'incidence au sinus de l'angle de réfraction, on a

$$\frac{\sin \text{NOK}}{\sin \text{NOK}'} = \frac{\lambda}{\lambda'}, \quad (2)$$

puisque ces deux angles sont NOK et NOK' ou leurs suppléments. Ces équations donnent les suivantes

$$\frac{b\gamma - c\epsilon}{\lambda} = \frac{b\gamma' - c\epsilon'}{\lambda'}, \quad \frac{ca - a\gamma}{\lambda} = \frac{ca' - a\gamma'}{\lambda'}, \quad \frac{a\epsilon - b\alpha}{\lambda} = \frac{a\epsilon' - b\alpha'}{\lambda'}. \quad (3)$$

En regardant comme connues les directions de la normale ON et du rayon incident OK ou les valeurs de a, b, c et de α, ϵ, γ , deux quelconques de ces dernières équations (3) auxquelles on joindra celle-ci $\alpha'^2 + \epsilon'^2 + \gamma'^2 = 1$, suffisent pour déterminer $\alpha', \epsilon', \gamma'$ et conséquemment pour faire connaître la direction du rayon réfracté OK'. On en conclut que deux des équations (3) doivent donner la troisième comme conséquence, et peuvent être substituées aux équations (1) et (2). C'est ce qu'on peut aussi vérifier directement. Car d'abord en multipliant la première des équations (3) par a , la seconde par b , et ajoutant, on obtient la troisième; ensuite, en élevant au carré ces trois équations et ajoutant, on a

$$\frac{1}{\lambda^2} [(b\gamma - c\epsilon)^2 + (ca - a\gamma)^2 + (a\epsilon - b\alpha)^2] = \frac{1}{\lambda'^2} [(b\gamma' - c\epsilon')^2 + (ca' - a\gamma')^2 + (a\epsilon' - b\alpha')^2]$$

ou

$$\frac{\sin^2 \text{NOK}}{\lambda^2} = \frac{\sin^2 \text{NOK}'}{\lambda'^2},$$

d'où

$$\frac{\sin \text{NOK}}{\lambda} = \frac{\sin \text{NOK}'}{\lambda'},$$

(les sinus étant positifs). On peut donc remplacer dans les équations (3) le rapport de λ à λ' par celui de ces sinus; on est ainsi ramené aux formules (1) et (2).

Les relations qui existent entre les directions de la normale ON et des rayons OK, OK', sont donc toutes exprimées par les deux premières équations (3), qu'on peut écrire comme il suit :

$$\left. \begin{aligned} \frac{c - \frac{b}{c} \gamma}{\lambda} &= \frac{c' - \frac{b}{c} \gamma'}{\lambda'}, \\ \frac{a - \frac{a}{c} \gamma}{\lambda} &= \frac{a' - \frac{a}{c} \gamma'}{\lambda'}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

En désignant par k et k' les distances OK et OK', on a

$$\alpha = \frac{x - X}{k}, \quad \epsilon = \frac{y - Y}{k}, \quad \gamma = \frac{z - Z}{k}, \\ k = \sqrt{(x - X)^2 + (y - Y)^2 + (z - Z)^2},$$

et de même

$$\alpha' = \frac{x' - X}{k'}, \text{ etc.}$$

Les coordonnées X, Y, Z du point O sont liées entre elles par une équation qui est celle de la surface séparatrice S. On peut la différentier soit par rapport à X , soit par rapport à Y , en regardant Z comme fonction de ces deux variables. Nous poserons, suivant les notations usitées,

$$\frac{dZ}{dX} = P, \quad \frac{dZ}{dY} = Q, \quad \frac{dP}{dX} = R, \quad \frac{dP}{dY} = S = \frac{dQ}{dX}, \quad \frac{dQ}{dY} = T.$$

Ayant désigné par a, b, c les cosinus des angles que la normale ON a la surface S fait avec les axes, nous avons, d'après les formules connues

$$- \frac{a}{c} = P, \quad - \frac{b}{c} = Q.$$

En substituant ces valeurs de $-\frac{a}{c}$, $-\frac{b}{c}$ et celles de α , α' , ϵ , etc., dans les équations (4), on obtient

$$\left. \begin{aligned} \frac{x - X + P(z - Z)}{\lambda k} &= \frac{x' - X + P(z' - Z)}{\lambda' k'} \\ \frac{y - Y + Q(z - Z)}{\lambda k} &= \frac{y' - Y + Q(z' - Z)}{\lambda' k'} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

En supposant qu'on ait pris à volonté le point K (x , y , z) sur la direction du rayon incident, ces deux équations (5) qui remplacent les équations (1) et (2), laissent indéterminées les coordonnées x' , y' , z' du point K', puisqu'elles n'établissent entre elles que deux relations. Ce sont proprement les équations de la ligne droite que suit le rayon réfracté.

Supposons maintenant que les rayons incidents soient tous normaux à une surface quelconque s et que le point K soit celui où le rayon incident que nous considérons rencontre cette surface. Ses coordonnées x , y , z sont alors celles d'un point quelconque de la surface s dont l'équation différentiée par rapport à x et à y donnera

$$\frac{dz}{dx} = p, \quad \frac{dz}{dy} = q, \quad \frac{dp}{dx} = r, \quad \text{etc.}$$

Nous exprimerons que le rayon incident OK est normal à la surface s en son point K par les deux équations

$$\left. \begin{aligned} x - X + p(z - Z) &= 0, \\ y - Y + q(z - Z) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Pour achever de fixer la position du point K' qui est jusqu'ici un point quelconque du rayon réfracté, il nous est permis d'établir entre ses coordonnées x' , y' , z' une nouvelle relation tout-à-fait arbitraire. En faisant attention à la forme des équations (5) et (6), on est conduit à prendre l'équation suivante

$$\frac{1}{\lambda} [\sqrt{(x-X)^2 + (y-Y)^2 + (z-Z)^2} + C] = \frac{1}{\lambda'} \sqrt{(x'-X)^2 + (y'-Y)^2 + (z'-Z)^2}, \quad (7)$$

dans laquelle C est une constante arbitraire, positive, négative ou nulle.

Cette équation exprime simplement que la distance OK' du point K' au point d'incidence O est à la distance OK augmentée ou diminuée d'une quantité constante dans le rapport donné du sinus de réfraction au sinus d'incidence. On remarquera que cette équation (7) abstraction faite des deux autres (5), est celle d'une sphère qui a pour centre le point d'incidence O et pour rayon $\frac{\lambda'}{\lambda}(k + C)$. Le point $K'(x', y', z')$ déterminé par les trois équations (5) et (7), est l'un des points où cette sphère est rencontrée par le rayon réfracté.

Les neuf coordonnées X, Y, Z, x, y, z et x', y', z' sont donc liées entre elles par sept équations, savoir les équations (5), (6) et (7); et celles des deux surfaces S et s . Ainsi deux de ces coordonnées peuvent être prises à volonté, et les autres en seront des fonctions déterminées. En éliminant X, Y, Z et x, y, z entre ces sept équations, on aurait en x', y', z' l'équation de la surface s' qui est le lieu géométrique de tous les points K' .

Nous allons démontrer que tous les rayons réfractés OK' sont normaux à cette surface s' .

