# JOURNAL

DE

# MATHÉMATIQUES

## PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE



JACOBI


**Sur le Calcul des Variations et sur la Théorie des Équations différentielles**


*Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série*, tome 3 (1838), p. 44-59.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1838_1_3__44_0>

# *Sur le Calcul des Variations et sur la Théorie des Équations différentielles ;*

**Par M. JACOBI** (*).

(Extrait d'une lettre du 29 novembre 1836, adressée à M. le professeur Enke, secrétaire de la classe des Sciences mathématiques de l'Académie de Berlin.)

J'ai réussi à remplir une grande lacune que présentait le calcul des variations. Dans les problèmes de *maxima* et *minima*, qui dépendent de ce calcul, on ne connaissait aucune règle générale pour décider si une solution répond réellement à un maximum ou à un minimum, ou ne donne ni l'un ni l'autre. On avait reconnu à la vérité qu'il suffit de savoir si les intégrales d'un certain système d'équations différentielles restent finies entre les limites de l'intégrale qui doit devenir un maximum ou un minimum. Mais on ne pouvait ni intégrer ces équations, ni trouver d'une autre manière dans quels cas leurs intégrales conservent une valeur finie entre les limites données. J'ai remarqué que ces intégrales s'obtiennent immédiatement si l'on a intégré les équations différentielles du problème, c'est-à-dire les équations différentielles qui doivent être satisfaites pour que la variation première disparaisse. Si, par l'intégration de ces équations différentielles, on a obtenu l'expression des fonctions cherchées, renfermant un certain nombre de

(*) Ce Mémoire fait partie d'un des derniers cahiers du *Journal de M. Crelle*. En imprimant ici la traduction suivante qu'un de mes amis a bien voulu me communiquer, je crois rendre service aux lecteurs français, et aussi donner à M. Jacobi un témoignage public de l'estime profonde que j'ai pour son talent. On pourra joindre à cet article celui que M. Jacobi lui-même a fait insérer dans le *Compte rendu des séances de l'Académie des Sciences de Paris* (tome V, page 61). J. Liouville.

constantes arbitraires, leurs différentielles partielles par rapport à ces constantes donneront les intégrales des équations différentielles qu'il faut intégrer pour déterminer les caractères distincts des *maxima* ou *minima*.

Soit, pour considérer le cas le plus simple, l'intégrale

$$\int f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) dx;$$

$y$ est déterminé par l'équation différentielle

$$\frac{df}{dy} - d.\frac{\frac{df}{dy'}}{dx} = 0,$$

où $y'$ représente $\frac{dy}{dx}$. L'expression de $y$ donnée par l'intégration de cette équation renferme deux constantes arbitraires que je désigne par $a$ et $b$. La variation seconde sera, en posant $w = \delta y$, $w' = \frac{dw}{dx}$,

$$\int \left(\frac{d^2 f}{dy^2} w^2 + 2\frac{d^2 f}{dy dy'} ww' + \frac{d^2 f}{dy'^2} w'^2\right) dx,$$

dans laquelle $\frac{d^2 f}{dy'^2}$ doit conserver le même signe pour qu'il y ait maximum ou minimum. Mais pour avoir tous les caractères du maximum et du minimum, il faut connaître l'expression complète d'une fonction $v$ qui satisfait à l'équation différentielle

$$\frac{d^2 f}{dy'^2}\left(\frac{d^2 f}{dy^2} + \frac{dv}{dx}\right) = \left(\frac{d^2 f}{dy dy'} + v\right)^2,$$

comme on peut le voir dans la théorie des fonctions de Lagrange (*), ou dans le calcul des variations de Dirksen. (Le calcul des variations de Ohm ne donne pas cette théorie avec précision.) Cette expression complète de $v$ se trouve comme il suit: soit $u = \alpha\frac{dy}{da} + \beta\frac{dy}{db}$, où $\frac{dy}{da}$ et $\frac{dy}{db}$ représentent les différentielles partielles de $y$ prises par rapport aux constantes arbitraires $a$ et $b$ que renferme $y$, $\alpha$ et $\beta$ étant deux nouvelles constantes arbitraires; l'expression demandée sera

(*) *Théorie des fonctions analytiques*, p. 208, n° 176.

$$v = -\left(\frac{d^2f}{dydy'} + \frac{1}{u}\frac{d^2f}{dy'^2}\frac{du}{dx}\right),$$

qui contient la constante arbitraire $\frac{\beta}{\alpha}$.

