JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

M. CHASLES

Mémoire sur les lignes conjointes dans les coniques

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 3 (1838), p. 385-434.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1838_1_3__385_0>

MÉMOIRE

Sur les lignes conjointes dans les coniques ;

PAR M. CHASLES.

§ I. *Considérations préliminaires. Définition des lignes conjointes.*

1. M. Terquem a appelé *lignes conjointes* deux droites tracées dans le plan d'une conique, de manière que si on les prend pour axes coordonnés, les coefficients des carrés des deux coordonnées dans l'équation de la courbe soient égaux. (Voir *Journal de Mathématiques*, 3e volume, p. 17.)

Ainsi l'équation d'une conique, rapportée à deux axes obliques, étant

$$A(x^2 + y^2) + Bxy + Cx + Dy + 1 = 0,$$

les deux axes sont deux *lignes conjointes*.

La courbe rencontre l'axe des x en deux points dont les distances à l'origine sont les racines de l'équation

$$Ax^2 + Cx + 1 = 0.$$

Le produit de ces deux distances est $\frac{1}{A}$. Le produit des distances de l'origine aux points où la courbe rencontre l'axe des y, est le même. Cela prouve que les quatre points de rencontre de la conique par les deux axes coordonnés sont sur une circonférence de cercle, ainsi que l'a remarqué M. Terquem.

Réciproquement, si quatre points d'une conique sont sur une circonférence de cercle, les deux droites qui passent par ces quatre points sont deux *lignes conjointes;* c'est-à-dire que si on les prend pour axes coordonnés, les coefficients de x^2 et de y^2 dans l'équation de la courbe seront égaux.

Car soit

$$Ax^2 + A'y^2 + Bxy + Cx + Dy + 1 = 0$$

l'équation de la courbe, rapportée à ces deux droites prises pour axes coordonnés. Les produits des distances de l'origine aux points où la courbe rencontre ces droites ont pour expressions $\frac{1}{A'}$ et $\frac{1}{A}$. Ces produits doivent être égaux, puisque les quatre points sont sur un cercle; on a donc $A = A'$.

Ainsi cette propriété des *lignes conjointes,* de rencontrer la conique en quatre points situés sur une circonférence de cercle, est caractéristique et suffit pour définir ces lignes complétement d'une manière purement géométrique. C'est cette définition que nous adopterons et dont nous allons nous servir pour démontrer différentes propriétés des lignes conjointes.

2. La première définition, employée par M. Terquem et fondée sur la forme de l'équation de la conique, convient particulièrement quand on veut traiter cette théorie par l'analyse; elle paraît aussi, au premier abord, offrir l'avantage d'une plus grande généralité, parce qu'elle s'applique au cas où les deux lignes conjointes ne rencontrent pas la conique, comme au cas où elles la rencontrent; tandis que la seconde définition, d'après son énoncé, paraît impliquer la condition de *réalité* des quatre points de rencontre. Mais nous observerons que, dans le plan de deux coniques situées d'une manière quelconque l'une par rapport à l'autre, il existe toujours un système de deux droites qui représente une des coniques, en nombre infini, qu'on peut faire passer par les quatre points d'intersection, réels ou imaginaires, des deux courbes proposées. Ces deux droites jouissent de deux sortes de propriétés, dont les unes sont *permanentes*, c'est-à-dire subsistent toujours, quelle que soit la figure proposée, et dont les autres existent dans certains cas et n'existent pas dans d'autres cas; celles-ci sont les propriétés *contingentes* de la figure. Cette circonstance, que, dans le cas où les coniques se coupent, les deux droites en question passent par

leurs points d'intersection, offre une de leurs propriétés *contingentes*. Pour donner un exemple d'une propriété *permanente*, nous dirons que : *si d'un point quelconque pris sur l'une de ces droites, on mène quatre tangentes aux deux coniques, les droites qui joindront les points de contact sur la première aux points de contact sur la seconde, concourront deux à deux en deux points fixes* (*). Quand les deux coniques sont des cercles, une des deux droites est située à l'infini, et l'autre est celle qu'on a appelée *axe radical*. Cette définition, fondée sur une propriété où entre une expression radicale, ne pouvait convenir aux deux droites relatives à deux coniques quelconques. J'ai appelé celles-ci *axes de symptose* des deux coniques. Ainsi deux *lignes conjointes* dans une conique sont les *axes de symptose* communs à cette courbe et à un cercle. Je conserverai la dénomination de *lignes conjointes* pour le cas spécial d'une conique et d'un cercle; et j'appellerai ce cercle le *cercle conjoint* relatif à ces deux droites, ainsi que l'a fait M. Terquem.

Je ferai usage, dans ce qui va suivre, d'un principe que j'ai développé dans mon *Aperçu historique sur l'origine et le développement des Méthodes en Géométrie*, sous le nom de *Principe des relations contingentes*, et qui consiste en ce que les propriétés d'une figure qu'on a démontrées en s'appuyant sur des relations contingentes de la figure, ont lieu encore dans le cas où ces relations contingentes ont disparu et n'offrent plus leur secours pour la démonstration des propriétés en question.

D'après ce principe, les propriétés des *lignes conjointes*, que nous aurons démontrées pour le cas où le cercle rencontre la conique en quatre points, subsisteront dans les cas où deux de ces points, ou tous les quatre, seront imaginaires.

Deux lignes conjointes étant toujours les *axes de symptose* de la conique et d'un cercle, on conçoit de suite que les propriétés générales des axes de symptose de deux coniques leur seront applicables. Nous ne démontrerons ici que celles de ces propriétés qui auront quelque chose de particulier au cercle.

(*) J'ai démontré cette proposition dans le tome XVIII des *Annales de Mathématiques* de M. Gergonne, p. 284.

Nous ferons usage exclusivement de considérations géométriques. On verra peut-être dans le nombre et la variété des propositions auxquelles cette méthode va nous conduire, une preuve de la facilité qu'elle peut procurer dans une foule de questions.

§ II. *Propriétés des lignes conjointes relatives à un cercle.*

3. On sait que si par un point quelconque S pris dans le plan d'une conique, on mène deux transversales qui la rencontrent en A, A', et B, B'; et si l'on appelle Oa, Ob les deux demi-diamètres de la courbe qui sont parallèles à ces deux transversales, on aura

$$\frac{SA.SA'}{SB.SB'}=\frac{\overline{Oa}^2}{\overline{Ob}^2}.$$

Si les deux transversales sont deux lignes conjointes, les quatre points A, A', B, B', seront sur un cercle; on aura donc.... $SA.SA' = SB.SB'$, et par suite $Oa = Ob$. Réciproquement, quand les deux demi-diamètres Oa, Ob sont égaux, les deux tranversales sont deux lignes conjointes; or deux diamètres égaux d'une conique font des angles égaux avec l'un de ses axes principaux; donc

Deux lignes conjointes, dans une conique, font des angles égaux avec l'un des axes principaux de la courbe.

Et réciproquement, *deux droites qui font des angles égaux avec un axe principal d'une conique sont deux lignes conjointes.*

4. Il suit de là, que *la droite qui divise en deux également l'angle de deux lignes conjointes, et la droite qui divise en deux également le supplément de cet angle, sont parallèles aux deux axes principaux de la conique.*

5. Quand un cercle rencontre une conique en quatre points réels, il y a trois systèmes de deux lignes conjointes qui sont deux côtés opposés, ou les deux diagonales du quadrilatère qui a pour sommets ces quatre points. Il suit donc de la proposition ci-dessus, que :

Quand un quadrilatère est inscrit dans un cercle, les droites dont chacune divise en deux également l'angle ou le supplément de l'angle *de deux côtés opposés, ou des deux diagonales, sont parallèles, trois à trois, à deux droites rectangulaires.*

6. Concevons deux droites également inclinées sur un axe fixe, et deux autres droites également inclinées aussi sur cet axe; ces deux dernières rencontreront les deux premières en quatre points qui seront sur un cercle.

Car soient A, B, C, D ces quatre points; si le cercle mené par les trois premiers ne passait pas par le quatrième, il rencontrerait CD en un point D′, et l'on conclurait de l'hypothèse et de la proposition précédente que les deux droites AD′ et AD sont parallèles. Donc le point D′ coïncide avec le point D.

Il suit de là que :

Deux lignes conjointes quelconques rencontrent deux autres lignes conjointes en quatre points qui sont sur un cercle.

Nous verrons plus loin (19), comme corollaire d'une proposition beaucoup plus générale, que ce cercle passe par les points d'intersection des deux cercles conjoints.

7. *Le point de rencontre de deux lignes conjointes a la même polaire dans la conique et dans le cercle conjoint.*

Car soient A, B, C, D les points de rencontre de la conique et du cercle, et E le point de concours des deux lignes conjointes AB, CD. La polaire du point E, par rapport à l'une des deux courbes est la droite qui coupe harmoniquement les deux côtés AB, CD du quadrilatère, c'est-à-dire en deux points m, n tels que l'on a

$$\frac{EA}{EB} = \frac{mA}{mB}, \quad \frac{EC}{ED} = \frac{nC}{nD}.$$

Ainsi cette polaire est la même dans les deux courbes. Cette droite, d'après une propriété connue du quadrilatère (*), passe par le point de concours des deux autres côtés opposés BC, AD du quadrilatère ABCD, et par le point de rencontre de ses deux diagonales AC, BD.

8. La polaire d'un point, par rapport à un cercle, est perpendiculaire au rayon qui passe par ce point. On conclut de là que :

(*) *Géométrie de position*, page 282. — *Essai sur la théorie des Transversales*, page 74.

Quand un quadrilatère est inscrit dans un cercle, la perpendiculaire abaissée du point de rencontre des deux diagonales sur la droite qui joint les points de concours des côtés opposés, passe par le centre du cercle.

9. Il suit de là que :

Étant données deux lignes conjointes, le centre du cercle conjoint est sur la droite menée par leur point de rencontre perpendiculairement à la polaire de ce point prise par rapport à la conique.

Ce théorème est un de ceux qu'a démontrés M. Terquem (*Voyez* p. 18 du tome III de ce Journal).

Si le point d'intersection des deux lignes conjointes est sur la conique, la polaire de ce point sera la tangente à la conique ; le centre du cercle sera donc sur la normale.

Cela se démontre directement. Car si deux des quatre points d'intersection d'une conique par deux lignes conjointes sont infiniment voisins, le cercle qui passera par ces quatre points sera tangent à la conique. Son centre sera donc sur la normale.

10. On peut prendre aussi pour les deux lignes conjointes, la tangente à la courbe, qui joint les deux points infiniment voisins, et la droite qui joint les deux autres points. De sorte que,

Quand un cercle est tangent à une conique, la tangente au point de contact, et la droite qui joint les deux points d'intersection du cercle et de la courbe, sont également inclinées sur l'un des axes principaux de la conique.

11. Si le cercle est osculateur, les deux lignes conjointes seront la tangente et la droite menées du point de contact au point de rencontre du cercle et de la courbe. Donc

Le cercle osculateur en un point d'une conique, passe par un deuxième point de cette courbe, qui est à l'extrémité de la corde menée du point de contact, et faisant avec l'un des axes principaux un angle égal à celui que la tangente au point de contact fait avec cet axe.

Ce théorème offre une construction très simple du cercle osculateur en un point d'une conique.

12. *Si l'on a dans une parabole plusieurs cordes parallèles entre elles, la somme des perpendiculaires abaissées des deux extrémités de chacune d'elles sur l'axe de la courbe sera constante.*

En effet, la somme des perpendiculaires abaissées des extrémités d'une même corde sur l'axe de la parabole sera égale à deux fois la perpendiculaire abaissée du point milieu de cette corde sur cet axe. Mais les milieux de toutes les cordes sont sur une même droite parallèle à l'axe; donc ils sont tous également éloignés de cet axe. Ce qui démontre le théorème énoncé.