Supposons qu'en différentiant son équation par rapport à x' et à y' , on en tire

$$\frac{dz'}{dx'} = p', \quad \frac{dz'}{dy'} = q', \text{ etc.}$$

Nous pouvons considérer les neuf coordonnées $X, Y, Z, x, \text{ etc.}$, comme fonctions de deux variables indépendantes et différentier par rapport à l'une de ces variables, l'équation (7) que nous avons établie entre x', y', z' . En observant qu'on a

$$dZ = PdX + QdY, \quad dz = pdx + qdy, \quad dz' = p'dx' + q'dy',$$

on trouvera

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\lambda} \left[\frac{x-X+p(z-Z)}{k} dx + \frac{y-Y+q(z-Z)}{k} dy - \frac{x-X+P(z-Z)}{k} dX - \frac{y-Y+Q(z-Z)}{k} dY \right] \\ &= \frac{1}{\lambda'} \left[\frac{x'-X+p'(z'-Z)}{k'} dx' + \frac{y'-Y+q'(z'-Z)}{k'} dy' - \frac{x'-X+P'(z'-Z)}{k'} dX - \frac{y'-Y+Q'(z'-Z)}{k'} dY \right], \end{aligned}$$

équation qui se réduit en vertu des précédentes (5) et (6) à celle-ci :

$$\frac{x' - X + p'(z' - Z)}{k'} dx' + \frac{y' - Y + q'(z' - Z)}{k'} dy' = 0.$$

Comme on peut supposer que x' et y' sont les deux variables indépendantes, et qu'on a différencié par rapport à l'une d'elles, cette dernière équation se partage en deux autres, savoir

$$\left. \begin{aligned} x' - X + p'(z' - Z) &= 0, \\ y' - Y + q'(z' - Z) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Celles-ci expriment que la direction du rayon réfracté OK' est normale à la surface s' en son point $K'(x', y', z')$.

Mais ce même rayon est aussi normal à la sphère représentée par l'équation

$$\sqrt{(x' - X)^2 + (y' - Y)^2 + (z' - Z)^2} = \frac{\lambda'}{\lambda} (k + C),$$

laquelle a pour centre le point d'incidence et passe par le point (x', y', z') , son rayon étant $k' = \frac{\lambda'}{\lambda} (k + C)$.

Donc la surface s' à laquelle tous les rayons réfractés sont normaux, est l'enveloppe de toutes les sphères décrites d'après les mêmes conditions. Chaque point $K'(x', y', z')$ est le point de contact de quelque-une de ces sphères, avec la surface s' qui les enveloppe toutes. Cette enveloppe est visiblement composée de deux nappes situées des deux côtés de la surface séparatrice S ; mais ici l'on ne doit considérer qu'une seule de ces nappes.

Comme on peut dans l'équation (7) donner à la constante arbitraire C une valeur quelconque, on voit qu'il existe une infinité de surfaces telles que s' ayant toutes à la fois pour normales ces rayons réfractés; deux quelconques de ces surfaces interceptent des longueurs égales sur toutes ces normales communes, de sorte qu'il suffit de connaître une seule de ces surfaces pour avoir toutes les autres. On voit qu'elles ont toutes les mêmes centres de courbure, et que les plans des deux sections principales passant par chaque normale, sont aussi les mêmes.

Pareillement, les rayons incidents qu'on a supposés normaux à la surface s sont aussi normaux à une infinité d'autres surfaces, puisqu'on peut considérer les rayons réfractés comme incidents *et vice versa*. On sait d'ailleurs et l'on démontre aisément que si l'on porte sur les normales d'une surface à partir de ses différents points et d'un même côté, une longueur constante arbitraire, on forme une autre surface qui a les mêmes normales que la première.

Nous avons supposé jusqu'ici qu'on prenait les deux points K et K' d'un même côté de la normale NO_n . S'ils n'étaient pas d'un même côté, on verrait en suivant la même analyse, qu'il suffisait de changer k' en $-k'$ ou λ' en $-\lambda'$ dans les formules précédentes. Alors au lieu d'avoir la relation (7) qui donnait

$$\frac{k}{\lambda} - \frac{k'}{\lambda'} = \text{constante},$$

on aurait entre k et k' celle-ci

$$\frac{k}{\lambda} + \frac{k'}{\lambda'} = \text{constante}.$$

En continuant à supposer les points K et K' situés d'un même côté de la normale NO_n , nous ferons pour plus de simplicité $C = 0$, dans l'équation (7), ce qui la réduit à $\frac{k}{\lambda} = \frac{k'}{\lambda'}$, c'est-à-dire que les distances de chaque point d'incidence aux deux surfaces s et s' mesurées sur le rayon incident normal à s et sur le rayon réfracté normal à s' sont toujours entre elles dans le rapport constant des sinus des angles d'incidence de réfraction. Ainsi l'on a le théorème suivant :

Lorsque des rayons lumineux normaux à une surface passent d'un milieu homogène dans un autre séparé du premier par une surface quelconque, les rayons réfractés se trouvent normaux à une autre surface telle que les distances normales des différents points d'incidence à cette nouvelle surface sont aux distances des mêmes points à la première surface à laquelle les rayons incidents sont normaux, dans le rapport constant du sinus de l'angle de réfraction au sinus de l'angle d'incidence. En outre ces deux surfaces en fournissent une infinité d'autres auxquelles les rayons soit incidents, soit réfractés,

sont aussi normaux et qui ont entre elles deux à deux la même corrélation.

M. Dupin est arrivé le premier à ce théorème remarquable par des considérations purement géométriques, en généralisant les résultats de Malus; d'autres géomètres en ont donné ensuite de nouvelles démonstrations géométriques ou analytiques.

Si l'on conçoit d'une part toutes les surfaces s auxquelles les rayons incidents sont normaux, de l'autre toutes les surfaces s' auxquelles les rayons réfractés sont normaux, les surfaces correspondantes des deux séries se couperont deux à deux suivant une suite de courbes placées sur la surface séparatrice S . Chacune de ces courbes a pour normales les rayons incidents et réfractés qui aboutissent sur elle, d'où il suit que le plan normal à une telle courbe pour l'un quelconque de ses points est celui qui contient le rayon incident, le rayon réfracté et la normale à la surface séparatrice en ce point-là.

Des rayons lumineux qui partent d'un même point sont normaux à toutes les sphères qui ont ce point pour centre, et des rayons parallèles à une même droite sont normaux à tous les plans perpendiculaires à cette droite. Donc en vertu du théorème énoncé, si des rayons émanés d'un même point ou parallèles à une même droite, éprouvent une première réfraction, ils deviendront normaux à une certaine série de surfaces; s'ils éprouvent une seconde réfraction, ils deviendront normaux à une nouvelle série de surfaces, et ainsi de suite; en sorte que ces rayons après avoir subi autant de réfractions qu'on voudra en traversant différents milieux séparés par des surfaces quelconques, se trouveront toujours normaux à certaines surfaces.

On déduit aisément de ce qui précède la proposition que voici. Concevons que des rayons d'abord normaux à une surface s éprouvent une suite de réfractions. Désignons par k la portion d'un rayon quelconque comprise dans le premier milieu entre la surface s à laquelle ce rayon est normal, et la surface qui sépare le premier milieu du second, par l' la partie de ce rayon comprise dans le second milieu, par l'' sa partie comprise dans le troisième milieu, et ainsi de suite, puis par $k^{(n)}$, la portion de ce rayon comprise dans le dernier milieu entre la dernière surface séparatrice et l'une des surfaces auxquelles les rayons deviennent normaux dans le dernier milieu. Supposons

enfin que le rapport du sinus d'incidence au sinus de réfraction, soit celui de λ à λ' en passant du premier milieu dans le second de λ' à λ'' en passant du second dans le troisième, et ainsi de suite. Cela posé, la somme

$$\frac{k}{\lambda} + \frac{k'}{\lambda'} + \frac{k''}{\lambda''} + \dots + \frac{k^{(n)}}{\lambda^{(n)}},$$

sera constante, quel que soit le rayon que l'on considère.