Le cas où il se trouve sous le signe d'intégration des différentielles d'un ordre supérieur au premier est plus difficile. Soit l'intégrale $\int f(x, y, y', y'')\,dx$, qu'il faut rendre un maximum ou un minimum, $y'$ et $y''$ désignant toujours $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{d^2y}{dx^2}$; $y$ devra être l'intégrale de l'équation

$$\frac{df}{dy} - d\,.\,\frac{\frac{df}{dy'}}{dx} + d^2\,.\,\frac{\frac{df}{dy''}}{dx^2} = 0,$$

et renfermera quatre constantes arbitraires $a$, $a_1$, $a_2$, $a_3$. Si $w = \delta y$, $w' = \delta y'$, $w'' = \delta y''$, la variation seconde sera

$$\int\left(\frac{d^2f}{dy^2}w^2 + 2\frac{d^2f}{dydy'}ww' + 2\frac{d^2f}{dydy''}ww'' + 2\frac{d^2f}{dy'dy''}w'w'' + \frac{d^2f}{dy'^2}w'^2 + \frac{d^2f}{dy''^2}w''^2\right)dx.$$

Pour le maximum ou le minimum, il faut que $\frac{d^2f}{dy''^2}$ conserve toujours le même signe. Pour avoir tous les caractères de maxima et de minima, on doit intégrer le système des équations différentielles suivantes, comme on peut le voir dans la théorie des fonctions de Lagrange,

$$\left(\frac{d^2f}{dy^2} + \frac{dv}{dx}\right)\left(\frac{d^2f}{dy'^2} + \frac{dv_2}{dx} + 2v_1\right) = \left(\frac{d^2f}{dydy'} + v + \frac{dv_1}{dx}\right)^2,$$
$$\frac{d^2f}{dy''^2}\left(\frac{d^2f}{dy^2} + \frac{dv}{dx}\right) = \left(\frac{d^2f}{dydy''} + v_1\right)^2,$$
$$\frac{d^2f}{dy''^2}\left(\frac{d^2f}{dy'^2} + \frac{dv_2}{dx} + 2v_1\right) = \left(\frac{d^2f}{dy'dy''} + v_2\right)^2.$$

Au moyen de ces équations différentielles du premier ordre, qui présentent un aspect assez compliqué, il faut déterminer les fonctions $v$, $v_1$ et $v_2$, dont l'expression complète renferme trois constantes arbitraires. J'en ai trouvé l'intégrale comme il suit : soit

$$u = \alpha\frac{dy}{da} + \alpha_1\frac{dy}{da_1} + \alpha_2\frac{dy}{da_2} + \alpha_3\frac{dy}{da_3},$$

et

$$u_1 = \beta\frac{dy}{da} + \beta_1\frac{dy}{da_1} + \beta_2\frac{dy}{da_2} + \beta_3\frac{dy}{da_3},$$

en sorte que $u$ et $u_1$ sont des expressions linéaires des différentielles partielles de $y$, par rapport aux constantes arbitraires que cette fonction renferme. Les huit constantes $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta, \beta_1, \beta_2, \beta_3$, ne sont pas entièrement arbitraires; mais entre les six quantités qui s'en déduisent, $\alpha\mathcal{E}_1 - \alpha_1\mathcal{E}$, $\alpha\mathcal{E}_2 - \alpha_2\mathcal{E}$, $\alpha\mathcal{E}_3 - \alpha_3\mathcal{E}$, $\alpha_2\mathcal{E}_3 - \alpha_3\mathcal{E}_2$, $\alpha_3\mathcal{E}_1 - \alpha_1\mathcal{E}_3$ et $\alpha_1\mathcal{E}_2 - \alpha_2\mathcal{E}_1$, il doit exister une certaine condition que je ne développerai pas ici. Cela posé, j'ai trouvé pour $\nu, \nu_1, \nu_2$, les expressions générales qui suivent :

