JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Note sur l'intégration d'une équation aux différentielles partielles qui se présente dans la théorie du son

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 3 (1838), p. 435-436.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1838_1_3__435_0>

Note sur l'intégration d'une équation aux différentielles partielles qui se présente dans la théorie du son;

PAR J. LIOUVILLE (*).

Dans les nouveaux Mémoires de l'Académie des Sciences (année 1818), M. Poisson a donné l'intégrale de l'équation

$$(a) \qquad \frac{d^2\lambda}{dt^2} = a^2\left(\frac{d^2\lambda}{dx^2} + \frac{d^2\lambda}{dy^2} + \frac{d^2\lambda}{dz^2}\right).$$

En désignant par $F(x, y, z)$, $a^2\psi(x, y, z)$ les valeurs de λ et $\frac{d\lambda}{dt}$ pour $t=0$, il a trouvé

$$(b) \quad \lambda = \frac{a^2}{4\pi}\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\psi(x+at\cos\theta, y+at\sin\theta\sin\omega, z+at\sin\theta\cos\omega)t\sin\theta\, d\theta d\omega$$
$$+\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{d}{dt}\int_0^\pi\int_0^{2\pi}F(x+at\cos\theta, y+at\sin\theta\sin\omega, z+at\sin\theta\cos\omega)t\sin\theta\, d\theta d\omega$$

Les deux méthodes qui le conduisent à ce résultat sont assez simples, surtout la seconde; d'ailleurs, il montre que l'on peut aisément en vérifier *à posteriori* l'exactitude.

Mais, dans un autre Mémoire *sur la propagation du mouvement dans les milieux élastiques* (**), l'illustre géomètre considère, au lieu de l'équation (a), l'équation suivante:

$$(c) \qquad \frac{d^2\varphi}{dt^2} = a^2\left[\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2} + \psi(x, y, z)\right],$$

(*) Cette Note a déjà paru dans le *Compte rendu des séances de l'Académie des Sciences* (séance du 23 juillet 1838).

(**) *Nouveaux Mémoires de l'Académie des Sciences*, tome X.

à laquelle on doit joindre les conditions définies que voici :

$$\varphi = 0,\ \frac{d\varphi}{dt} = F(x, y, z) \text{ pour } t = 0,$$

$\psi(x, y, z)$, $F(x, y, z)$ étant deux fonctions connues de x, y, z. Et le procédé qu'il emploie pour ramener l'intégration de l'équation (c) à celle de l'équation a, ou plutôt pour simplifier l'intégrale de l'équation (c), exige d'assez longs calculs. Or, on peut éviter ces calculs en adoptant la marche que je vais indiquer.

Je différencie l'équation (c) par rapport à t, et je pose $\frac{d\varphi}{dt} = \lambda$; je trouve ainsi que λ doit satisfaire précisément à l'équation (a); de plus pour $t = 0$, il vient

$$\lambda = \frac{d\varphi}{dt} = F(x, y, z),$$

puis

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = a^2\left[\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2} + \psi(x, y, z)\right],$$

ou simplement

$$\frac{d\lambda}{dt} = a^2\psi(x, y, z),$$

puisque φ s'évanouit en même temps que t. La valeur de λ ou $\frac{d\varphi}{dt}$ est donc celle écrite ci-dessus et fournie par la formule (b); pour en déduire φ il suffit d'intégrer à partir de $t = 0$, ce qui donne

$$\begin{aligned}\varphi = {} & \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} F(x + at\cos\theta,\ y + at\sin\theta\sin\omega,\ z + at\sin\theta\cos\omega)\, t\sin\theta\, d\theta\, d\omega \\ & + \frac{1}{4\pi}\int_0^{at}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\psi(x + \rho\cos\theta,\ y + \rho\sin\theta\sin\omega, z + \rho\sin\theta\cos\omega)\,\rho\sin\theta\, d\rho\, d\theta\, d\omega.\end{aligned}$$

C'est la formule de M. Poisson, telle qu'on la lit au n° 5 de son Mémoire.