Il faudrait dans cette expression changer $\frac{k}{\lambda}$ en $-\frac{k}{\lambda}$, si la portion k du rayon ne se trouvait pas dans le premier milieu; la même remarque s'applique à $k^{(n)}$.

Au surplus, on peut déduire directement cette proposition et les précédentes du principe de la moindre action, comme l'a fait M. Hamilton.

Ces propriétés relatives à la réfraction ont également lieu pour la réflexion qui n'est sous le point de vue géométrique, qu'un cas particulier de la réfraction. Car pour exprimer que la réfraction se change en réflexion, il suffit de faire $\lambda = \lambda'$ dans les formules précédentes, en supposant comme plus haut, les points K et K' situés d'un même côté de la normale NOz . On peut vérifier qu'on a alors $\cos NOK' = -\cos NOK$. Si l'on prenait les points K et K' des deux côtés de cette normale, il faudrait encore changer k' en $-k'$ et l'on aurait $\cos NOK' = \cos NOK$.

Puisque des rayons qui ont subi un nombre quelconque de réfractions ou réflexions, sont toujours normaux à une certaine surface, on en conclut d'après la théorie connue de la courbure des surfaces, qu'ils forment deux séries de surfaces développables, qui se coupent deux à deux à angles droits. Pour connaître plus particulièrement la nature de ce faisceau, il faut d'abord en considérant l'un quelconque des rayons qui le composent, déterminer les deux points où il est rencontré par les rayons infiniment voisins susceptibles de le couper. Ces points, qui appartiennent à la surface caustique, sont pour le rayon dont il s'agit, les centres du plus grand et du plus petit cercle de courbure de la surface à laquelle les rayons sont normaux. Il faut encore connaître les deux plans qui contiennent ce rayon et les rayons infiniment voisins qui le coupent, ou, ce qui revient au même, les tangentes aux

deux lignes de courbure de la surface à laquelle les rayons sont normaux pour le point où elle est rencontrée par le rayon que l'on considère. C'est là l'objet des recherches suivantes.

II.

En supposant nulle dans l'équation (7) la constante arbitraire C, on a

$$\frac{1}{\lambda} \sqrt{(x-X)^2 + (y-Y)^2 + (z-Z)^2} = \frac{1}{\lambda'} \sqrt{(x'-X)^2 + (y'-Y)^2 + (z'-Z)^2},$$

ce qui revient à

$$\frac{k}{\lambda} = \frac{k'}{\lambda'},$$

en sorte qu'on peut poser

$$k = \lambda h, \quad k' = \lambda' h,$$

h étant une certaine ligne qui disparaîtra du calcul.

Si l'on met ces valeurs de k et k' dans les équations (5), elles deviennent

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\lambda^2} [x - X + P(z - Z)] &= \frac{1}{\lambda'^2} [x' - X + P(z' - Z)], \\ \frac{1}{\lambda^2} [y - Y + Q(z - Z)] &= \frac{1}{\lambda'^2} [y' - Y + Q(z' - Z)]. \end{aligned} \right\} (9)$$

Nous avons encore les équations (6) et (8),

$$\left. \begin{aligned} x - X + p(z - Z) &= 0, \\ y - Y + q(z - Z) &= 0, \end{aligned} \right\} (6)$$

et

$$\left. \begin{aligned} x' - X + p'(z' - Z) &= 0, \\ y' - Y + q'(z' - Z) &= 0. \end{aligned} \right\} (8)$$

Nous avons déjà dit qu'on peut considérer toutes les coordonnées $X, Y, Z, x, y, z, x', y', z'$ comme fonctions de deux variables indépendantes, en sorte qu'on peut différentier par rapport à l'une

quelconque de ces variables, les six équations (9), (6), (8), que nous venons d'écrire.

Dans ce calcul on aura suivant les notations usitées

$$\begin{aligned} dz &= p dx + q dy, & dp &= r dx + s dy, & dq &= s dx + t dy, \\ dZ &= P dX + Q dY, \text{ etc.}, \\ dz' &= p' dx' + q' dy', \text{ etc.} \end{aligned}$$

En effectuant la différentiation des six équations (9), (6), (8), on obtient les suivantes (10),

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{\lambda} [dx - dX + P(dz - dZ) + (z - Z)(RdX + SdY)] \\ &= \frac{1}{\lambda^2} [dx' - dX + P(dz' - dZ) + (z' - Z)(R'dX + SdY)], \\ & \frac{1}{\lambda} [dy - dY + Q(dz - dZ) + (z - Z)(SdX + TdY)] \\ &= \frac{1}{\lambda^2} [dy' - dY + Q(dz' - dZ) + (z' - Z)(SdX + TdY)], \end{aligned} \right\} (10)$$

$$\left. \begin{aligned} dx - dX + p(p dx + q dy - P dX - Q dY) + (z - Z)(r dx + s dy) &= 0, \\ dy - dY + q(p dx + q dy - P dX - Q dY) + (z - Z)(s dx + t dy) &= 0, \\ dx' - dX + p'(p' dx' + q' dy' - P dX - Q dY) + (z' - Z)(r' dx' + s' dy') &= 0, \\ dy' - dY + q'(p' dx' + q' dy' - P dX - Q dY) + (z' - Z)(s' dx' + t' dy') &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Les axes de coordonnées auxquels on a rapporté les trois surfaces S , s , s' , ne sont assujétis qu'à la seule condition d'être rectangulaires et peuvent d'ailleurs avoir une situation quelconque dans l'espace. Les équations précédentes subsisteront toujours quelle que soit la position de ce système d'axes. Pour plus de simplicité, nous prendrons maintenant pour origine des coordonnées le point d'incidence O sur la surface séparatrice S , pour plan des xy le plan tangent à cette surface en ce point O , et conséquemment pour axe des z , la normale au même point, pour plan des xz et pour plan des yz , les plans du plus grand et du plus petit cercle de courbure de la surface S qui passent par cette normale, et sont perpendiculaires l'un à l'autre. D'après ces conventions, les quantités X , Y , Z , P , Q et S sont nulles, et les équations (10) deviennent

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\lambda^2} [dx + (zR - 1)dX] &= \frac{1}{\lambda'^2} [dx' + (z'R - 1)dX], \\ \frac{1}{\lambda^2} [dy + (zT - 1)dY] &= \frac{1}{\lambda'^2} [dy' + (z'T - 1)dY], \end{aligned} \right\} (11)$$

$$\left. \begin{aligned} (1 + p^2 + zr) dx + (pq + zs) dy &= dX, \\ (1 + q^2 + zt) dy + (pq + zs) dx &= dY, \end{aligned} \right\} (12)$$

$$\left. \begin{aligned} (1 + p'^2 + z'r') dx' + (p'q' + z's') dy' &= dX, \\ (1 + q'^2 + z't') dy' + (p'q' + z's') dx' &= dY. \end{aligned} \right\} (13)$$

On tire des deux équations (12) les valeurs suivantes de dx

$$dx = \frac{(1 + q^2 + zt) dX - (pq + zs) dY}{1 + p^2 + q^2 + [(1 + p^2)t + (1 + q^2)r - 2pqs]z + [rt - s^2]z^2},$$

$$dy = \frac{(1 + p^2 + zr) dY - (pq + zs) dX}{1 + p^2 + q^2 + [(1 + p^2)t + (1 + q^2)r - 2pqs]z + [rt - s^2]z^2}.$$

Les équations (13) donnent des valeurs analogues pour dx' et dy' .