$$\nu_2 = -\frac{d^2f}{dy'dy''} - \frac{d^2f}{dy''^2} \cdot \frac{u\dfrac{d^2u_1}{dx^2} - u_1\dfrac{d^2u}{dx^2}}{u\dfrac{du_1}{dx} - u_1\dfrac{du}{dx}},$$

$$\nu_1 = -\frac{d^2f}{dydy''} + \frac{d^2f}{dy''^2} \cdot \frac{\dfrac{du}{dx}\cdot\dfrac{d^2u_1}{dx^2} - \dfrac{du_1}{dx}\cdot\dfrac{d^2u}{dx^2}}{u\dfrac{du_1}{dx} - u_1\dfrac{du}{dx}},$$

$$\nu = -\frac{d\nu_1}{dx} - \frac{d^2f}{dydy'} - \frac{d^2f}{dy''^2} \cdot \frac{\left(u\dfrac{d^2u_1}{dx^2} - u_1\dfrac{d^2u}{dx^2}\right)\left(\dfrac{du}{dx}\cdot\dfrac{d^2u_1}{dx^2} - \dfrac{du_1}{dx}\cdot\dfrac{d^2u}{dx^2}\right)}{\left(u\dfrac{du_1}{dx} - u_1\dfrac{du}{dx}\right)^2}.$$

Les six quantités $\alpha\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}\alpha_1$, etc., sont liées par une équation identique, outre la condition à laquelle elles sont assujéties, et les expressions de $\nu, \nu_1, \nu_2$, renferment seulement leurs rapports, en sorte qu'elles tiennent lieu des trois constantes arbitraires qu'on doit avoir.

La théorie générale, quand les différentielles de $y$ s'élèvent à un ordre quelconque sous le signe d'intégration, se déduit sans difficulte d'une propriété remarquable de certaines équations différentielles linéaires. Ces équations différentielles de l'ordre $2n$ ont la forme

$$0 = \mathrm{A}y + \frac{d.\mathrm{A}_1y'}{dx} + \frac{d^2.\mathrm{A}_2y''}{dx^2} + \frac{d^3.\mathrm{A}_3y'''}{dx^3} + \ldots + \frac{d^n.\mathrm{A}_ny^{(n)}}{dx^n} = \mathrm{Y}.$$

où $y^{(m)} = \dfrac{d^my}{dx^m}$; et où $\mathrm{A}, \mathrm{A}_1, \ldots$ etc., sont des fonctions données de $x$.

Si $y$ est une intégrale quelconque de l'équation $\mathrm{Y} = 0$, et si l'on pose $u = ty$, l'expression suivante, où $u^{(m)}$ désigne $\dfrac{d^mu}{dx^m}$,

$$y\left(\mathrm{A}u + \frac{d.\mathrm{A}_1u'}{dx} + \frac{d^2.\mathrm{A}_2u''}{dx^2} + \ldots + \frac{d^n.\mathrm{A}_nu^{(n)}}{dx^n}\right) = y\mathrm{U},$$

sera intégrable, c'est-à-dire qu'on peut trouver son intégrale sans connaître $t$; et cette intégrale aura la même forme que Y : seulement $n$ sera diminué d'une unité; ainsi l'on a

$$\int y \mathrm{U} dx = \mathrm{B}t' + \frac{d.\mathrm{B}_1 t''}{dx} + \frac{d^2.\mathrm{B}_2 t'''}{dx^2} + \ldots + \frac{d^{n-1}\mathrm{B}_{n-1} t^{(n)}}{dx^{n-1}},$$

en faisant $t^{(m)} = \frac{d^m t}{dx^m}$; les fonctions B peuvent s'exprimer généralement au moyen de $y$, des fonctions A, et de leurs différentielles. La démonstration de ce principe n'offre aucune difficulté. J'ai trouvé l'expression générale des fonctions B; toutefois il suffit, pour la question proposée, de prouver seulement qu'en général l'intégrale $\int y \mathrm{U} dx$ a la forme indiquée ci-dessus, sans qu'il soit nécessaire de connaître les fonctions B elles-mêmes.