13. Une corde étant menée dans une parabole, son milieu est situé sur la parallèle à l'axe, menée par le point de contact de la parabole et de sa tangente parallèle à la corde. Il s'ensuit que si l'on a deux lignes conjointes relatives à un cercle quelconque, comme ce sont deux cordes également inclinées sur l'axe, les tangentes qui leur seront parallèles toucheront la parabole en deux points situés de part et d'autre, et à égale distance, de l'axe de la courbe. Les milieux des deux cordes seront donc aussi situés de part et d'autre et à égale distance de l'axe. D'où l'on conclut, que les sommes des perpendiculaires abaissées des deux extrémités de chaque corde sur l'axe sont égales et de signes contraires. On a donc ce théorème :

Étant menées deux lignes conjointes dans la parabole, la somme algébrique des perpendiculaires abaissées des points où elles rencontrent la courbe, sur son axe, est nulle.

Ou, en d'autres termes,

Un cercle quelconque étant tracé dans le plan d'une parabole; la somme des perpendiculaires abaissées sur l'axe de la courbe, des quatre points où le cercle la rencontre, est toujours égale à zéro.

Ce théorème est connu, et paraît dû à J. Gregory, qui l'a démontré par d'autres considérations. (Voir *Geometriæ pars universalis*, etc.; Patavii, 1668, in-4°, page 130.)

14. On conclut de ce théorème, que :

Le cercle osculateur en un point d'une parabole la rencontre en un autre point dont la distance à l'axe de la courbe est triple de la distance du point de contact à cet axe.

15. *Deux lignes conjointes étant menées dans le plan d'une conique, toute autre conique qui passera par leurs quatre points d'intersection aura ses axes principaux parallèles à ceux de la première.*

Car soient A, A′ et B, B′ les points où les deux lignes conjointes rencontrent la conique, et S leur point de concours, on aura

$$SA.SA' = SB.SB'.$$

Puisque la seconde conique passe aussi par les quatre points A, A′, B, B′, cette équation prouve que les deux droites AA′, BB′ sont aussi des lignes conjointes par rapport à elle. C. Q. F. D.

16. Réciproquement, *Quand deux coniques ont leurs axes principaux parallèles entre eux, un à un respectivement, leurs quatre points d'intersection sont sur un cercle.*

En effet, soient A, A′, B, B′, les quatre points d'intersection ; soit S le point de concours des deux droites AA′, BB′. Soient Oa, Ob et $O'a'$, $O'b'$ les demi-diamètres des deux coniques parallèles aux deux droites AA′, BB′. On aura

$$\frac{SA.SA'}{SB.SB'} = \frac{\overline{Oa}^2}{\overline{Ob}^2} = \frac{\overline{O'a'}^2}{\overline{O'b'}^2},$$

d'où

$$\frac{Oa}{Ob} = \frac{O'a'}{O'b'}.$$

Concevons que par le point a' on fasse passer une troisième conique semblable à la première, et qui ait ses axes principaux dirigés suivant ceux de la seconde. Cette équation fait voir que cette courbe passera aussi par le point b'; donc $O'a'$ et $O'b'$ seront deux demi-diamètres communs à la seconde et à la troisième conique ; et puisque ces deux courbes ont les mêmes axes principaux en direction, ces deux demi-diamètres sont également inclinés sur l'un de ces axes, parce que dans l'intersection des deux courbes, tout est égal de part et d'autre de chacun de ces axes principaux. Ainsi les deux demi-diamètres $O'a'$, $O'b'$ sont également inclinés sur un axe principal de la seconde conique

Ce qui prouve que les deux droites AA′, BB′, sont des lignes conjointes par rapport à cette conique. Il en est de même par rapport à l'autre courbe. Le théorème est donc démontré.

17. Il suit de là que : *Quand deux paraboles ont leurs axes perpendiculaires entre eux, elles se coupent en quatre points qui sont sur un cercle.*

18. Il suit encore du théorème, que : *Quand une hyperbole a pour asymptotes deux lignes conjointes d'une conique, elle rencontre cette courbe en quatre points qui sont sur un cercle.*

Nous verrons (art. 65) que ce cercle est concentrique au cercle conjoint relatif aux deux lignes conjointes.

19. *Si dans le plan d'une conique* U *on décrit deux cercles quelconques* A, A′ *et deux coniques* B, B′ *dont la première passe par les quatre points d'intersection (réels ou imaginaires) du premier cercle et de la conique* U, *et la seconde par les quatre points d'intersection du second cercle et de cette courbe* U;

1°. *Les deux coniques* B, B′ *se couperont en quatre points qui seront sur un cercle ;*

Et 2°. *Ce cercle passera par les points d'intersection des deux cercles proposés.*

En effet, d'après le théorème (15), les deux coniques B, B′, auront leurs axes principaux parallèles à ceux de la conique U, et conséquemment parallèles entre eux, un à un. Ces deux coniques se couperont donc en quatre points situés sur un cercle (16).

Il reste à prouver que ce cercle passera par les points d'intersection des deux cercles proposés.

Que l'on fasse la perspective de la figure sur un plan; les deux cercles proposés seront remplacés, en perspective par deux coniques quelconques ayant deux points d'intersection imaginaires sur la droite qui correspondra en perspective à l'infini de la première figure ; et le troisième cercle deviendra une conique passant par ces deux mêmes points imaginaires. D'après le principe des relations *contingentes*, nous pouvons raisonner comme si ces points étaient réels. Nous en conclurons donc ce théorème général :

Étant données trois coniques quelconques U, A, A′ *sur un plan, si l'on en décrit deux autres* B, B′, *dont la première passe par les points d'intersection des deux courbes* U *et* A, *et la seconde par les points d'intersection des deux courbes* U *et* A′; *par les quatre points d'intersection de ces deux nouvelles coniques* B, B′, *et par deux des quatre points d'intersection des deux premières* A, A′, *on pourra faire passer une conique.*

Or les quatre points d'intersection des deux coniques B, B′, et un seul des quatre points d'intersection des deux courbes A, A′ suffisent pour déterminer une conique. Cette courbe passe donc par chacun des trois autres points d'intersection de A et A′; c'est-à-dire que

Par les quatre points d'intersection des deux coniques B, B′, *on peut mener une conique qui passe par les quatre points d'intersection des deux premières* A, A′ (*).

Cette conique sera un cercle si ces deux A et A′ sont des cercles.

Le théorème est donc démontré.

20. Si les deux cercles A, A′ sont concentriques, pour qu'un troisième cercle ait les mêmes points d'intersection avec eux, il faut qu'il leur soit concentrique. On a donc ce théorème :

(*) Voici une seconde démonstration de ce théorème qui est important à cause des nombreux corollaires qui en découlent. Soient

$$F = 0, \quad \varphi = 0, \quad \text{et} \quad \varphi' = 0,$$

les équations des trois coniques U, A, A′. Celles des deux coniques B, B′ seront de la forme

$$F + \lambda\varphi = 0, \quad \text{et} \quad F + \lambda'\varphi' = 0;$$

λ et λ' étant des constantes.

De ces deux équations, on tire

$$\lambda\varphi - \lambda'\varphi' = 0,$$

qui représente une troisième conique passant par les points d'intersection des deux B, B′. Mais on satisfait à cette équation en faisant $\varphi = 0$ et $\varphi' = 0$; donc la conique qu'elle représente passe aussi par les points d'intersection des deux premières coniques A, A′. Ce qui démontre le théorème.

Si dans le plan d'une conique U *on décrit deux cercles qui aient le même centre, et qu'on mène deux autres coniques quelconques dont la première passe par les points d'intersection du premier cercle et de la conique* U, *et l'autre par les points d'intersection de cette même courbe et du second cercle, ces deux coniques se couperont en quatre points situés sur un même cercle concentrique aux deux premiers.*

Dans le théorème (19), on peut prendre pour les deux coniques B, B′ les deux systèmes de lignes conjointes relatives aux deux cercles A, A′. Alors on en conclut que

Deux cercles quelconques étant tracés dans le plan d'une conique, les lignes conjointes du premier rencontrent les lignes conjointes du second en quatre points qui sont situés sur un troisième cercle qui passe par les points d'intersection des deux premiers.

Et si ces deux cercles sont concentriques, le troisième aura le même centre qu'eux.

22. Il existe, en général, trois systèmes de *deux lignes conjointes* relatives à une conique et à un cercle décrit dans son plan. Chaque système est formé de deux côtés opposés, ou des deux diagonales du quadrilatère qui a pour sommets les quatre points d'intersection du cercle et de la conique. Le point de concours de deux lignes conjointes a la même polaire dans ces deux courbes. Cette polaire est la droite qui joint les points de concours des deux autres systèmes de lignes conjointes (7). De sorte qu'*il existe en général, trois points dont l'un quelconque a la même polaire par rapport au cercle et à la conique.* Nous disons, *en général*, parce que deux de ces points peuvent être imaginaires: c'est ce qui a lieu quand le cercle ne rencontre la conique qu'en deux points réels; alors il n'y a qu'un seul système de deux lignes conjointes; les deux autres sont imaginaires, ainsi que les deux points de concours auxquels ils donnaient lieu dans le premier cas. Si le cercle et la conique n'ont aucun point d'intersection réel, alors il n'y a encore qu'un système de deux lignes conjointes dont le point de concours a la même polaire dans les deux courbes; mais dans ce cas les deux autres points qui jouissent de cette propriété sont toujours réels (*).

(*) Ce sont là des propriétés générales du système de deux coniques quelcon-

Ainsi, en général, une conique et un cercle étant décrits dans un même plan, il existe trois points qui jouissent de cette propriété, que l'un d'eux quelconque a la même polaire dans les deux courbes; cette polaire est la droite qui joint les deux autres points.

Pour un second cercle, on aura un pareil système de trois points dont chacun aura la même polaire dans ce second cercle et dans la conique.

Par ces trois points et les trois premiers, relatifs au premier cercle, on peut faire passer une conique.

Je vais démontrer ce théorème sous cet énoncé plus général :

23. *Si dans le plan d'une conique on prend deux systèmes de trois points tels que chacun d'eux ait pour polaire la droite qui joint les deux autres, on a six points par lesquels on peut faire passer une seconde conique.*

Soient a, b, c, les trois points du premier système, et a', b', c' ceux du second. Il faut démontrer que ces six points sont sur une conique.

Menons la droite ca'; son pôle sera le point d'intersection des polaires des deux points c, a', lesquelles sont les deux droites ab, $b'c'$; soit β ce point d'intersection. Pareillement, le pôle de la droite cb' est le point d'intersection des deux droites ab, $a'c'$; soit α ce point.

Les quatre droites ca, cb, ca', cb', issues du même point c, ont donc pour pôles les quatre points, b, a, β, α.

On a donc, d'après une propriété générale que j'ai démontrée pour

---

ques, pour lesquelles on peut consulter le *Traité des propriétés projectives* de M. Poncelet (section 3, chap. II) et un Mémoire sur les systèmes de coniques décrites dans un même plan, que j'ai publié dans les *Annales de Mathématiques* de M. Gergonne (t. XVIII et XIX, année 1828).

Quand deux coniques n'ont aucun point d'intersection réel, on a coutume de dire que deux des trois points en question sont les points de concours de sécantes imaginaires. On peut, dans ce cas, éviter la considération des imaginaires, en disant que ces deux points sont des coniques infiniment petites, ou dont les axes sont nuls, et qui satisfont à la condition analytique de passer par les points d'intersection des deux coniques proposées. Je reviendrai sur cette matière et sur la théorie des *axes de symptose* de deux coniques, dans un article spécial.

les surfaces du second degré (*), et qui s'applique aux coniques, l'équation

$$\frac{\sin a'ca}{\sin a'cb} : \frac{\sin b'ca}{\sin b'cb} = \frac{6b}{6a} : \frac{\alpha b}{\alpha a}.$$

Or les quatre droites $c'a$, $c'b$, $c'a'$, $c'b'$ étant issues d'un même point c', et passant respectivement par les quatre points a, b, α, 6 qui sont en ligne droite, on a l'équation

$$\frac{\sin b'c'b}{\sin b'c'a} : \frac{\sin a'c'b}{\sin a'c'a} = \frac{6b}{6a} : \frac{\alpha b}{\alpha a} (**).$$

De ces deux équations résulte celle-ci :

$$\frac{\sin a'ca}{\sin a'cb} : \frac{\sin b'ca}{\sin b'cb} = \frac{\sin a'c'a}{\sin a'c'b} : \frac{\sin b'c'a}{\sin b'c'b};$$

équation qui signifie que le rapport *anharmonique* (***) des quatre droites ca, cb, ca', cb' est égal à celui des quatre droites $c'a$, $c'b$, $c'a'$, $c'b'$. D'où il suit, par une propriété générale des sections coniques, que les quatre points, a, b, a', b', où ces droites se coupent

---

(*) *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes géométriques*, page 687.