En substituant ces valeurs de dx , dy , dx' , dy' dans les deux équations (11) on obtient deux équations qui contiennent dX ou dY comme facteur dans leurs différents termes, et comme on peut supposer que X et Y étaient les deux variables indépendantes et qu'on a différencié par rapport à l'une d'elles, ces deux dernières équations se décomposeront en trois que voici :

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\lambda^2} \left[zR - 1 + \frac{1 + q^2 + zt}{1 + p^2 + q^2 + [(1 + p^2)t + (1 + q^2)r - 2pqs]z + [rt - s^2]z^2} \right] \\ = \frac{1}{\lambda'^2} \left[z'R - 1 + \frac{1 + q'^2 + z't'}{1 + p'^2 + q'^2 + [(1 + p'^2)t' + (1 + q'^2)r' - 2p'q's']z' + [r't' - s'^2]z'^2} \right], \end{aligned} \right\} (14)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\lambda^2} \left[zT - 1 + \frac{1 + p^2 + zr}{1 + p^2 + q^2 + [(1 + p^2)t + (1 + q^2)r - 2pqs]z + [rt - s^2]z^2} \right] \\ = \frac{1}{\lambda'^2} \left[z'T - 1 + \frac{1 + p'^2 + z'r'}{1 + p'^2 + q'^2 + [(1 + p'^2)t' + (1 + q'^2)r' - 2p'q's']z' + [r't' - s'^2]z'^2} \right], \end{aligned} \right\} (15)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\lambda^2} \left[\frac{pq + zs}{1 + p^2 + q^2 + [(1 + p^2)t + (1 + q^2)r - 2pqs]z + [rt - s^2]z^2} \right] \\ = \frac{1}{\lambda'^2} \left[\frac{p'q' + z's'}{1 + p'^2 + q'^2 + [(1 + p'^2)t' + (1 + q'^2)r' - 2p'q's']z' + [r't' - s'^2]z'^2} \right]. \end{aligned} \right\} (16)$$

En joignant à celles-ci les deux équations (8), on a autant d'équations qu'il en faut pour déterminer les valeurs des cinq quantités inconnues

p', q', r', s', t' relatives à la surface s' et par suite tous les éléments de la courbure de cette surface pour chacun de ses points, en supposant connues, les quantités analogues qui se rapportent aux deux surfaces S et s . Mais pour arriver à l'interprétation géométrique de ces équations, il faut leur faire subir quelques transformations.

III.

Un point quelconque de la surface s ayant pour coordonnées x, y, z , rapportons-le à un nouveau système de coordonnées rectangulaires x_1, y_1, z_1 , ayant la même origine que x, y, z . Si l'on désigne par A, B, C les cosinus des angles que l'axe des x_1 fait avec l'axe des x, y, z ; par a, b, c et α, β, γ , les cosinus des angles que font avec les mêmes axes l'axe des y_1 et celui des z_1 , on a pour la transformation des coordonnées les formules

$$\left. \begin{aligned} x &= Ax_1 + ay_1 + az_1, \\ y &= Bx_1 + by_1 + \beta z_1, \\ z &= Cx_1 + cy_1 + \gamma z_1, \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

et réciproquement

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= Ax + By + Cz, \\ y_1 &= ax + by + cz, \\ z_1 &= \alpha x + \beta y + \gamma z. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

En mettant dans l'équation de la surface s les valeurs (17) de x, y, z , on aura l'équation de cette surface entre x_1, y_1, z_1 ,

$$z_1 = f(x_1, y_1),$$

et l'on en pourra tirer par la différentiation

$$\frac{dz_1}{dx_1} = p_1, \quad \frac{dz_1}{dy_1} = q_1, \quad \frac{dp_1}{dx_1} = r_1, \quad \frac{dp_1}{dy_1} = \frac{dq_1}{dx_1} = s_1, \quad \frac{dq_1}{dy_1} = t_1.$$

Mais on peut aussi regarder x_1, y_1, z_1 comme étant ainsi que z des fonctions de x et de y données par les formules (18).

Si l'on différencie sous ce point de vue l'équation $z = f(x, y)$ par rapport à x et à y , on aura

$$\frac{dz}{dx} = p_1 \frac{dx_1}{dx} + q_1 \frac{dy_1}{dx},$$

$$\frac{dz}{dy} = p_1 \frac{dx_1}{dy} + q_1 \frac{dy_1}{dy}.$$

Or, on tire des formules (18), en observant que $\frac{dz}{dx} = p$, $\frac{dz}{dy} = q$,

$$\frac{dx_1}{dx} = A + Cp, \quad \frac{dy_1}{dx} = a + cp, \quad \frac{dx_1}{dy} = \alpha + \gamma p,$$

$$\frac{dx_1}{dy} = B + Cq, \quad \frac{dy_1}{dy} = b + cq, \quad \frac{dx_1}{dy} = \epsilon + \gamma q,$$

de sorte que les deux équations précédentes deviennent

$$\alpha + \gamma p = p_1(A + Cp) + q_1(a + cp), \quad (19)$$

$$\epsilon + \gamma q = p_1(B + Cq) + q_1(b + cq), \quad (20)$$

si l'on différencie encore l'équation (19) par rapport à x , il vient

$$\gamma \frac{dp}{dx} = \frac{dp_1}{dx}(A + Cp) + Cp_1 \frac{dp}{dx} + \frac{dq_1}{dx}(a + cp) + cq_1 \frac{dp}{dx},$$

et comme on a

$$\frac{dp_1}{dx} = r_1 \frac{dx_1}{dx} + s_1 \frac{dy_1}{dx} = r_1(A + Cp) + s_1(a + cp).$$

$$\frac{dq_1}{dx} = s_1 \frac{dx_1}{dx} + t_1 \frac{dy_1}{dx} = s_1(A + Cp) + t_1(a + cp).$$

on obtient par la substitution

$$\gamma r = [r_1(A + Cp) + s_1(a + cp)](A + Cp) + Cp_1 + [s_1(A + Cp) + t_1(a + cp)](a + cp) + cq_1$$

En différenciant l'équation (20) par rapport à y on trouve de même

$$\gamma t = [r_1(B + Cq) + s_1(b + cq)](B + Cq) + Ctp_1 + [s_1(B + Cq) + t_1(b + cq)](b + cq) + ct_1$$

Enfin, en différentiant l'équation (19) par rapport à y , ou l'équation (20) par rapport à x , on trouve également

$$\gamma s = [r(B+Cq) + s(b+cq)](A+Cp) + Csp, + [s(B+Cq) + t(b+cq)](a+cp) + csq.$$

Supposons maintenant le plan des x, y , parallèle au plan tangent à la surface s pour le point que nous considérons sur cette surface et les plans des x, z , et y, z , parallèles aux plans des deux sections principales de cette surface pour le même point; ce qui donnera $p = 0$, $q = 0$, $s = 0$.