La métaphysique des résultats obtenus, pour me servir d'une expression française, repose à peu près sur les considérations suivantes : on peut donner à la variation première la forme $\int \mathrm{V} \delta y dx$, $\mathrm{V} = 0$ étant l'équation à intégrer; la variation seconde prend alors la forme $\int \delta \mathrm{V} \delta y dx$. Si la variation seconde ne doit pas changer de signe, elle ne devra pas non plus pouvoir s'évanouir, en sorte que l'équation $\delta \mathrm{V} = 0$, qui est linéaire en $\delta y$, ne donnera par l'intégration aucune valeur de $\delta y$ qui remplisse les conditions auxquelles cette fonction est assujétie d'après la nature du problème. Ainsi l'équation $\delta \mathrm{V} = 0$ joue un rôle important dans cette recherche, et l'on aperçoit de suite sa connexion avec les équations différentielles dont les intégrales donnent les caractères des *maxima* et *minima*. D'ailleurs on voit facilement que chaque différentielle partielle de $y$, prise par rapport à l'une des constantes arbitraires que cette fonction renferme comme intégrale de l'équation $\mathrm{V} = 0$, est une valeur de $\delta y$ qui satisfait à l'équation différentielle $\delta \mathrm{V} = 0$; on obtient donc l'intégrale générale de cette équation en composant une expression linéaire de toutes ces différentielles partielles (*).

---

(*) Si l'on remplace V par une fonction quelconque $f(x, y, y', \ldots y^{(n)})$ et si l'on pose $\delta y = u$, cette remarque donne le théorème dont j'ai parlé à la page 31 du cahier précédent. Mais, comme je l'ai fait observer, il est bon d'avoir détaché ce théorème des longues théories afin de l'introduire dans les éléments. Il s'étend à un nombre quelconque d'équations différentielles simultanées, et peut servir

L'équation $\delta V = 0$, dont on trouve ainsi l'intégrale complète, peut se mettre sous la forme que prend l'équation ci-dessus $Y = 0$, en y remplaçant $y$ par $\delta y$ : au moyen des propriétés reconnues aux équations de ce genre, et à l'aide d'une intégration par parties plusieurs fois répétée, on arrive à transformer la variation seconde $\int \delta V \delta y dx$, en une autre expression qui contient un carré parfait sous le signe d'intégration ; or, c'est là précisément la transformation qu'on voulait effectuer. Si l'on reprend, par exemple, l'intégrale $\int f(x, y, y', y'')dx$, et si l'on conserve les valeurs de $u$ et $u_1$ indiquées pour ce cas, $\delta V$ pourra se mettre sous la forme

$$\delta V = A\delta y + \frac{d.A_1\delta y'}{dx} + \frac{d^2.A_2\delta y''}{dx^2},$$

et l'on aura $\delta V = 0$ pour $\delta y = u$. Soit $\delta y = u\delta' y$; il viendra, d'après le théorème général exposé ci-dessus,

$$\int \delta V \delta y dx = \int u \delta V \delta' y dx = \left(B\delta' y' + \frac{d.B_1\delta' y''}{dx}\right)\delta' y - \int \left(B\delta' y' + \frac{d.B_1\delta' y''}{dx}\right)\delta' y' dx.$$

si l'on désigne maintenant la dernière intégrale par $\int V_1 \delta' y' dx$, l'équation $\delta V_1 = 0$ sera satisfaite en posant $\delta' y = \frac{u_1}{u}$, d'où $\delta' y' = \frac{uu'_1 - u_1 u'}{u^2}$. On peut continuer d'après la même méthode, en faisant..... $\delta' y' = \frac{uu_1 - u_1 u'}{u^2} \delta'' y$, et il viendra, d'après le même théorème :

$$\int V_1 \delta' y' dx = \int V_1 \left(\frac{uu'_1 - u_1 u'}{u^2}\right) \delta'' y dx = C\delta'' y' . \delta'' y - \int C (\delta'' y')^2 dx.$$

C'est la dernière transformation dans laquelle la variation arbitraire entre seulement au carré sous le signe d'intégration. On voit du reste facilement que $B_1 = u^2 A_2$, $C = \left(\frac{uu'_1 - u_1 u'}{u^2}\right)^2 B_1$, et par suite $C = \frac{uu'_1 - u_1 u'}{u^2}\Big)^2 A_2$.