(**) *Ibidem*, page 302.

(***) Quand quatre droites A, B, C, D situées dans un même plan sont issues d'un même point, j'ai appelé l'expression $\frac{\sin C,A}{\sin C,B} : \frac{\sin D,A}{\sin D,B}$, *rapport anharmonique* des quatre droites.

Pareillement, quand quatre points a, b, c, d sont en ligne droite ; l'expression $\frac{ca}{cb} : \frac{da}{db}$ est leur *rapport anharmonique*.

Les nombreux usages que j'ai eu à faire de ces *rapports* qui se représenteront désormais dans une foule de recherches géométriques, m'ont obligé à leur consacrer une dénomination particulière. Voir *Aperçu historique*, etc., pages 34 et 302. Le Mémoire sur les deux principes de Dualité et d'Homographie qui fait suite à l'*Aperçu historique* offre des applications continuelles de ces *rapports anharmoniques*.

deux à deux respectivement, sont sur une conique qui passe par les deux points c, c' (*). Ce qu'il fallait démontrer.

24. Quand un quadrilatère est inscrit, ou bien circonscrit à une conique, on sait que les points de concours de ses côtés opposés, et le point de rencontre de ses deux diagonales sont trois points qui jouissent de la propriété que chacun d'eux a pour polaire la droite qui joint les deux autres; on conclut donc du théorème précédent, que :

Si deux quadrilatères sont inscrits ou circonscrits à une conique, ou bien si l'un est inscrit et l'autre circonscrit à la courbe, par les trois points de concours des côtés opposés et des diagonales du premier, et les trois points de concours des côtés opposés et des diagonales du second on peut faire passer une conique (**).

§ III. *Suite du précédent. — Propriétés d'un autre genre des lignes conjointes relatives à un cercle.*

25. Concevons un cône du second degré, deux cercles sous-contraires c, c' tracés sur sa surface, et une sphère passant par ces deux cercles. Qu'on mène un plan transversal; il coupera le cône suivant une conique; la sphère suivant un cercle Σ et les plans des deux cercles c, c' suivant deux droites qui seront les lignes conjointes relatives à la conique et à ce cercle Σ. Ces deux lignes seront toujours réelles, quoique le cercle Σ puisse n'avoir aucun point d'intersection réel avec la conique.

Que d'un point de la conique on abaisse des perpendiculaires $m\pi$, $m\pi'$ sur les deux lignes conjointes, et des perpendiculaires mp, mp'

(*) *Aperçu historique, etc.*, page 334.

(**) Le théorème (23) peut donner lieu à quelques propriétés des surfaces du second degré; par exemple, on en conclut que *deux systèmes de diamètres conjugués d'une surface du second degré forment six droites situées sur un même cône du second degré.*

Conséquemment, *quand deux angles trièdres trirectangles ont un même sommet, leurs six arètes sont toujours sur un cône du second degré.*

sur les deux plans des cercles c, c'. Soient ν, ν' les angles que ces plans font avec le plan transversal, on aura

$$m\pi = \frac{mp}{\sin\nu}, \quad m\pi' = \frac{mp'}{\sin\nu'}.$$

et

$$m\pi . m\pi' = \frac{mp . mp'}{\sin\nu . \sin\nu'}.$$

Soient r, r' les points où l'arète Sm du cône rencontre les plans des deux cercles c, c'; et soient α, α' les angles de cette arète avec ces plans, on aura

$$mp = mr \sin\alpha,$$
$$mp' = mr' \sin\alpha'.$$

Donc

$$m\pi . m\pi' = mr . mr' . \frac{\sin\alpha . \sin\alpha'}{\sin\nu . \sin\nu'}.$$

Or la sphère passe par les deux points r, r'; conséquemment le produit $mr.mr'$ est égal au carré d'une tangente menée du point m à cette sphère; supposons que la tangente touche la sphère au point situé dans le plan transversal sur le cercle Σ; et soit mt la longueur de cette tangente. On aura

$$\frac{m\pi . m\pi'}{mt^2} = \frac{\sin\alpha . \sin\alpha'}{\sin\nu . \sin\nu'}.$$

Or ν et ν' sont constants, quelle que soit la position du point m sur le plan transversal. Le produit $\sin\alpha . \sin\alpha'$ est constant aussi, car les sinus des angles α, α' que l'arète Sm fait avec les plans des deux cercles c, c' sont égaux, respectivement, aux perpendiculaires abaissées du sommet du cône sur ces plans, divisées par les parties Sr, Sr' de l'arète Sm; et le produit Sr.Sr' est constant puisque les deux points r, r' sont sur la sphère.

Ainsi l'on a

$$\frac{m\pi . m\pi'}{\overline{mt}^2} = \text{constante},$$

quel que soit le point m pris sur la conique; et la *constante* est la même quels que soient les deux cercles sous-contraires c, c' tracés sur le cône, et conséquemment quelles que soient les deux lignes conjointes prises dans le plan de la conique, pourvu toutefois que ces deux lignes soient toujours parallèles à elles-mêmes respectivement; car les plans des deux cercles étant toujours parallèles à deux plans fixes, leurs intersections par le plan transversal, qui sont les deux lignes conjointes, sont toujours parallèles à deux droites fixes.

On conclut de là ce théorème :

Un cercle quelconque étant tracé dans le plan d'une conique; le carré de la tangente à ce cercle menée par un point quelconque de la conique, sera au produit des perpendiculaires abaissées de ce point sur les deux lignes conjointes, dans un rapport constant;

La valeur de ce rapport constant sera la même pour tous les systèmes de deux lignes conjointes qui feront entre elles un angle de grandeur constante.

Il faut remarquer que c'est pour faciliter l'énoncé du théorème, que nous y introduisons la considération de la *tangente* au cercle, mais qu'il s'applique aux cas où cette tangente est imaginaire; dans lesquels cas on substituera au carré de la tangente, le produit des segments faits par le cercle sur une transversale quelconque issue du point pris sur la conique.

26. Le cercle peut se réduire à un point, ce qui a lieu quand le plan de la conique est tangent à la sphère qui passe par les deux sections sous-contraires c, c' du cône.

Ainsi, *le cercle relatif à deux lignes conjointes peut être un point.* On considère alors ce point comme un cercle infiniment petit; et ce point peut être situé en un lieu quelconque du plan de la conique.

27. Si le plan de la conique ne rencontre pas la sphère, il y aura encore deux lignes conjointes, et *le cercle conjoint sera imaginaire.* Le théorème s'applique encore à ce cas; car le produit des segments qu'un cercle fait sur une droite issue d'un point fixe m est réel, bien que ce cercle soit imaginaire. Soit O le centre du cercle, R son rayon; ce produit est égal à $\overline{mO}^2 - R^2$; dans le cas actuel, le rayon du cercle

est imaginaire; son carré est négatif, et cette expression devient $\overline{mO}^2 + R^2$, quelle que soit la position du point m.

Ainsi l'on voit comment le théorème ci-dessus s'applique aux cas où la tangente au cercle, et le cercle lui-même deviennent imaginaires.

Si le plan transversal est parallèle à la droite d'intersection des plans des deux cercles c, c', les deux lignes conjointes, dans la conique, seront parallèles entre elles; et si le plan transversal passe par cette droite d'intersection, les deux lignes conjointes se confondront en une seule, et le cercle conjoint aura un double contact avec la conique sur cette droite. Ce cercle peut être imaginaire, ce qui aura lieu si le plan transversal ne rencontre pas la sphère; et il peut se réduire à un point, ce qui a lieu si le plan transversal est tangent à la sphère. Le point représente alors un cercle conjoint infiniment petit: c'est le point de contact de la sphère par le plan; et la ligne conjointe unique, sur laquelle ce cercle infiniment petit a un double contact avec la conique, est la droite d'intersection des plans des deux cercles C, C'. Ce point est le *foyer* de la conique, et cette droite est la *directrice;* car d'après le théorème général (25), les distances de chaque point de la conique à ce point fixe et à la droite, sont entre elles dans un rapport constant : ce qui est la propriété caractéristique du foyer.

28. Ces considérations offrent, comme on voit, un moyen de découvrir les foyers des coniques dans le cône oblique; ce que n'ont pas fait les Anciens qui n'ont traité de ces points que sur le plan, sans dire comment ils y ont été conduits. J'ai déjà indiqué ailleurs d'autres manières de considérer les foyers dans le cône oblique. (*Voir* le tome II de ce Journal, page 396; et mon *Aperçu historique*, etc., p. 132 et 285.)

29. Reprenons le théorème général (25), et supposons que le cercle ait un double contact avec la conique; le théorème prendra cet énoncé :

Quand un cercle a un double contact (réel ou imaginaire) avec une conique, si de chaque point de cette courbe on mène une tan-

gente au cercle, et une perpendiculaire à la droite de contact, le rapport de la tangente à cette perpendiculaire sera constant;

Et la valeur de ce rapport sera la même, quelle que soit le cercle, pourvu que son centre soit toujours sur le même axe principal de la courbe.

Le cercle sera *inscrit* dans la courbe si son centre est situé sur son axe majeur; et il lui sera circonscrit si son centre est situé sur l'axe mineur. Dans le premier cas on pourra mener une tangente au cercle, par chaque point de la conique; et dans le second cas on n'en pourra pas mener. Alors pour appliquer le théorème, on substituera à la tangente son expression que nous avons donnée ci-dessus (27).

30. Supposons deux cercles inscrits dans la conique; leurs droites de contact avec la courbe seront parallèles; conséquemment le rapport constant relatif à chacun des deux cercles aura la même valeur. On en conclut donc que la somme ou la différence des tangentes menées de chaque point de la conique aux deux cercles, est à la somme ou à la différence des distances de ce point aux deux lignes de contact, dans un rapport constant, lequel est le même quels que soient les deux cercles.

Pour chaque point de la conique compris entre les deux cordes de contact, la somme des distances de ce point à ces deux droites est constante et égale à la distance de ces deux droites; et pour chaque point de la conique situé au dehors de l'espace compris entre ces deux droites, la différence des distances de ce point à ces droites est égale à leur propre distance. On peut donc énoncer ce théorème :

Quand deux cercles sont inscrits dans une conique, la somme ou la différence des tangentes menées à ces cercles par chaque point de la courbe a une valeur constante;

Cette valeur est égale à la distance des cordes de contact des deux cercles avec la conique, multipliée par un coefficient constant, quels que soient les deux cercles inscrits.

31. Chacun des cercles peut se réduire à un point qui sera l'un des foyers de la conique, la corde de contact étant la directrice correspondante. Chacun des cercles peut aussi être imaginaire. Tous ces cas

seront compris sous l'énoncé général suivant, auquel nous donnons la forme des Porismes d'Euclide ;

Étant pris sur l'un des axes principaux d'une conique deux points fixes o, o', on pourra déterminer trois constantes λ, λ' et μ telles que l'on ait entre elles et les distances de chaque point de la conique aux deux points fixes o, o', la relation constante

$$\sqrt{\overline{mo}^2 + \lambda^2} \pm \sqrt{\overline{mo'}^2 + \lambda'^2} = \mu.$$

Ce théorème est une généralisation nouvelle de la propriété des foyers, que nous avons déjà généralisée ailleurs sous d'autres points de vue. (*Voir* t. II, p. 396 de ce Journal, et *Aperçu historique*, etc., p. 670 et 801) (*).

32. Chaque point d'un des axes principaux d'une conique est le centre d'un cercle qui a un double contact avec la courbe; les points de contact sont les pieds des perpendiculaires abaissées du point donné sur la conique; et la droite qui joint ces deux points est la *corde de contact*. Le contact peut être imaginaire; néanmoins cette droite est toujours réelle, de même que le cercle qui a le double contact avec la courbe. Voici comment on déterminera ce cercle et cette droite; le centre du cercle étant donné.