Les équations précédentes se réduiront à celles-ci :

$$\begin{aligned} \alpha + \gamma p &= 0, \\ \epsilon + \gamma q &= 0, \\ \gamma r &= r_1(A+Cp)^2 + t_1(a+cp)^2, \\ \gamma t &= r_1(B+Cq)^2 + t_1(b+cq)^2, \\ \gamma s &= r_1(A+Cp)(B+Cq) + t_1(a+cp)(b+cq). \end{aligned}$$

Les deux premières donnent

$$p = -\frac{\alpha}{\gamma}, \quad q = -\frac{\epsilon}{\gamma}, \quad (21)$$

d'où résulte

$$A + Cp = A - \frac{C\alpha}{\gamma} = \frac{A\gamma - C\alpha}{\gamma} = \frac{\pm b}{\gamma},$$

car on sait que

$$A\gamma - C\alpha = \pm b.$$

On a de même

$$\begin{aligned} B + Cq &= \frac{\mp b}{\gamma}; \\ a + cp &= \frac{\mp B}{\gamma}, \\ b + cq &= \frac{\pm A}{\gamma}, \end{aligned}$$

et les trois autres équations deviennent

$$\left. \begin{aligned} r &= \frac{b^2 r_1 + B^2 t_1}{\gamma^3}, \\ t &= \frac{a^2 r_1 + A^2 t_1}{\gamma^3}, \\ s &= -\frac{abr_1 + ABt_1}{\gamma^3}. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Il convient de rappeler ici la signification géométrique des quantités r_1, t_1 , quand on suppose $p_1 = 0, q_1 = 0, s_1 = 0$.

L'équation qui donne les deux rayons de courbure de la surface s rapportée aux axes des x, y, z , dont la position est quelconque à l'égard de cette surface est, comme on sait

$$(rt - s^2) \xi^2 - [(1+p^2)t + (1+q^2)r - 2pqs] \sqrt{1+p^2+q^2} \cdot \xi + (1+p^2+q^2)^2 = 0.$$

Relativement aux axes des x, y, z , pour lesquels on a $p_1 = 0, q_1 = 0, s_1 = 0$; cette équation devient

$$r_1 t_1 \rho^2 - (r_1 + t_1) \rho + 1 = 0.$$

Les racines de celle-ci sont $\frac{1}{r_1}$ et $\frac{1}{t_1}$; ce sont les valeurs des deux rayons de courbure, et comme elles doivent être aussi données par l'équation générale, on en conclut

$$\left. \begin{aligned} rt - s^2 &= (1+p^2+q^2)^2 \cdot r_1 t_1 \\ [(1+p^2)t + (1+q^2)r - 2pqs] \sqrt{1+p^2+q^2} &= (1+p^2+q^2)^2 \cdot (r_1 + t_1), \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

résultat qu'on obtiendrait également, mais d'une manière moins simple, par la substitution des valeurs (21) et (22) trouvées pour p, q, r, s, t .

IV.

Supposons actuellement que le point que nous considérons sur la surface s , soit le point **K** d'où part le rayon incident qui tombe sur la surface **S** au point **O** pris pour origine des coordonnées. Alors l'axe des z , coïncide avec la direction de ce rayon incident **OK**. le

plan des x_i, y_i lui est perpendiculaire, et les plans des $x_i z_i$ et $y_i z_i$, sont ceux des sections principales de la surface s pour le point K dont il s'agit. De là résulte

$$x_i = 0, \quad y_i = 0, \quad z_i = k = \lambda h, \quad (\text{n}^\circ \text{ II}),$$

et comme on avait en général

$$z = Cx_i + cy_i + \gamma z_i,$$

on a maintenant

$$z = \gamma \lambda h.$$

Substituons dans le premier membre de l'équation (14), cette valeur de z et les valeurs (21), (22) et (23), que nous avons trouvées n° III, pour p, q, r, s, t et pour les deux fonctions

$$rt - s^2, \quad (1 + p^2)t + (1 + q^2)r - 2pqs.$$

Nous trouverons successivement

$$\left. \begin{aligned} \pm R &= 1 + \frac{1 + q^2 + zt}{1 + p^2 + q^2 + [(1 + p^2)t + (1 + q^2)r - 2pqs]z + [rt - s^2]z^2} \\ &= \gamma \lambda h R - 1 + \frac{6^2 + \gamma^2 + \lambda h (a^2 r_i + A^2 t_i)}{a^2 + 6^2 + \gamma^2 + (r_i - t_i) \lambda h + r_i t_i \lambda^2 h^2} \\ &= \gamma \lambda h R - 1 + \frac{1 - a^2 + \lambda h (a^2 r_i + A^2 t_i)}{(1 + \lambda h r_i) (1 + \lambda h t_i)} \\ &= \gamma \lambda h R - 1 + \frac{\frac{1 - a^2}{r_i t_i} + \lambda h \left(\frac{A^2}{r_i} + \frac{a^2}{t_i} \right)}{\left(\frac{1}{r_i} + \lambda h \right) \left(\frac{1}{t_i} + \lambda h \right)}. \end{aligned} \right\} (24)$$

Nous avons dit plus haut que $\frac{1}{r_i}$ et $\frac{1}{t_i}$ sont les deux rayons de courbure de la surface s en son point $K(x_i, y_i, z_i)$ pour lequel on a $p_i = 0, q_i = 0, s_i = 0$. Pareillement $\frac{1}{R}$ et $\frac{1}{T}$ sont les deux rayons de courbure de la surface séparatrice S au point d'incidence O pour lequel on a par hypothèse $P = 0, Q = 0, S = 0$.

Comme nous n'aurons plus besoin des lettres R et r pour représenter

les dérivées partielles $\frac{dZ}{dX^2}$ et $\frac{d^2z}{dx^2}$, nous désignerons les deux rayons de courbure de la surface S par R et r; de sorte que nous remplacerons dans nos formules les dérivées R et T par $\frac{1}{R}$ et $\frac{1}{r}$.

Nous conviendrons de prendre pour la direction des z positives, celle du plus grand rayon de courbure R à partir de l'origine O, ou s'il est infini, celle du plus petit rayon r. Nous prendrons pour l'angle des coordonnées positives, celui qui contient la partie du rayon incident qui fait un angle aigu avec la direction des z positives.

Remarquons encore qu'on peut toujours faire passer la surface s par un point K pris à volonté sur la direction du rayon incident. On peut donc prendre ce point K aussi près qu'on voudra du point O, sur la partie du rayon incident qui est dans l'angle des coordonnées positives; et alors le point correspondant K' de la surface s' se trouvera aussi sur la partie positive du rayon réfracté à une petite distance de l'origine O.

Cela posé, si l'on désigne par D et d les distances du point d'incidence O aux deux centres de courbure de la surface S situés sur la direction du rayon incident OK qui lui est normal, en supposant que ces deux centres se trouvent sur la partie positive de ce rayon, on aura évidemment

$$\frac{1}{r_i} = D - \lambda h, \quad \frac{1}{r_r} = d - \lambda h.$$

Les distances D, d, changeront de signe quand elles tomberont sur la partie négative du rayon incident.

En mettant ces valeurs de $\frac{1}{r_i}$ et $\frac{1}{r_r}$ dans l'expression (24) et y remplaçant comme nous l'avons dit R par $\frac{1}{R}$, elle devient

$$\frac{\gamma \lambda h}{R} = 1 + \frac{(1 - \alpha^2)(D - \lambda h)(d - \lambda h) + \lambda h \Lambda^2 (D - \lambda h) + \lambda h \alpha^2 (d - \lambda h)}{Dd},$$

et se réduit à

$$= \alpha^2 + \lambda h \left(\frac{\gamma}{R} - \frac{\Lambda^2}{D} - \frac{\alpha^2}{d} \right),$$

en ayant égard à la relation

$$A^2 + a^2 + \alpha^2 = 1.$$

Le premier membre de l'équation (14) se trouve donc transformé dans l'expression

$$-\frac{a^2}{\lambda^2} + \frac{h}{\lambda} \left(\frac{\gamma}{R} - \frac{A^2}{D} - \frac{a^2}{d} \right),$$

son second membre deviendra pareillement

$$-\frac{a'^2}{\lambda'^2} + \frac{h}{\lambda'} \left(\frac{\gamma'}{R} - \frac{A'^2}{D'} - \frac{a'^2}{d'} \right).$$

On représente par D' et d' les distances du point d'incidence O aux deux centres de courbure de la surface s' situés sur la direction du rayon réfracté OK' ; ces centres sont les points où OK' touche les deux nappes de la surface caustique formée par les intersections successives des rayons réfractés (les distances D' , d' sont censées positives, lorsqu'elles sont comptées sur la partie de la droite OK' qui est dans l'angle des coordonnées positives, et négatives dans la direction opposée). On désigne par $A'B'C'$ et $a'b'c'$ les cosinus des angles que font avec les axes des x , y , z positives les deux droites menées par le point O perpendiculairement au rayon réfracté OK' dans les plans des deux sections principales de la surface s' passant par ce rayon OK' ; enfin, α' , β' , γ' sont les cosinus des angles que fait ce rayon avec les mêmes axes.

L'équation (14) sera donc remplacée par celle-ci

$$-\frac{a^2}{\lambda^2} + \frac{h}{\lambda} \left(\frac{\gamma}{R} - \frac{A^2}{D} - \frac{a^2}{d} \right) = -\frac{a'^2}{\lambda'^2} + \frac{h}{\lambda'} \left(\frac{\gamma'}{R} - \frac{A'^2}{D'} - \frac{a'^2}{d'} \right)$$

qui devant avoir lieu, quelle que soit h , se partage en deux autres

$$\frac{a^2}{\lambda^2} = \frac{a'^2}{\lambda'^2}, \quad \frac{1}{\lambda} \left(\frac{A^2}{D} + \frac{a^2}{d} - \gamma \right) = \frac{1}{\lambda'} \left(\frac{A'^2}{D'} + \frac{a'^2}{d'} - \gamma' \right).$$

On peut faire subir des transformations analogues aux deux autres équations (15) et (16).

Voici le résultat de tout ce calcul.

On a d'abord les équations

$$\frac{a^2}{\lambda^2} = \frac{a'^2}{\lambda'^2}, \quad \frac{c^2}{\lambda^2} = \frac{c'^2}{\lambda'^2}, \quad \frac{ac}{\lambda^2} = \frac{a'c'}{\lambda'^2}$$

qui se réduisent à

$$\alpha' = \frac{a\lambda'}{\lambda}, \quad \epsilon' = \frac{c\lambda'}{\lambda}, \quad (25)$$

elles expriment simplement, comme il est aisé de s'en assurer, que le rayon incident et le rayon réfracté sont dans un même plan passant par l'axe des z , c'est-à-dire par la normale à la surface S au point O et que le rapport des sinus des angles qu'ils font avec cette normale est $\frac{\lambda}{\lambda'}$.

On a ensuite les trois équations

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\lambda} \left(\frac{A^2}{D} + \frac{a^2}{d} - \frac{\gamma}{R} \right) &= \frac{1}{\lambda'} \left(\frac{A'^2}{D'} + \frac{a'^2}{d'} - \frac{\gamma'}{R'} \right), \\ \frac{1}{\lambda} \left(\frac{B^2}{D} + \frac{b^2}{d} - \frac{\gamma}{r} \right) &= \frac{1}{\lambda'} \left(\frac{B'^2}{D'} + \frac{b'^2}{d'} - \frac{\gamma'}{r'} \right), \\ \frac{1}{\lambda} \left(\frac{AB}{D} + \frac{ab}{d} \right) &= \frac{1}{\lambda'} \left(\frac{A'B'}{D'} + \frac{a'b'}{d'} \right). \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Celles-ci renferment toutes les relations qui existent entre les courbures des trois surfaces S , s et s' . Nous allons en développer les conséquences.

V.

Pour plus de simplicité, nous pouvons actuellement faire passer les deux surfaces s et s' par le point d'incidence O . Alors D et d , D' et d' deviennent précisément les rayons de courbure des deux surfaces s , s' pour ce point-là, tandis que A , B , C et a , b , c , A' , B' , C' et a' , b' , c' sont les cosinus des angles que les tangentes aux lignes de courbure de ces surfaces passant par le point O font avec les tangentes aux deux lignes de courbure de la surface séparatrice S et avec sa normale au point O ; α , ϵ , γ et α' , ϵ' , γ' sont les cosinus des angles que le rayon incident et le rayon réfracté font avec les mêmes axes. Il s'agit main-

tenant de déterminer par le moyen des équations (26) les quantités D' et d' , A' , B' , C' et a' , b' , c' relatives à la surface s' , en supposant connues les quantités R et r , D et d , A , B , C et a , b , c , relatives aux deux premières surfaces S et s qui sont données.

On tire d'abord des équations (2)

$$\left. \begin{aligned} \frac{A'^2}{D'} + \frac{a'^2}{d'} &= f, \\ \frac{B'^2}{D'} + \frac{b'^2}{d'} &= g, \\ \frac{A'B'}{D'} + \frac{a'b'}{d'} &= e, \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

en posant, pour abrégèr,

$$\left. \begin{aligned} f &= \frac{\gamma'}{R} + \frac{\lambda'}{\lambda} \left(\frac{A^2}{D} + \frac{a^2}{d} - \frac{\gamma}{R} \right), \\ g &= \frac{\gamma'}{r} + \frac{\lambda'}{\lambda} \left(\frac{B^2}{D} + \frac{b^2}{d} - \frac{\gamma}{r} \right), \\ e &= \frac{\lambda'}{\lambda} \left(\frac{AB}{D} + \frac{ab}{d} \right). \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

f , g , e ne se composent que de quantités connues.

On peut résoudre facilement les équations (27), en remarquant l'analogie qui existe entre elles et les formules (22) et la liaison de celles-ci avec les équations (25). Ainsi, en multipliant d'abord les équations (27) par $1 + \frac{a'^2}{\gamma'^2}$, $1 + \frac{b'^2}{\gamma'^2}$, $\frac{2a'b'}{\gamma'^2}$ respectivement et ajoutant, on trouve

$$\begin{aligned} \frac{A'^2+B'^2}{D'} + \frac{A'^2a'^2+B'^2b'^2+2A'a'B'b'}{D'\gamma'^2} + \frac{a'^2+b'^2}{d'} + \frac{a'^2a'^2+b'^2b'^2+2a'a'b'b'}{d'\gamma'^2} \\ = \frac{(\gamma'^2+a'^2)f+(\gamma'^2+b'^2)g+2a'b'e}{\gamma'^2} \end{aligned}$$

et en réduisant (à cause de $A'a' + B'b' = -C'\gamma'$),

$$\frac{1}{D'} + \frac{1}{d'} = \frac{(\gamma'^2+a'^2)f+(\gamma'^2+b'^2)g+2a'b'e}{\gamma'^2}. \quad (29)$$

En retranchant du produit des deux premières équations (27) le carré de la troisième et observant que $A'b' - B'a' = \pm\gamma'$, on obtient

$$\frac{1}{D'd'} = \frac{fg - e^2}{\gamma'^2}. \quad (29)$$

On connaît donc la somme et le produit des deux quantités $\frac{1}{D'}$ et $\frac{1}{d'}$, et par conséquent, on aura les valeurs de D' et d' par la résolution d'une équation du second degré qu'il est inutile d'écrire.