(*) Je citerai particulièrement les deux théorèmes suivants qui sont susceptibles d'un grand nombre de corollaires concernant les foyers des coniques :

1°. *Si, autour du foyer d'une conique, on fait tourner une rose des vents de* m *rayons,*

n *étant un nombre plus petit que* m,

La somme des puissances n *des distances des* m *points où ces rayons rencontreront la conique, à une droite fixe quelconque, divisées respectivement par les puissances* n *des distances de ces points au foyer de la courbe, sera constante.*

2°. *Si, autour du foyer d'une conique, on fait tourner une rose des vents de* m *rayons, et que par les* m *points où ils rencontrent la courbe, on lui mène ses tangentes,*

n *étant un nombre plus petit que* m, *la somme des puissances* n *des distances de ces tangentes à un point fixe, divisées par les puissances* n *de leurs distances au foyer, sera une quantité constante.*

La normale et la tangente en un même point m d'une conique divisent en deux également l'angle des deux rayons vecteurs qui aboutissent à ce point, et le supplément de cet angle. Il s'ensuit que ces deux droites et les deux rayons forment un faisceau harmonique ; et par conséquent la normale et la tangente rencontrent le grand axe de la courbe en deux points n, t qui sont conjugués harmoniques par rapport aux deux foyers. Cette propriété sert pour déterminer l'un de ces points, quand l'autre est donné.

Maintenant, si du premier point, qui est le pied de la normale, on mène une seconde normale à la courbe en m', la droite mm' sera la corde de contact du cercle qui a son centre au point n. Or, cette droite est la polaire du point t, puisque les deux droites tm, tm' sont tangentes à la conique; on a donc ce théorème :

Un point situé sur le grand axe d'une conique étant pris pour le centre d'un cercle qui doit avoir un double contact avec la courbe, la corde de contact sera la polaire d'un second point qui est conjugué harmonique du point proposé par rapport aux deux foyers de la courbe.

Si l'on considère qu'il existe sur le petit axe d'une conique deux *foyers imaginaires*, et que l'on peut prendre deux points conjugués harmoniques par rapport à deux points imaginaires, on verra que le théorème et la construction qu'il indique s'appliquent aux points situés sur le petit axe de la courbe, comme à ceux situés sur le grand axe.

33. Ce théorème servira pour résoudre ce problème :

Par un point pris sur un axe principal d'une conique, mener les normales à cette courbe.

On prendra le point conjugué harmonique du point donné, par rapport aux deux foyers (réels ou imaginaires) situés sur l'axe de la courbe, et la polaire de ce point par rapport à la courbe. Les pieds des normales cherchées seront sur cette droite ; de sorte que si cette droite rencontre la conique, il y aura deux normales; et si elle ne la rencontre pas, les normales seront imaginaires.

Nous donnerons ci-dessous (35) une autre construction de ce problème.

34. Considérons deux cercles ayant leurs centres sur un des axes principaux d'une conique, et prenons pour les lignes conjointes dans chaque cercle les perpendiculaires à cet axe qui joignent les points d'intersection de la conique et du cercle. Les carrés des tangentes menées d'un point de la conique aux deux cercles seront entre eux comme les produits des distances de ce point aux lignes conjointes des deux cercles (25). Prenons le point de la conique sur l'axe de symptose (ou axe radical) des deux cercles; alors on sait que les deux tangentes seront égales; on en conclut donc que les produits des distances de ce point aux lignes conjointes des deux cercles seront égaux. Donc,

Quand deux cercles ont leurs centres sur un diamètre principal d'une conique, si l'on considère les lignes conjointes perpendiculaires à cet axe, le produit des distances de l'axe radical des deux cercles aux deux lignes conjointes du premier, sera égal au produit des distances de cet axe aux deux lignes conjointes du second.

35. Par conséquent, toute droite transversale rencontre les lignes conjointes et l'axe radical en cinq points dont le dernier aura le produit de ses distances aux deux premiers, égal au produit de ses distances aux deux autres; c'est-à-dire que ces cinq points appartiendront à une involution de six points, dont le sixième, conjugué du cinquième, sera à l'infini. (Voir *Théorie de l'involution de six points*. page 312 de l'*Aperçu historique*, etc.)

Or, deux points conjugués, dans une involution, peuvent se confondre; ils forment alors un des deux points *doubles* de l'involution, qui jouissent de la propriété de diviser harmoniquement le segment compris entre deux points conjugués quelconques. Si l'un de ces points doubles est situé à l'infini, l'autre sera le milieu de chacun de ces segments.

Ici, quand les deux cercles sont concentriques, leur axe radical est à l'infini; conséquemment le cinquième et le sixième point, dans l'involution que nous avons considérée, se confondent; ils forment un point double; et par suite il existe un second point double qui est le milieu de chaque segment compris entre deux points conjugués. De là on conclut ce théorème :

Si d'un point pris sur l'un des axes principaux d'une conique, comme centre, on décrit plusieurs cercles, les lignes conjointes de chacun d'eux, perpendiculaires à l'axe de la courbe, seront également éloignées d'une même droite fixe; et celui des cercles qui aura un double contact avec la conique, la touchera sur cette droite.

Ce théorème donne une construction nouvelle du problème ci-dessus (33), où il s'agit de mener les normales à une conique, par un point pris sur un axe principal de la courbe.

Nous résoudrons plus loin (86) ce problème pour un point pris arbitrairement dans le plan de la conique; et nous aurons occasion alors de donner une seconde démonstration du théorème précédent.

36. Chaque cercle, dans ce théorème, indépendamment des deux lignes conjointes perpendiculaires à l'axe de la conique, les seules qui seront toujours réelles, pourra avoir deux autres systèmes de lignes conjointes; ce qui aura lieu quand le cercle rencontrera la conique en quatre points. Il est clair que chacune de ces lignes aura son milieu situé sur la droite fixe que nous venons de trouver. Or, la perpendiculaire abaissée du centre du cercle sur cette ligne passe par son milieu, puisqu'elle est une corde du cercle. Il s'ensuit que cette ligne est une tangente d'une parabole qui a son foyer au centre du cercle, et qui est tangente à cette droite fixe. Donc,

Quand plusieurs cercles ont un centre commun situé sur un axe principal d'une conique, leurs lignes conjointes non perpendiculaires à cet axe, enveloppent une parabole qui a son foyer au centre commun des cercles.

§ IV. *Propriétés générales d'un système de coniques circonscrites à un quadrilatère.*

37. Les propriétés des lignes conjointes que nous allons démontrer maintenant résultent de quelques propriétés générales d'un système de coniques circonscrites à un quadrilatère. Nous allons présenter d'abord ces propriétés générales

Quand trois coniques sont circonscrites à un même quadrilatère, *une transversale quelconque les rencontre en six points qui sont en involution.*

Ainsi, soient A, A′, les points de la première conique, B, B′ ceux de la seconde, et C, C′ ceux de la troisième, on aura

$$\frac{\mathrm{CA}\,.\,\mathrm{CA'}}{\mathrm{C'A}\,.\,\mathrm{C'A'}} = \frac{\mathrm{CB}\,.\,\mathrm{CB'}}{\mathrm{C'B}\,.\,\mathrm{C'B'}}.$$

En effet, la transversale rencontre deux côtés opposés du quadrilatère en deux points P, P′ et les deux autres côtés en deux points Q, Q′. Le quadrilatère étant inscrit dans la première conique, les six points A, A′, P, P′, Q, Q′ sont en involution. (Théorème de Desargues; Voir *Aperçu historique*, etc., p. 77 et 335.) Pareillement, le quadrilatère étant inscrit dans chacune des deux autres coniques, les six points B, B′, P, P′, Q, Q′, forment une involution, et il en est de même des six points C, C′, P, P′, Q, Q′. Il suit de là, par une propriété générale de l'involution, que j'ai démontrée dans l'*Aperçu historique*, etc., p. 310, que les six points A, A′, B, B′, C, C′ sont en involution. C. Q. F. D.

58. *Quand plusieurs coniques sont circonscrites à un quadrilatère, les polaires d'un point quelconque, prises dans ces courbes, passent par un même point.*

Soit O un point quelconque et O′ le point de concours de ses polaires prises dans les deux premières courbes. Que la droite OO′ rencontre ces courbes aux points A, A′, et B, B′; les deux points O, O′ seront conjugués harmoniques par rapport aux points A, A′, et par rapport aux points B, B′. Ces deux points sont donc les points *doubles* relatifs à une involution de six points à laquelle appartiennent les quatre points A, A′, B, B′. Or les points C, C′, où la droite OO′ rencontre une troisième conique, complètent avec ces quatre premiers une involution. Donc les deux points O, O′ sont conjugués harmoniques par rapport à ces deux points C, C′ (*). Donc le point O′

(*) Voir, pour cette propriété des points *doubles* dans une involution, l'*Aperçu historique*, etc., p. 313.

est sur la polaire du point O, prise dans la troisième conique. Donc les polaires du point O, relatives à toutes les coniques, passent par un même point O'. C. Q. F. D.

39. *Étant données deux coniques quelconques, si l'on prend les polaires d'un même point, par rapport à ces courbes, et que ce point se meuve sur une ligne droite, le point d'intersection de ses polaires engendrera une conique, qui passera par les pôles de la droite, et par les points de concours des diagonales et des côtés opposés du quadrilatère qui a pour sommets les quatre points d'intersection des deux coniques.*

En effet, soit L la droite sur laquelle se meut le point dont on prend les polaires dans les deux coniques. Soient a, b, c, d quatre positions de ce point; les polaires de ces quatre points, prises dans la première courbe, passeront par un point fixe qui sera le pôle de la droite L, et auront leur rapport anharmonique égal à celui des quatre points. (*Aperçu historique*, p. 687). Pareillement, les polaires de ces points, prises dans la seconde courbe, passeront par un point fixe qui est le pôle de la droite L pris dans cette courbe, et auront leur rapport anharmonique égal à celui des quatre points, et égal, par conséquent, à celui des quatre premières polaires. Donc ces droites se coupent une à une, respectivement, en quatre points qui sont sur une conique Σ qui passe par les deux pôles de la droite L. (*Aperçu historique*, etc., p. 335.)

Si l'on conçoit une troisième conique passant par les points d'intersection des deux premières, la polaire du point mobile, par rapport à cette troisième courbe, passera par le point d'intersection de ses polaires par rapport aux deux premières (38); il s'ensuit que la conique Σ passe par le pôle de la droite L pris dans la troisième courbe.

Si cette troisième conique est l'ensemble de deux côtés opposés du quadrilatère qui a pour sommets les quatre points d'intersection des premières, les polaires des différents points de la droite L, prises par rapport à ces deux droites, passeront par leur point de concours, qui, par conséquent, représente le pôle de la droite L. Donc la conique Σ passe par ce point de concours. Ainsi le théorème est démontré.

40. Maintenant, la troisième conique étant quelconque, et le pôle

de la droite L par rapport à cette courbe étant situé sur la conique Σ, on en conclut ce théorème :

Quand plusieurs coniques sont circonscrites à un même quadrilatère, les pôles d'une même droite, pris dans ces courbes, sont sur une conique qui passe par les points de concours des côtés opposés et des diagonales du quadrilatère.

41. Si la droite est à l'infini, ses pôles seront les centres des coniques; donc

Quand plusieurs coniques sont circonscrites à un même quadrilatère, leurs centres sont sur une conique qui passe par les points de concours des côtés opposés et des diagonales du quadrilatère.

42. Dans le même cas, où la droite L est à l'infini, le théorème ci-dessus (39) prend cet énoncé :

Étant données deux coniques quelconques, si l'on mène dans ces courbes deux diamètres parallèles entre eux, mais d'une direction quelconque, leurs conjugués se couperont en un point qui aura pour lieu géométrique une conique passant par les points d'intersection des côtés opposés et des diagonales du quadrilatère qui a pour sommets les quatre points d'intersection des deux courbes ;

Et cette conique sera le lieu des centres de toutes les coniques qu'on pourra faire passer par ces quatre points.

43. Ces diverses propriétés des coniques ne sont pas nouvelles; mais on les a démontrées jusqu'ici par des méthodes différentes. Les démonstrations que nous venons d'en donner sont uniformes, et ne reposent que sur les propriétés les plus connues des sections coniques.

44. Pour appliquer le dernier théorème au cas où l'une des coniques, ou toutes les deux sont des paraboles, nous considérerons, au lieu de deux diamètres parallèles entre eux, deux tangentes parallèles entre elles; et nous énoncerons ainsi le théorème :

Étant données deux coniques quelconques, si on leur mène deux tangentes parallèles, sous une direction quelconque, leurs diamètres aboutissants aux points de contact se couperont en un point qui aura *pour lieu géométrique une conique qui passera par les points de concours des côtés opposés et des diagonales du quadrilatère qui a pour sommets les quatre points d'intersection des deux courbes ;* .

Et cette conique sera le lieu aussi des centres de toutes les coniques qu'on peut faire passer par ces quatre points.

45. S'il existe dans l'une des coniques un système de diamètres conjugués parallèles à deux diamètres conjugués de la seconde courbe, alors il est clair que la conique en question est une hyperbole qui a ses asymptotes parallèles à ces deux diamètres conjugués. Dans le cas contraire la conique sera une ellipse.

§ V. *Propriétés des lignes conjointes relatives à une conique et à plusieurs cercles concentriques.*

46. Supposons que dans le théorème (44) une des coniques soit un cercle, nous aurons ce théorème :

Quand un cercle est tracé dans le plan d'une conique, si par son centre on mène une perpendiculaire sur chaque tangente à cette courbe, cette droite rencontrera le diamètre de la conique aboutissant au point de contact, en un point qui aura pour lieu géométrique une hyperbole équilatère dont les asymptotes seront parallèles aux deux axes principaux de la conique ;

Cette hyperbole passera par le point d'intersection des lignes conjointes relatives au cercle ,

Et elle sera le lieu des centres de toutes les coniques menées par les quatre points d'intersection du cercle et de la conique proposée.

47. Pour chaque point où l'hyperbole rencontre la conique proposée, la tangente en ce point est perpendiculaire à la droite menée de ce point au centre du cercle. Cette droite est donc la normale abaissée du centre du cercle sur la conique. Donc

L'hyperbole passe par les pieds des quatre normales qu'on peut abaisser du centre du cercle sur la conique proposée.

48. Le théorème précédent est susceptible de nombreuses conséquences que nous allons développer.

D'abord, l'hyperbole est la même quelle que soit la conique menée par quatre points fixes pris sur le cercle, puisqu'elle est le lieu des centres de toutes les coniques qu'on peut faire passer par ces quatre points; on conclut de là que:

Si par quatre points pris sur un cercle on fait passer plusieurs coniques, leurs centres et les pieds des normales abaissées du centre du cercle sur ces courbes seront sur une même hyperbole équilatère; et les diamètres principaux de chacune des coniques seront parallèles aux asymptotes de l'hyperbole.

49. Ne considérons qu'une conique; l'hyperbole est déterminée par la condition de passer par les pieds des normales abaissées du centre du cercle sur cette courbe, quel que soit le rayon du cercle; on a donc ce théorème :

Si plusieurs cercles concentriques sont décrits dans le plan d'une conique, les lignes conjointes relatives à chaque cercle auront leurs points de concours sur une hyperbole équilatère qui passera par les pieds des normales abaissées du centre des cercles sur la conique.

Ce théorème offre une construction de l'hyperbole par points.

50. Étant donné un quadrilatère quelconque ABCD, on peut prendre le point milieu d'un de ses côtés AB pour le centre d'une conique qui passera par ses quatre sommets; car par trois points on peut mener une conique qui ait son centre en un point donné. Que ces trois points soient les sommets B, C, D, et que le centre de la conique soit le point milieu du côté AB, elle passera nécessairement par le quatrième sommet A.

Ce que nous disons de deux côtés opposés, s'entend des deux diagonales.

Il suit de là que l'*hyperbole équilatère*, dans le théorème (46), *passe par les points milieux des côtés et des diagonales du quadrilatère qui a pour sommets les points d'intersection du cercle et de la conique.*

51. Dans un quadrilatère, les trois droites qui joignent les milieux des côtés opposés et les milieux des diagonales passent par un même point où chacune d'elles est divisée en deux parties égales. Ce point

52..

est donc le centre d'une conique passant par les milieux des quatre côtés et des trois diagonales ; car par les milieux de deux côtés contigus et d'une diagonale, on pourra mener une conique qui ait son centre au point en question ; et cette conique passera par les milieux des deux autres côtés et de la seconde diagonale.

On conclut donc du théorème (46) et du précédent, celui-ci :

Quand un quadrilatère est inscrit dans un cercle, les points de concours de ses côtés opposés et de ses diagonales, les milieux de ces six droites et le centre du cercle sont dix points situés sur une même hyperbole équilatère qui a son centre au centre de gravité des quatre sommets du quadrilatère supposés de même masse, et ses asymptotes parallèles aux droites qui divisent en deux également l'angle de deux côtés opposés et son supplément.

52. On conclut encore du théorème 50, que :

Étant donnée une conique, si d'un point fixe quelconque, comme centre, on décrit plusieurs circonférences de cercles, les cordes qu'elles intercepteront dans la conique auront leurs milieux situés sur une hyperbole équilatère.

Cette hyperbole passe par les pieds des normales à la conique, menées par le centre commun des cercles (49).

53. On peut encore dire que

Si l'on a une conique, et qu'on prenne ses lignes conjointes relatives à plusieurs cercles décrits d'un même centre, les pieds des perpendiculaires abaissées de ce centre sur ces lignes seront sur une hyperbole équilatère qui passera par ce point et par le centre de la conique ;

Et la droite qui joindra les pieds des perpendiculaires abaissées sur deux lignes conjointes relatives à un même cercle, passera par le centre de l'hyperbole (51).

54. Si le centre commun des cercles est pris sur un des axes principaux de la conique, deux lignes conjointes de chaque cercle seront perpendiculaires à cet axe ; et si le cercle rencontre la conique en quatre points, il y aura deux autres systèmes de deux lignes conjointes qui se couperont sur ce même axe. L'hyperbole équilatère deviendra donc,

dans ce cas, l'ensemble de deux droites rectangulaires, dont l'une sera l'axe de la conique, et l'autre sera le lieu des perpendiculaires abaissées du centre commun des cercles sur les lignes conjointes inclinées sur l'axe. Les milieux de ces lignes seront les pieds de ces perpendiculaires; ce qui donne une nouvelle démonstration des deux théorèmes 35 et 36.

55. Il suit du théorème 51, que :

Étant donnée une conique, si d'un point fixe, comme centre, avec un rayon quelconque, on décrit un cercle qui la rencontre en quatre points, ces quatre points, supposés de même masse, auront leurs centre de gravité en un point fixe, quel que soit le rayon du cercle.

56. Que dans ce théorème et dans celui de l'article 52, on suppose que la conique soit l'ensemble de deux droites, il s'ensuivra que :

Si dans le plan d'un angle on décrit plusieurs cercles concentriques, dont chacun rencontre les deux côtés de l'angle en quatre points :

1°. *Ces quatre points, supposés de même masse, auront pour centre de gravité un même point fixe;*

2°. *Les droites qui joindront deux à deux ces quatre points auront leurs milieux sur une hyperbole équilatère ayant son centre en ce point fixe.*

Nous verrons plus loin (art. 81), que *ces droites enveloppent une courbe du quatrième degré qui a deux branches paraboliques.*

Si le centre commun des cercles est pris sur la droite qui divise l'angle donné en deux également, l'hyperbole se réduira à une ligne droite (54), et par conséquent, *les cordes interceptées dans les cercles, entre les côtés de l'angle, envelopperont une parabole.*

57. Le théorème 53 peut être généralisé de cette manière :

Si dans une conique on prend les lignes conjointes relatives à plusieurs cercles décrits d'un même centre, et que l'on abaisse de ce point, sous un angle de grandeur donnée, des obliques sur ces droites :

1°. *Les pieds de ces obliques seront sur une hyperbole équilatère passant par le centre commun des cercles;*

2°. *La droite qui joindra les pieds des obliques abaissées sur deux lignes conjointes relatives à un même cercle passera par le centre de l'hyperbole.*

En effet, chaque oblique est proportionnelle à la perpendiculaire abaissée sur la même ligne, puisque cette oblique et cette perpendiculaire font entre elles un angle de grandeur constante. Donc si l'on fait éprouver à toutes les obliques un mouvement de rotation autour du point fixe, égal à cet angle, elles viendront se superposer sur les perpendiculaires, et leurs extrémités formeront une courbe semblable à celle sur laquelle se trouvent les pieds des perpendiculaires; mais celle-ci est une hyperbole équilatère : le lieu des extrémités des obliques sera donc aussi une hyperbole équilatère. Ce qui démontre la première partie du théorème.

La droite qui joint les pieds des perpendiculaires abaissées sur deux lignes conjointes passe par le centre de la première hyperbole; donc la droite qui joindra les extrémités des deux obliques superposées sur ces perpendiculaires passera aussi par le centre de la seconde hyperbole. Ce qui aura lieu encore quand les obliques auront repris leur véritable position.

Ainsi le théorème est démontré.

§ VI. *Propriétés des lignes conjointes considérées dans un système de coniques concentriques et homothétiques, et relatives à plusieurs cercles concentriques.*

58. Si d'un point fixe on abaisse des normales sur une conique E, leurs pieds sont sur une hyperbole équilatère qui passe par le point fixe et par le centre de la conique, et dont les asymptotes sont parallèles aux axes principaux de cette courbe. On forme cette hyperbole en abaissant du point fixe, une perpendiculaire sur chaque tangente à la conique, et en prenant le point d'intersection de cette perpendiculaire et du diamètre conjugué à la tangente. Ce point appartient à l'hyperbole (46 et 47). Cette courbe sera donc la même pour une autre conique E′ concentrique et homothétique à la proposée E; on a donc ce théorème :

Quand plusieurs coniques sont concentriques et homothétiques, si d'un point fixe quelconque on abaisse sur ces courbes des normales, leurs pieds seront sur une hyperbole équilatère.

59. Si l'on conçoit un cercle décrit du point fixe comme centre, ses cordes communes avec l'une des coniques auront leurs milieux situés sur l'hyperbole équilatère (52); ces milieux sont les pieds des normales abaissées du centre du cercle sur ces cordes; donc

Quand plusieurs coniques sont concentriques et homothétiques, si l'on décrit un cercle quelconque, les pieds des perpendiculaires abaissées de son centre sur ses lignes conjointes relatives à ces courbes seront tous sur l'hyperbole équilatère lieu des pieds des normales abaissées du centre du cercle sur les coniques.

60. Si du point fixe, comme centre, on décrit plusieurs cercles C, C′,..., chacun d'eux rencontrera l'une quelconque E′ des coniques homothétiques et concentriques, en quatre points par lesquels on pourra faire passer une infinité de coniques; toutes ces courbes auront leurs centres sur l'hyperbole équilatère; car cette hyperbole est déterminée par la condition de passer par les pieds des normales abaissées du centre des cercles sur la conique E′. Conséquemment, d'une part, elle sera la même quel que soit le rayon du cercle C, et, et d'autre part, quelle que soit la conique E′, puisque les pieds des normales abaissées sur toutes les coniques E, E′,... sont sur la même hyperbole (58). Nous pouvons donc énoncer ce théorème :

Quand on a plusieurs coniques E, E′,.... *concentriques et homothétiques entre elles, et plusieurs cercles décrits d'un même centre quelconque, si par les points d'intersection d'un des cercles et d'une des coniques* E, *on fait passer d'autres coniques, leurs centres seront sur une même hyperbole équilatère, quels que soient ce cercle et la conique* E.