Connaissant D' et d' on pourra déterminer A' et a' par le moyen des deux équations

$$\frac{A'^2}{D'} + \frac{a'^2}{d'} = f, \quad A'^2 + a'^2 = 1 - a'^2, \quad (a' = \frac{\alpha\lambda'}{\lambda})$$

et l'on aura de même B' et b' .

On peut aussi trouver ces dernières inconnues, indépendamment de D' et d' . Car on tire des équations (27) après quelques réductions

$$\begin{aligned} \frac{a'\zeta'f + (\gamma'^2 + \zeta'^2)e}{\gamma'} &= A'a' \left(\frac{1}{D'} - \frac{1}{d'} \right) \\ - \frac{a'\zeta'g + (\gamma'^2 + a'^2)e}{\gamma'} &= B'b' \left(\frac{1}{D'} - \frac{1}{d'} \right) \\ \frac{(\gamma'^2 + a'^2)f - (\gamma'^2 + \zeta'^2)g}{\gamma'} &= (A'b' + B'a') \left(\frac{1}{D'} - \frac{1}{d'} \right), \end{aligned}$$

d'où résulte

$$\left. \begin{aligned} \frac{B'b'}{A'a'} &= - \frac{a'\zeta'g + (\gamma'^2 + a'^2)e}{a'\zeta'f + (\gamma'^2 + \zeta'^2)e}, \\ \frac{B'}{A'} + \frac{b'}{a'} &= \frac{(\gamma'^2 + a'^2)f - (\gamma'^2 + \zeta'^2)g}{a'\zeta'f + (\gamma'^2 + \zeta'^2)g}. \end{aligned} \right\} (30)$$

On connaîtra donc $\frac{B'}{A'}$ et $\frac{b'}{a'}$, ce qui suffit pour déterminer les directions des tangentes aux deux lignes de courbure de la surface s' , car $\frac{B'}{A'}$ et $\frac{b'}{a'}$ sont les tangentes trigonométriques des angles que leurs projections sur le plan des xy font avec l'axe des x , ou bien $-\frac{a'}{b'}$ et $-\frac{A'}{B'}$ sont les tangentes des angles que font avec l'axe des x les traces sur le plan des xy des plans des sections principales de la surface s' pour le point O .

Il est à remarquer que si deux rayons incidents infiniment voisins se coupent, les deux rayons réfractés correspondants ne se coupent

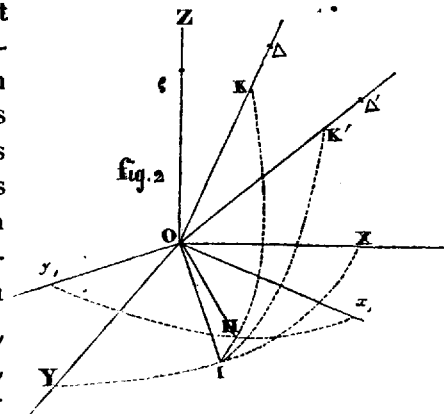
pas généralement. Car s'ils se coupaient, le plan contenant les deux rayons incidents et le plan contenant les deux rayons réfractés, se couperaient suivant la droite qui joint les deux points d'incidence infiniment voisins, c'est-à-dire suivant une tangente à la surface S ; et comme ces plans déterminent des sections principales dans les surfaces s et s' , le rapport $\frac{a}{b}$ ou $\frac{A}{B}$ serait égal à $\frac{a'}{b'}$ ou $\frac{A'}{B'}$, ce qui n'a pas lieu généralement.

Lorsqu'on a $d = D$, ce qui arrive en particulier quand les rayons incidents partent tous d'un même point, les quantités $\frac{A^2}{D} + \frac{a^2}{d}$, $\frac{B^2}{D} + \frac{b^2}{d}$, $\frac{AB}{D} + \frac{ab}{d}$, dans les formules précédentes se réduisent à $\frac{1-a^2}{D}$, $\frac{1-b^2}{D}$ et $-\frac{ab}{D}$ respectivement. Une simplification semblable a lieu quand on a $d' = D'$.

Ces formules s'appliqueront à la réflexion, en y faisant $\lambda' = \lambda$ et $a' = a$, $\epsilon' = \epsilon$, $\gamma' = -\gamma$. Si l'on a de plus $d = D$, on verra d'après les formules (30) que les plans des sections principales de la surface s' sont toujours les mêmes, quelle que soit la grandeur de D , ce que M. Dupin avait déjà remarqué.

VI.

On peut encore déterminer la courbure de toute section faite dans la surface s' par un plan mené à volonté par sa normale qui n'est autre que le rayon réfracté. Soient OZ la normale à la surface séparatrice S pour le point O , XOY son plan tangent, XOZ et YOZ les plans de ses courbures principales; ces trois plans sont pris pour ceux des coordonnées x , y , z . Soient OK la direction du rayon incident normale à la surface s , OK' celle du rayon réfracté normale à s' , x, Oy , le plan tangent à s et Ox, Oy , les tangentes à ses lignes de cour-



bure. Traçons dans le plan XOY tangent à S une ligne droite OI et faisons passer par cette droite et par les lignes OK, OK', deux plans IOK, IOK'; soient Δ et Δ' les rayons de courbure des sections normales faites par ces deux plans dans les surfaces s, s', et ρ le rayon de courbure de la section normale faite dans la surface S par le plan IOZ.

Cela posé, en multipliant les trois équations (26) par cos²IOX, cos²IOY et 2 cos IOX cos IOY, puis ajoutant, on trouve

$$\frac{1}{\lambda} \left[\frac{A^2 \cos^2 IOX + B^2 \cos^2 IOY + 2AB \cos IOX \cos IOY}{D} + \frac{a^2 \cos^2 IOX + b^2 \cos^2 IOY + 2ab \cos IOX \cos IOY}{d} - \gamma \left(\frac{\cos^2 IOX}{R} + \frac{\cos^2 IOY}{r} \right) \right] \\ = \frac{1}{\lambda'} \left[\frac{A'^2 \cos^2 IOX + B'^2 \cos^2 IOY + 2A'B' \cos IOX \cos IOY}{D'} + \frac{a'^2 \cos^2 IOX + b'^2 \cos^2 IOY + 2a'b' \cos IOX \cos IOY}{d'} - \gamma' \left(\frac{\cos^2 IOX}{R} + \frac{\cos^2 IOY}{r} \right) \right]. \quad (31)$$

Mais la formule connue d'Euler donne

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\cos^2 IOX}{R} + \frac{\cos^2 IOY}{r};$$

on a ensuite

$$\cos IOx, = A \cos IOX + B \cos IOY, \\ \cos IOy, = a \cos IOX + b \cos IOY;$$

et en supposant que le plan IOK coupe le plan x,Oy, tangent à la surface s suivant OH,

$$\cos IOx, = \cos IOH \cos HOx, = \sin IOK \cos HOx,, \\ \cos IOy, = \cos IOH \cos HOy, = \sin IOK \cos HOy,.$$

Donc le premier membre de l'équation (31) devient

$$\frac{1}{\lambda} \left[\sin^2 IOK \left(\frac{\cos^2 HOx,}{D} + \frac{\cos^2 HOy,}{d} \right) - \frac{\gamma}{\rho} \right],$$

ou bien encore,

$$\frac{1}{\lambda} \left(\frac{\sin^2 IOK}{\Delta} - \frac{\gamma}{\rho} \right),$$

car la formule d'Euler donne

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{\cos^2 HOx}{D} + \frac{\cos^2 HOy}{d}.$$

Le second membre de l'équation (31) se transforme de même, de sorte que cette équation devient la suivante

$$\frac{1}{\lambda} \left(\frac{\sin^2 IOK}{\Delta} - \frac{\gamma}{\rho} \right) = \frac{1}{\lambda'} \left(\frac{\sin^2 IOK'}{\Delta'} - \frac{\gamma'}{\rho'} \right). \quad (32)$$

Telle est la relation très simple qui existe entre les rayons de courbure des sections normales faites dans les trois surfaces S, s, s' , par les trois plans IOZ, IOK, IOK' dont la ligne de commune intersection OI est prise à volonté sur le plan tangent à la première surface S . On aura donc le rayon Δ' quand on connaîtra ρ et Δ .

En particulier, si l'on prend OI perpendiculaire au plan qui contient la normale OZ et les rayons incident et réfracté OK, OK' , on aura

$$\frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{\gamma}{\rho} \right) = \frac{1}{\lambda'} \left(\frac{1}{\Delta'} - \frac{\gamma'}{\rho'} \right), \quad (33)$$

d'où l'on peut conclure que les trois centres de courbure correspondants sont en ligne droite; et si OI est la trace de ce même plan ZOK sur le plan tangent à S , on aura

$$\frac{1}{\lambda} \left(\frac{\gamma^2}{\Delta} - \frac{\gamma}{\rho} \right) = \frac{1}{\lambda'} \left(\frac{\gamma'^2}{\Delta'} - \frac{\gamma'}{\rho'} \right). \quad (34)$$

Ici ρ, Δ et Δ' sont les rayons de courbure des sections faites dans les trois surfaces S, s, s' par le plan dont il s'agit. Cette dernière formule suffit pour la construction des surfaces caustiques lorsque les trois surfaces S, s, s' sont des surfaces cylindriques dont les génératrices sont perpendiculaires à un même plan, ou des surfaces de révolution autour d'un même axe; dans ce dernier cas l'une des deux nappes de chaque surface caustique se réduit à une portion de ligne droite placée sur l'axe, et la formule (34) détermine les points de l'autre nappe. Les deux surfaces développables qui passent par un rayon quelconque, sont l'une un plan passant par l'axe, l'autre un cône droit de révolution autour de ce même axe. Ces cas reviennent à celui où l'on ne considère qu'un faisceau de rayons lumineux dirigés dans un seul et même plan suivant les normales à une courbe tracée sur ce plan et réfractés ou réfléchis à la rencontre d'une autre courbe sur le

même plan. Alors la formule (34) coïncide avec celle que Bernoulli a donnée pour les caustiques planes et qu'il est très facile d'établir directement.

VII.

La détermination des quantités $D', d', \Delta', A', B', C'$ et a', b', c' , qui se rapportent à la courbure de la surface s' pour le point O , peut encore être ramenée à la construction de la courbe que M. Dupin a nommée *indicatrice*.

On sait que si l'on prend sur une surface un point quelconque O , et si l'on coupe cette surface par un plan parallèle à son plan tangent au point O , et qui en soit infiniment voisin, la section est une ellipse ou une hyperbole dont les diamètres sont proportionnels à la racine carrée des rayons de courbure des sections faites dans la surface par des plans normaux passant par ces diamètres. Si l'on imagine que ces diamètres grandissent dans un rapport infini, on aura alors une ellipse ou une hyperbole s'éloignant à distance finie du centre O , et qui sera *l'indicatrice* de la surface pour le point O . Les carrés des demi-axes de cette courbe sont proportionnels aux deux rayons de courbure principaux de la surface et ont les mêmes signes que ces rayons; les deux plans normaux passant par les axes de la courbe, sont ceux des sections principales de la surface.

Ainsi, en supposant la surface S rapportée aux axes des x, y, z , que nous avons adoptés précédemment, l'indicatrice de cette surface S pour le point O , tracée sur son plan tangent, qui est le plan des xy , pourra être représentée par l'équation

$$\frac{x^2}{R} + \frac{y^2}{r} = 1. \quad (C)$$

En supposant la surface s rapportée aux axes des x', y', z' , qui ont été définis plus haut, nous prendrons pour son indicatrice sur son plan tangent $x'Oy'$, la courbe donnée par l'équation

$$\frac{x'^2}{\gamma D} + \frac{y'^2}{\gamma d} = 1.$$

Cette équation représente aussi le cylindre droit qui a pour base cette indicatrice, et dont les génératrices sont parallèles à la direc-

tion du rayon incident OK qui est l'axe des z . L'équation de ce cylindre rapporté aux axes des x, y, z , est

$$\frac{(Ax + By + Cz)^2}{\gamma D} + \frac{(ax + by + cz)^2}{\gamma d} = 1.$$

en y faisant $z = 0$, on aura pour l'équation de sa trace sur le plan XOY tangent à la surface S,

$$\left(\frac{A^2}{D} + \frac{a^2}{d}\right)x^2 + \left(\frac{B^2}{D} + \frac{b^2}{d}\right)y^2 + 2\left(\frac{AB}{D} + \frac{ab}{d}\right)xy = \gamma. \quad (c)$$

De même, en prenant les carrés des demi-axes de l'indicatrice de la surface s' égaux à $\gamma'D'$ et $\gamma'd'$, le cylindre droit qui a pour base cette indicatrice et ses génératrices parallèles au rayon réfracté OK', coupe le plan des xy tangent à S suivant la courbe représentée par l'équation

$$\left(\frac{A'^2}{D'} + \frac{a'^2}{d'}\right)x^2 + \left(\frac{B'^2}{D'} + \frac{b'^2}{d'}\right)y^2 + 2\left(\frac{A'B'}{D'} + \frac{a'b'}{d'}\right)xy = \gamma'. \quad (c')$$

Cela posé, si l'on ajoute l'équation (C), multipliée par $\frac{\gamma'}{\lambda} - \frac{\gamma}{\lambda}$, à l'équation (c) multipliée par $\frac{1}{\lambda}$, et si l'on a égard aux formules (26), on obtiendra l'équation (c'). Ainsi, connaissant les courbes (C) et (c) ou leurs équations, il est facile d'obtenir comme on voit, l'équation de la courbe (c'), ou seulement trois points de cette courbe, dont la projection sur un plan perpendiculaire au rayon réfracté OK' sera l'indicatrice de la surface s' pour le point O. On voit aussi que ces trois courbes C, c, c', se coupent aux quatre mêmes points, aux extrémités de deux diamètres communs; donc si l'on construit les deux premières courbes ou seulement leurs points d'intersection, la courbe c' devra passer par ces points, si toutefois ils sont réels, et il suffira pour achever de déterminer cette courbe, d'en connaître un autre point quelconque; par exemple l'un de ceux où elle rencontre, soit la trace du plan ZOK sur le plan XOY tangent à S, soit la perpendiculaire à cette trace, ce qui est facile d'après les formules (33) et (34).

Ces constructions peuvent être effectuées par la géométrie descriptive.