61. Donc un point de cette hyperbole sera le centre d'une infinité de coniques, dont chacune passera par les quatre points d'intersection d'une des coniques E, E′,... par un des cercles C, C′,.... Je dis que *toutes ces coniques concentriques sont homothétiques entre elles.*

En effet, considérons l'une des coniques E, et l'un des cercles C :

prenons sur l'hyperbole un point m; ce point sera le centre d'une conique U passant par les quatre points d'intersection de la conique E et du cercle C. Il faut prouver que cette conique U est déterminée d'espèce, quels que soient la conique E et le cercle C.

Soit a l'un des points où l'hyperbole rencontre la conique E; menons en ce point la tangente à cette courbe E, et menons par le point m une parallèle mb à cette tangente. Cette parallèle et la droite ma seront deux diamètres conjugués de la conique U; car, cette courbe U, la conique E et le cercle C passant par quatre mêmes points, si l'on prend dans ces trois courbes les diamètres conjugués à une même direction quelconque, ils concourront en un même point de l'hyperbole (38). Or, si cette direction est celle de la tangente à la conique E au point a, ce point a sera le point de concours des trois diamètres. Donc, la droite ma est le diamètre de la conique U conjugué à la droite mb menée parallèlement à la tangente en a à la conique E.

Pour chacun des autres points d'intersection de la conique E et de l'hyperbole, on aura pareillement un système de deux diamètres conjugués de la conique U. Cette courbe est donc déterminée d'espèce; mais ces diamètres conjugués sont les mêmes, quel que soit le cercle; donc *si deux cercles concentriques rencontrent une même conique, et si par les points d'intersection du premier cercle, d'une part, et par les points d'intersection du second cercle, d'autre part, on fait passer deux coniques qui aient le même centre, ces deux courbes seront homothétiques.*

La démonstration que nous venons de donner de ce théorème s'applique au cas où l'on considère deux coniques homothétiques E, E', et un cercle C'; et l'on en conclut que si par les quatre points d'intersection de la première conique et du cercle, d'une part, et par les quatre points d'intersection de la seconde conique et du cercle, d'autre part, on fait passer deux coniques concentriques, elles seront homothétiques.

Ainsi, en considérant deux coniques E, E' et deux cercles C, C', si l'on décrit trois coniques qui aient pour centre commun un point m de l'hyperbole équilatère, dont la première passe par les points d'intersection de E et C, la deuxième par les points d'intersection de E et C', et la troisième par les points d'intersection de C' et E', la première et la deuxième seront homothétiques entre elles; la deuxième et la troisième seront aussi homothétiques entre elles; donc la troisième sera homothétique à la première.

62. On a donc ce théorème :

Quand plusieurs coniques E, E′,... *sont concentriques et homothétiques entre elles, et que plusieurs cercles* C, C′,... *sont décrits d'un même centre quelconque, si l'on conçoit l'hyperbole équilatère lieu des pieds des normales abaissées de ce point sur les coniques, chacun des points de cette courbe sera le centre commun d'une infinité de coniques homothétiques entre elles, dont chacune passera par les quatre points d'intersection d'une des coniques* E, E′,... *par l'un des cercles* C, C′,...

63. Il résulte de ce théorème, que

Quand deux coniques se coupent en quatre points situés sur un cercle, deux autres coniques, concentriques et homothétiques aux deux premières, respectivement, se couperont en quatre points situés sur un second cercle concentrique au premier.

Soient E, U les deux coniques proposées, et C le cercle sur lequel elles se coupent; soient E′, U′ les deux coniques qui leur sont homothétiques et concentriques, une à une respectivement; il faut prouver que ces deux courbes se couperont sur un cercle concentrique au cercle C. Or, on peut considérer le centre de la conique U comme le centre d'une seconde conique U″ homothétique à U et qui passera par les points d'intersection de la conique E′ et d'un cercle quelconque C′ concentrique à C (62). Prenons pour ce cercle C′ celui qui passe par un des quatre points d'intersection des deux coniques E′, U′; la conique U″ se confondra avec la conique U′, puisqu'elles seront concentriques et homothétiques, et qu'elles auront un point commun. Donc, les deux coniques E′, U′ se coupent sur un cercle concentrique au cercle C.

C. Q. F. D.

64. Si l'on suppose que les deux coniques U, U′ se confondent, on en conclura ce théorème :

Quand deux coniques se rencontrent en quatre points situés sur un cercle, toute conique concentrique et homothétique à l'une d'elles *rencontrera l'autre en quatre points qui seront sur un second cercle concentrique au premier.*

65. L'une des deux coniques peut être l'ensemble de deux lignes conjointes; la conique homothétique sera une hyperbole ayant ces deux lignes pour asymptotes. Donc

Deux lignes conjointes d'une conique étant prises pour asymptotes d'une hyperbole, les quatre points d'intersection de la conique et de l'hyperbole seront sur un cercle concentrique au cercle conjoint relatif aux deux lignes conjointes.

66. Concevons un quadrilatère inscrit dans un cercle; on peut regarder deux côtés opposés comme une conique, et les deux autres côtés opposés comme les deux lignes conjointes; donc si l'on décrit une hyperbole qui ait ces deux côtés pour asymptotes, *elle rencontrera les deux premiers côtés en quatre points qui seront sur un cercle concentrique au premier.*

Donc

Étant donnée une hyperbole, si l'on tire deux droites qui rencontrent ses asymptotes en quatre points situés sur un cercle, elles rencontreront l'hyperbole en quatre autres points qui seront sur un second cercle concentrique au premier.

67. Plus généralement,

Étant données deux coniques concentriques et homothétiques, si l'on tire deux droites qui rencontrent la première en quatre points situés sur un cercle, ces deux droites rencontreront la seconde courbe en quatre points qui seront sur un second cercle concentrique au premier.

Cela est évident; car les deux droites seront des lignes conjointes par rapport à la seconde conique, comme par rapport à la première; ensuite les milieux des segments compris sur chaque droite dans les deux coniques, se confondront; d'où il suit que les cercles auront le même centre.

§ VII. *Propriétés d'un système de coniques inscrites dans un même quadrilatère, et au nombre desquelles se trouve un cercle.*

68. Nous avons été conduit aux théorèmes contenus dans les deux paragraphes précédents, par la considération d'un système de coniques circonscrites à un même quadrilatère, et au nombre desquelles se trouve un cercle. Si maintenant on considère un système de coniques inscrites dans un même quadrilatère, et au nombre desquelles se trouve un cercle, on parviendra par une marche semblable à divers autres théorèmes. Mais on peut aussi déduire ces théorèmes de ceux qui précèdent, par une transformation polaire faite au moyen d'un cercle auxiliaire concentrique au cercle de la figure. C'est la marche que nous allons suivre, comme étant la plus expéditive.

69. Du théorème 5, on conclut que

Quand un quadrilatère est circonscrit à un cercle, les trois angles au centre soutendus respectivement par les deux diagonales et par la droite qui joint les points de concours des côtés opposés, sont divisés chacun en deux également par une même droite.

70. On voit, soit par le théorème de l'article 4, soit par celui de l'article 48, que, quand plusieurs coniques sont circonscrites à un quadrilatère, et que parmi elles se trouve un cercle, les diamètres principaux de ces courbes sont parallèles à deux droites fixes. Faisant la transformation polaire par rapport à un cercle auxiliaire concentrique à celui de la figure, on obtient ce théorème :

Quand plusieurs coniques sont inscrites dans un quadrilatère, et que parmi elles se trouve un cercle, l'angle formé par les tangentes menées du centre de ce cercle à l'une quelconque des coniques sera divisé en deux également par une droite fixe.

Le théorème précédent n'est qu'un corollaire de celui-ci, parce que chaque diagonale du quadrilatère peut être considérée comme une conique inscrite dans le quadrilatère.

71. Reprenons le théorème 48; faisons la transformation polaire,

comme nous l'avons dit; l'hyperbole passe par le centre du cercle auxiliaire; par conséquent elle deviendra une parabole; et, ses asymptotes étant à angle droit, les tangentes menées du centre du cercle à cette parabole seront à angle droit; de sorte que sa *directrice* passera par ce point. On a donc ce théorème :

Si dans un quadrilatère circonscrit à un cercle on inscrit plusieurs coniques, les polaires du centre du cercle, prises dans ces courbes, envelopperont une parabole dont la directrice passera par le centre du cercle; et si de ce point on abaisse des normales sur les coniques et que par leurs pieds on mène les tangentes à ces courbes, toutes ces droites seront tangentes à la parabole.

72. Du théorème 49, on conclut que

Si plusieurs cercles sont décrits d'un même centre dans le plan d'une conique, et qu'on prenne les lignes conjointes relatives à chaque cercle, et la polaire de leur point de concours par rapport à la conique, toutes ces polaires envelopperont une parabole, dont la directrice passera par le centre commun des cercles, et qui sera inscrite dans le quadrilatère formé par les tangentes à la conique menées par les pieds de ses normales abaissées de ce centre.

73. Du théorème 51, on conclut le suivant :

Quand un quadrilatère est circonscrit à un cercle, si l'on tire les rayons du cercle qui aboutissent aux sommets et aux points de concours des côtés opposés et des diagonales, et que par ces sept points on mène des perpendiculaires à ces rayons respectivement, ces perpendiculaires, la droite qui joint les points de concours des côtés opposés, et les deux diagonales, seront dix droites tangentes à une même parabole dont la directrice passera par le centre du cercle.

74. Du théorème 53, on conclut le suivant :

Plusieurs cercles concentriques étant situés dans le plan d'une conique, si par le point de concours des tangentes communes à la conique et à chaque cercle, on mène une droite perpendiculaire au rayon du cercle qui aboutit à ce point, toutes ces droites envelopperont une parabole dont la directrice passera par le centre commun des cercles.

75. Cette parabole, dont les théorèmes précédents apprennent à construire les tangentes de différentes manières, donne lieu à une solution de ce problème :

D'un point donné, abaisser les normales sur une section conique.

En effet, la parabole étant construite, il suffira de mener les tangentes communes à cette courbe et à la conique proposée; leurs points de contact sur cette conique seront les pieds des normales demandées.

Nous donnerons dans le § VIII, (art. 86), une autre solution de ce problème.

76. Si la conique a l'un de ses axes nul, de manière qu'elle se réduise à une droite terminée à deux points fixes, ce théorème prendra l'énoncé suivant qui résulte aussi, par une transformation polaire, du théorème 56.

Si l'on a plusieurs cercles concentriques, et que l'on circonscrive à chacun d'eux un quadrilatère qui ait pour points de concours de ses côtés opposés deux points fixes pris arbitrairement, les droites menées par les sommets de ces quadrilatères perpendiculairement aux droites issues du centre commun des cercles et qui aboutissent à ces sommets, envelopperont une parabole dont la directrice passera par le centre des cercles.

77. On sait que les perpendiculaires abaissées d'un point fixe sur les tangentes d'une parabole sont sur une courbe du troisième degré qui a un point double, ou conjugué, situé au point fixe (*). Cette courbe

(*) Cela est facile à démontrer. Il suffit de faire voir qu'une droite quelconque ne rencontrera la courbe qu'en trois points. Or, que l'on conçoive un angle droit dont le sommet parcourre cette droite et dont un côté glisse sur le point fixe; le deuxième côté enveloppera une parabole. Quand le sommet de l'angle sera situé en l'un des points où la droite rencontre la courbe en question, son deuxième côté sera tangent à la parabole proposée. Donc à chaque point de rencontre de la droite avec la courbe en question correspond une tangente commune à deux paraboles. Or, deux paraboles ne peuvent avoir que trois tangentes communes, parce qu'elles en ont une quatrième située à l'infini ; donc la droite ne rencontre est la cissoïde de Dioclès quand le point fixe est le sommet de la parabole; et elle est une *focale* à nœud quand le point fixe est situé sur la directrice. Cette *focale* a été ainsi nommée par M. Quetelet, parce que c'est dans le cône qu'elle s'est d'abord présentée. Elle est le lieu des foyers des sections faites dans un cône droit à base circulaire, par des plans menés par une tangente à ce cercle. Cette courbe jouit de plusieurs propriétés assez remarquables qui s'appliquent, par une projection, à toutes les courbes du troisième degré qui ont un point double ou conjugué.

78. D'après cela, on conclut du théorème 71, que :

Quand plusieurs coniques sont inscrites dans un quadrilatère, et que parmi elles se trouve un cercle, les pieds des perpendiculaires abaissées du centre du cercle sur les polaires de ce point prises par rapport aux coniques, et les pieds des normales abaissées du même point sur ces courbes, sont tous situés sur une focale qui a son nœud en ce point.

Les foyers des coniques, et les pieds des perpendiculaires abaissées du point fixe sur les axes principaux de ces courbes sont aussi sur la focale.

Je démontrerai ce théorème ailleurs, avec plusieurs autres propriétés des focales, qui ne peuvent trouver place ici.

79. Du théorème 74, on conclut que :

Plusieurs cercles étant décrits d'un même centre dans le plan d'une

---

la courbe en question qu'en trois points; donc cette courbe est du troisième degré. Elle a un point double au point fixe, parce que par ce point on peut mener deux tangentes à la parabole proposée, et que ce point est lui-même le pied des normales abaissées sur ces tangentes. Quand ces tangentes sont imaginaires, le point double se change en un point conjugué.

On prouve par le même raisonnement que les pieds des normales abaissées d'un point fixe sur les tangentes d'une ellipse ou d'une hyperbole, sont sur une courbe du quatrième degré qui a un point double, ou conjugué, situé au point fixe.

Pour le cercle, cette courbe du quatrième degré est le limaçon de Pascal, qui est, comme on sait, une épicycloïde et, en même temps, une conchoïde du cercle.

conique, les points de concours des tangentes communes à la conique et à chaque cercle sont situés sur une focale qui a son nœud au centre commun des cercles.

80. Le théorème 76 donne le suivant :

Plusieurs cercles étant décrits d'un même centre, si l'on circonscrit à chacun d'eux un quadrilatère dont les côtés opposés aient pour points de concours deux points fixes, les sommets de tous ces quadrilatères seront sur une focale à nœud dont le nœud sera au centre commun des cercles.

81. La focale étant une courbe du troisième degré qui a un point double, par un point pris au-dehors de cette courbe, on peut lui mener, en général, et au plus, quatre tangentes. Il s'ensuit que sa polaire est une courbe du quatrième degré qui a une tangente double, c'est-à-dire qu'une certaine droite la touche en deux points. Si la transformation polaire est faite par rapport à un cercle auxiliaire ayant son centre au nœud de la focale, la tangente double de la courbe du quatrième degré sera située à l'infini. Cette courbe aura donc deux branches paraboliques. On conclut donc du théorème 79, le suivant :

Les lignes conjointes d'une conique, relatives à plusieurs cercles concentriques, enveloppent une courbe du quatrième degré qui a une tangente double située à l'infini; c'est-à-dire qui a deux branches paraboliques.

Quand la conique est l'ensemble de deux droites, on en conclut la propriété que nous avons énoncée précédemment sans démonstration (art. 56).

§ VIII. *Problèmes divers sur les lignes conjointes, ou qui s'y rapportent.*

82. Problème. *Étant données deux lignes conjointes dans une conique, on demande de déterminer le cercle conjoint.*

Si les deux lignes conjointes rencontrent la conique, elles seront deux cordes de cette courbe; par les milieux de ces cordes on leur mènera des perpendiculaires dont le point de concours sera le centre du cercle cherché. Son rayon sera la distance de ce point à l'une des extrémités des deux cordes.

Si l'une des deux lignes conjointes ne rencontre pas la conique, on considérera que ses deux points d'intersection avec la courbe, et avec le cercle, sont imaginaires, mais que leur milieu est toujours réel; c'est le point où le diamètre de la conique, conjugué à la direction de cette droite, la rencontre. Par ce point on élèvera une perpendiculaire sur cette droite; elle passera par le centre du cercle cherché, qui dès-lors sera déterminé, puisque ce cercle doit passer par les deux points d'intersection réels de l'autre ligne conjointe avec la conique.

Si aucune des deux lignes conjointes ne rencontre la conique, on déterminera, comme nous venons de le dire, les points *milieux* de ces deux droites, et par ces points on leur mènera des perpendiculaires dont le point de concours sera le centre du cercle cherché.

Il reste à déterminer le rayon de ce cercle. Pour cela nous nous servirons d'une propriété de l'involution des six points que nous avons démontrée dans l'*Aperçu historique*, etc., p. 321; et dont voici l'énoncé :

« Quand six points A et A′, B et B′, C et C′ situés en ligne » droite, forment une involution, on a, en appelant α, β, γ » les points milieux des segments AA′, BB′, CC′, l'équation

$$\overline{\alpha A}^2.\beta\gamma - \overline{\beta B}^2.\gamma\alpha + \overline{\gamma C}^2.\alpha\beta = \alpha\beta.\beta\gamma.\gamma\alpha. \text{ »}$$

Une conique, un cercle et leurs deux lignes conjointes sont rencontrés par une transversale quelconque en six points qui sont en involution. Supposons donc que dans cette équation les points A, A′, appartiennent à la conique, les points B, B′ aux deux lignes conjointes, et les points C, C′ au cercle cherché; les points α, β seront connus; le point γ le sera aussi, parce que ce sera le pied de la perpendiculaire abaissée du centre du cercle sur la transversale; l'équation fera donc connaître immédiatement le segment γC et par suite le point C qui appartient au cercle. Si l'on mène la transversale par le centre du cercle, γC sera son rayon.

Supposons que les deux lignes conjointes se confondent en une seule, qui sera perpendiculaire à l'un des axes principaux de la conique. Si cette droite rencontre la conique, la construction du cercle conjoint n'offre point de difficulté. Si la droite ne rencontre pas la conique, on déterminera le centre du cercle de cette manière : on prendra le pôle de la droite par rapport à la courbe, et le point conjugué harmonique de ce pôle par rapport aux deux foyers situés sur l'axe principal; ce point sera le centre du cercle. Cette construction résulte de ce qui a été démontré (32). Quant au rayon du cercle, on le déterminera par la relation d'involution ci-dessus, qui se simplifie, parce que le segment $\mathfrak{E}B$ est égal à zéro.

Ainsi le problème est résolu dans tous les cas qu'il peut présenter.

83. Problème. *Étant donnés une conique et un cercle, on demande de déterminer leurs lignes conjointes.*

Ce problème est l'inverse du précédent, dont cependant il diffère essentiellement par sa nature; car le premier n'admettait qu'une solution, et devait se résoudre sans difficulté par les seuls principes de la Géométrie élémentaire, c'est-à-dire avec la ligne droite et le cercle. La nouvelle question, au contraire, admet trois solutions, puisqu'il y a en général trois systèmes de deux lignes conjointes; par conséquent elle exige la construction de sections coniques ou d'autres courbes d'un ordre supérieur, et elle n'est pas sans quelque difficulté.

Si le cercle rencontre la conique en quatre points, les trois systèmes de deux lignes conjointes seront déterminés par cela même. Si le cercle rencontre la conique en deux points seulement, la droite qui joindra ces deux points sera l'une des lignes conjointes cherchées; on déterminera l'autre par cette proposition, qu'une transversale quelconque rencontre la conique, le cercle et les deux lignes conjointes, en six points qui forment une involution.

Enfin, supposons que le cercle ne rencontre pas la conique, ce qui est le cas qui offre quelque difficulté et qui exige l'emploi des sections coniques.

Nous déterminerons d'abord le point de concours des deux lignes conjointes.

Pour cela, il suffit de rappeler le théorème 39 d'après lequel, si l'on tire arbitrairement une transversale, et qu'on prenne les polaires de chacun de ses points, par rapport à la conique et au cercle, ces polaires se couperont en un point dont le lieu sera une conique qui passera par le point de concours des deux lignes conjointes.

On décrira ainsi deux coniques, qui feront connaître ce point de concours.

Les deux coniques se couperont en quatre points dont l'un sera étranger à la question; ce sera le point d'intersection des polaires du point où les deux transversales qui ont servi pour décrire les deux coniques, se rencontrent. Les trois autres points d'intersection des deux coniques appartiendront aux trois systèmes de deux lignes conjointes. Dans deux de ces systèmes les lignes conjointes seront imaginaires, mais leur point de concours néanmoins sera réel. De sorte que les trois points d'intersection des deux coniques seront réels. Nous ne savons pas encore quel est celui de ces trois points qui appartient aux deux lignes conjointes réelles.

Prenons pour l'une des deux coniques, l'hyperbole équilatère qui répond au cas où la transversale est située à l'infini. Nous avons vu que cette hyperbole passe par les pieds des perpendiculaires abaissées du centre du cercle sur les deux lignes conjointes (53). Il faudra donc mener une droite, de ce centre à chacun des trois points trouvés, et décrire sur cette droite, comme diamètre, une circonférence de cercle. Celle de ces trois circonférences qui rencontrera l'hyperbole en deux points, autres que les extrémités de son diamètre, déterminera les deux lignes conjointes cherchées; car elles passeront par ces deux points.

Ainsi le problème est résolu.

84. Nous avons vu qu'un cercle peut se réduire à un point et même devenir imaginaire, et que, dans l'un et l'autre cas, il y a toujours deux lignes conjointes (26 et 27). La solution que nous venons de donner pour déterminer ces lignes s'applique d'elle-même à ces deux cas. Il nous faut seulement dire ce que devient alors la polaire d'un point. Quand le cercle a son rayon nul, et se réduit à un point O, la polaire d'un point quelconque m passe par ce point O et est perpendiculaire à la droite menée du point m à ce point O. Quand le cercle est imaginaire, le carré de son rayon est négatif et a une valeur don-

née. La polaire d'un point m est toujours perpendiculaire à la droite menée de ce point au centre du cercle, et la rencontre en un point m', tel que le produit $Om.Om'$ est égal au carré du rayon. Ce produit est donc négatif; ce qui indique que le point m', au lieu d'être situé sur la droite Om, comme dans le cas d'un cercle réel, est situé sur le prolongement de cette droite au-delà du point O.

Ainsi il sera facile de déterminer la polaire d'un point quelconque, et par conséquent de décrire deux coniques qui passeront par les points de concours des lignes conjointes. L'une de ces coniques sera l'hyperbole équilatère, et l'on achèvera la solution comme dans le cas d'un cercle réel.

85. Cette construction des points de concours des lignes conjointes d'une conique relative à un cercle imaginaire, s'applique naturellement à un autre problème qui, au premier abord, peut paraître très différent de celui que nous venons de résoudre, mais qui s'y ramène aisément. Ce problème est celui-ci :

Problème. *Étant donné un cône du second degré, dont on connaît la base et le sommet; on demande de déterminer ses axes principaux.*

Les trois axes principaux du cône forment un système de trois axes conjugués; et un tel système jouit de cette propriété que les points où les trois axes rencontrent la base du cône sont tels que chacun d'eux a pour polaire la droite qui joint les deux autres. Ce qui caractérise les trois axes principaux, c'est que chacun d'eux est perpendiculaire au plan des deux autres. Il faut donc trouver dans le plan de la conique qui sert de base au cône un système de trois points dont chacun soit le pôle de la droite qui joint les deux autres, par rapport à cette conique, et qui soient tels que la droite menée du sommet du cône à chacun de ces points soit perpendiculaire au plan mené par sa polaire.

Du sommet S du cône abaissons la perpendiculaire sur le plan de sa base; soit O son pied, et supposons que ce point soit le centre d'un cercle imaginaire dont le carré du rayon soit égal, avec le signe *moins*, au carré de la perpendiculaire. Si l'on prend la polaire d'un point quelconque m par rapport à ce cercle, elle rencontrera le prolongement de la droite mO en un point m', tel qu'on aura $\mathrm{O}m.\mathrm{O}m' = \overline{\mathrm{OS}}^2$: ce qui prouve que le triangle $m\mathrm{S}m'$ est rectangle en S. De sorte que la droite Om est perpendiculaire au plan mené par le sommet du cône et par la polaire du point m prise par rapport au cercle imaginaire. On conclut de là ce théorème :

Si autour d'un point fixe de l'espace, comme sommet, on fait tourner un angle trièdre trirectangle, ses arètes rencontreront un plan fixe en trois points dont chacun sera le pôle de la droite qui joint les deux autres, par rapport à un certain cercle imaginaire.

Le centre de ce cercle sera le pied de la perpendiculaire abaissée du point fixe sur le plan, et le carré de son rayon sera égal au carré de cette perpendiculaire pris avec le signe *moins*.

D'après cela, la solution du problème proposé se réduira à la recherche des points de concours des lignes conjointes relatives à ce cercle imaginaire et à la conique qui est la base du cône ; et nous avons appris dans la question précédente à construire ces points de concours par les intersections de deux coniques dont une peut être une hyperbole équilatère.

Ainsi le problème est résolu.

J'ai déjà donné deux solutions générales de ce problème, très différentes de celle qui précède. (Voir *Aperçu historique*, etc., page 82.) J'aurai encore occasion ailleurs d'en donner d'autres.

86. Problème. *Un point étant pris arbitrairement dans le plan d'une conique, on demande de mener les normales à cette courbe, qui passent par ce point.*

Nous avons déjà résolu ce problème d'une manière générale, au moyen d'une parabole (75); mais dans la pratique on se servira de l'hyperbole équilatère dont nous avons donné plusieurs constructions différentes (46, 49 et 52), et dont les points d'intersection avec la conique proposée sont les pieds des normales cherchées.

Le problème admet, en général, quatre solutions. Deux pourront être imaginaires; mais les deux autres seront toujours réelles. Car si la conique proposée est une ellipse, comme l'hyperbole passe par son centre, elle rencontrera nécessairement l'ellipse, au moins en deux points ; et si la conique est une hyperbole, comme les asymptotes de l'hyperbole équilatère sont parallèles aux axes principaux de cette hyperbole, celle-ci rencontrera l'une au moins de ces asymptotes, celle qui est parallèle à son axe transverse, et par conséquent elle rencontrera la branche de l'hyperbole équilatère, correspondante à cette asymptote.

Si la conique proposée est une parabole, l'un de ses points d'intersection avec l'hyperbole équilatère sera situé à l'infini, puisqu'une asymptote de l'hyperbole est parallèle à l'axe de la parabole (46). Dans ce cas le problème n'admet plus que trois solutions dont deux peuvent être imaginaires.

C'est cette hyperbole équilatère dont Apollonius s'est servi pour résoudre le même problème dans les propositions 58,... 63 du cinquième livre de ses *Coniques*, qui traite, comme on sait, des *maxima* et *minima*, spéculations difficiles pour le temps et qui étaient entièrement dues au génie d'Apollonius. Viviani, qui, avant qu'on eût retrouvé ce cinquième livre, l'avait rétabli sur les faibles indications laissées par Pappus dans le septième livre de ses *Collections mathématiques*, a aussi traité le problème en question, et s'est servi de la même hyperbole équilatère pour le résoudre. (Voir *De maximis et minimis Geometrica divinatio in quintum Conicorum Apollonii adhuc desideratum*, in-fol., Florentiæ, 1659; propositions 20, 22 et 23 du second livre) (*).

(*) Dans le cas particulier de la parabole, Viviani démontre ce théorème : *Quand plusieurs paraboles ont le même sommet et le même axe, les pieds des perpendiculaires abaissées sur ces courbes d'un point de leur axe, sont sur une ellipse.* (Liv. II, propos. 21.) Cette propriété des paraboles a encore lieu quand le point par lequel on leur mène des normales est pris en dehors de leur axe. Cette remarque est due à Sluze. (*Voir* chap. VI de ses *Miscellanea*, in-4°, 1668.) L'ellipse, lieu des pieds des normales aux paraboles, passe par le sommet de ces courbes et a l'un de ses axes principaux perpendiculaire à leur axe commun. Il suit de là, par notre proposition (16), que *les pieds des trois normales abaissées d'un même point sur une parabole, et le sommet de cette courbe, sont quatre points situés sur un même cercle.* Sluze a déterminé par l'analyse l'équation de ce cercle.

Ce géomètre fut l'un des premiers et des plus célèbres promoteurs de l'*analyse*

Pour construire l'hyperbole, Apollonius et Viviani déterminent ses asymptotes; ce qui suffit, puisqu'elle doit passer par le point par lequel on veut mener les normales à la conique proposée.

Cette solution a été reproduite par de la Hire, dans son grand *Traité des Coniques* (livre 7, propositions 18,...23), et ensuite par plusieurs autres auteurs. Notre construction de l'hyperbole par points, qui résulte du théorème 52, offre une solution plus facile et plus expéditive que celle-là. Du point donné, comme centre, on décrira plusieurs cercles, et l'on prendra les milieux des cordes qu'ils soutendront dans la conique; ces points appartiendront à l'hyperbole.

Si l'on voulait déterminer directement et *à priori* le centre de l'hyperbole, on le ferait par la seconde partie du théorème 53.

87. Cette solution s'applique au problème suivant, qui est plus général, et qu'on aurait pu regarder comme plus difficile :

Problème. *D'un point donné, on demande d'abaisser sur une conique des obliques dont chacune fasse avec la courbe, au point d'incidence, un angle de grandeur donnée.*

Du point donné, comme centre, on décrira des cercles, et l'on abaissera sur les cordes qu'ils intercepteront dans la conique, des obliques faisant avec elles des angles égaux à l'angle donné. Les pieds de ces obliques seront sur une hyperbole équilatère, dont les points d'intersection avec la conique seront les pieds des obliques demandées. Cela résulte du théorème 57.

88. On peut encore construire l'hyperbole de cette manière, qui correspond au théorème 46.

Du point donné, on abaissera sur chaque tangente à la conique une oblique faisant avec elle, dans un sens déterminé, l'angle donné. Cette oblique rencontrera en un point le diamètre de la conique qui aboutit au point de contact de la tangente; ce point se trouvera sur l'hyperbole équilatère en question, dont les points d'intersection avec la conique seront les pieds des obliques cherchées.

---

appliquée à la Géométrie que venait de créer Descartes. Il excellait aussi dans cette autre partie de la Géométrie, cultivée dans le même temps par Pascal à la manière des Anciens, et qui traite des dimensions des figures.

En effet, supposons que la conique proposée ait un centre, il faudra abaisser du point donné une oblique sur chaque diamètre D de cette courbe et prendre le point de rencontre de cette oblique avec le diamètre conjugué Δ. Les obliques abaissées sur deux diamètres D, D′ font avec eux, respectivement, des angles égaux à l'angle donné; conséquemment elles font entre elles un angle égal à celui des deux diamètres. Donc le rapport *anharmonique* de quatre obliques est égal à celui des quatre diamètres correspondants D, D′, etc.; or celui-ci est égal à celui des quatre diamètres Δ, Δ', etc., conjugués à ceux-là : donc le rapport anharmonique des quatre obliques est égal à celui des quatre diamètres Δ, Δ', etc.; donc ces obliques rencontrent ces diamètres respectivement, en quatre points situés sur une conique qui passe par le point de concours de ces diamètres et par celui des obliques (*Aperçu historique*, etc., p. 335). On reconnaît aisément que cette conique passera par les pieds des obliques abaissées sur la conique proposée. Ce qui démontre la proposition.

§ IX. *Sur les cônes conjoints dans les surfaces du second degré.*

89. Aux *lignes conjointes* dans les coniques, correspondent dans la Géométrie à trois dimensions, les cônes qui passent par la courbe à double courbure provenant de l'intersection d'une surface du second degré par une sphère. La considération de ces cônes peut donner lieu à de nombreux théorèmes analogues à ceux qui se présentent dans la théorie des lignes conjointes.

Pour abréviation, on peut appeler ces cônes, *cônes conjoints* relatifs aux sphères auxquelles ils correspondent.

M. Terquem, dans son intéressant article sur les *lignes conjointes* des coniques, avait annoncé que les mêmes considérations avaient lieu dans les surfaces du second degré. En effet, ce savant géomètre, dans un des derniers numéros de ce *Journal* (tome III, p. 100), a fait connaître déjà quelques résultats curieux de cette théorie qui l'a conduit particulièrement à une construction élégante des deux centres de courbure d'une surface du second degré, en chacun de ses points.

M. Terquem définit les cônes en question par cette condition que : *le produit des segments compris sur chaque arète d'un cône, entre la surface du second degré et le sommet du cône, doit être constant.* En effet le cône déterminé par cette condition rencontre la surface du second degré suivant une courbe à double courbure par laquelle on peut faire passer une sphère.

Je me propose de traiter, dans un autre écrit, des propriétés générales de ces cônes. Je vais me borner ici à en énoncer quelques-unes qui feront voir que la matière est féconde, et qui pourront engager quelques lecteurs à s'en occuper.

90. *Un cône conjoint relatif à une surface du second degré quelconque, a toujours ses axes principaux parallèles à ceux de la surface, et les plans de ses sections circulaires parallèles aussi à ceux de la surface.*

Cette propriété admet un grand nombre de corollaires ; car elle fait voir qu'une série de cônes conjoints qui ont un sommet commun jouissent de toutes les propriétés que nous avons trouvées relativement aux *plans cycliques* des cônes du second degré (*). Nous ne les rapporterons pas ici ; nous nous bornerons à énoncer seulement le théorème suivant, qui peut servir comme moyen de description des cônes conjoints :

La somme des angles que chaque plan tangent à un même cône conjoint, fait avec les plans des sections circulaires de la surface du second degré, est constante.

91. Chacun de ces plans tangents coupe la surface suivant une conique dont un des axes principaux est parallèle à l'arète de contact de ce plan tangent.

Il suit de là que le plan tangent commun à deux cônes conjoints qui ont le même sommet, les touche suivant deux arètes qui font entre elles un angle droit.

(*) Voir *Mémoire de Géométrie sur les propriétés générales des cônes du second degré*, in-4°, Bachelier. — *Mémoires de l'Académie de Bruxelles*, t. VI.

92. Deux cônes conjoints quelconques ont leur courbe d'intersection située sur une sphère qui passe par le cercle d'intersection des deux sphères relatives à ces cônes.

93. Il y a, en général, quatre cônes conjoints répondant à une même sphère; il ne peut y en avoir plus de quatre; mais ils peuvent être imaginaires.

94. Les sommets de ces quatre cônes, le centre de la sphère et le centre de la surface du second degré sont six points qui suffisent pour déterminer une courbe à double courbure du troisième ordre, c'est-à-dire qui n'est rencontrée par un plan transversal quelconque qu'en trois points.

95. Cette courbe rencontre la surface du second degré en six points qui sont les pieds des normales abaissées du centre de la sphère sur cette surface.

96. Il suit de là que, d'un point de l'espace on ne peut abaisser que six normales sur une surface du second degré; et que ces six droites sont les arêtes d'un même cône du second degré.

97. Les droites menées par le point fixe parallèlement aux axes principaux de la surface; la droite qui aboutit au centre de cette surface, et les trois axes principaux du cône qui lui est circonscrit et qui a pour sommet le point fixe, sont sept autres génératrices du même cône du second degré.

98. Ce cône passe par les sommets des cônes conjoints relatifs à la surface du second degré et à une sphère d'un rayon quelconque, et ayant pour centre le point d'où l'on a abaissé les normales.

99. Quand plusieurs surfaces du second degré sont homothétiques et concentriques, si par un point fixe quelconque on leur mène des normales, toutes ces droites formeront un cône du second degré, et leurs pieds sur les surfaces seront sur une courbe à double courbure du troisième ordre.

Les axes principaux des cônes circonscrits aux surfaces et ayant pour sommet commun le point fixe, seront des arêtes du même cône du second degré.

100. Quand plusieurs surfaces du second degré sont concentriques, si des différents points d'une ligne droite prise arbitrairement dans l'espace, on abaisse des normales sur ces surfaces, leurs pieds seront sur une hyperboloïde à une nappe.

101. Quand par la courbe d'intersection d'une surface du second degré et d'une sphère on fait passer une infinité d'autres surfaces du second degré, les normales abaissées du centre de la sphère sur ces surfaces, formeront un cône du second degré, et leurs pieds sur les surfaces seront sur une courbe à double courbure du troisième ordre;

Cette courbe sera aussi le lieu des centres de toutes les surfaces.