---

dans certains cas à les intégrer par approximation. Pour passer de l'intégrale de $f(x, y, y', \ldots y^{(n)}) = 0$, à celle de $f(x, y, y', y^{(n)}) = Q$, où Q reste toujours un très petit nombre, il suffit en effet d'augmenter $y$ d'un terme $u$ très petit, déterminé par l'équation (2) de la page 31, à laquelle on donnera Q pour second membre. (J. LIOUVILLE.)

De plus $A_2 = \frac{d^2 f}{dy''^2}$, en sorte que C a le même signe que $\frac{d^2 f}{dy''^2}$, qui doit être toujours positif pour le minimum et toujours négatif pour le maximum. Il faut encore chercher si $\delta'''y'$ peut devenir infini entre les limites de l'intégration, ce que l'on fera à l'aide des fonctions $u$ et $u_1$, qui sont connues dès que l'on a obtenu $y$ ou l'intégrale complète de l'équation $V = 0$.

Quoique cette analyse indiquée sommairement exige une assez profonde connaissance du calcul intégral, les caractères qu'on en déduit pour reconnaître si une solution donne en général un maximum ou un minimum sont fort simples. Considérons le cas où $y$ entre sous le signe d'intégration avec ses différentielles jusqu'au $n^{ième}$ ordre, et supposons que les valeurs de $y, y', y'' \ldots y^{(n-1)}$ aux limites et les limites elles-mêmes soient données. Si l'on met ces valeurs dans les $2n$ équations intégrales, les $2n$ constantes arbitraires seront déterminées; mais puisqu'il faut alors résoudre des équations, on trouve en général plusieurs systèmes de valeurs, et par suite on obtient plusieurs courbes qui satisfont aux mêmes conditions et aux mêmes équations différentielles. Quand on en a choisi une, on regarde le premier point limite comme fixe et de celui-ci on s'avance vers les points suivants de la courbe; si l'on prend l'un de ces points comme seconde limite, il pourra arriver, d'après la remarque qu'on vient de faire, qu'entre ce point et le premier il passe une autre courbe pour laquelle $y, y', y'' \ldots y^{(n-1)}$ aient les mêmes valeurs aux deux limites, et qui satisfasse à la même équation différentielle. Ainsi, dès qu'en s'avançant sur la courbe on arrive à un point pour lequel une de ces autres courbes vient se confondre avec elle, ou, si l'on veut, s'en rapprocher infiniment, l'intégrale qui doit donner lieu à un maximum ou à un minimum ne peut s'étendre jusqu'à ce point, ni au-delà de ce point; mais si l'intégrale ne s'étend pas jusqu'à cette limite, il y aura un maximum ou un minimum, pourvu que $\frac{d^2 f}{dy^{(n)2}}$ conserve toujours le même signe.

Pour éclaircir ceci par un exemple, considérons le principe de la moindre action dans le mouvement elliptique des planètes.

L'intégrale à considérer dans le principe de la moindre action ne peut jamais devenir un maximum, comme Lagrange l'a cru; cependant elle n'est pas toujours un minimum : il faut pour cela que certaines conditions aux limites, données par la règle précédente, soient remplies, sans quoi elle ne sera ni un maximum ni un minimum. Supposons que la planète commence à se mouvoir à partir du point $a$ situé entre le périhélie et l'aphélie; soient $b$ l'autre limite, $2\mathrm{A}$ le grand axe et $f$ le Soleil: on obtient, comme on sait, l'autre foyer par l'intersection de deux circonférences décrites des points $a$ et $b$ comme centres avec les rayons $2\mathrm{A} - af$ et $2\mathrm{A} - bf$.

Les deux points d'intersection des circonférences donnent deux solutions du problème qui ne peuvent se confondre que quand les deux circonférences se touchent, c'est-à-dire lorsque $ab$ passe par l'autre foyer. Si l'on tire la corde $aa'$ par le point $a$ et le foyer $f'$ de l'ellipse, il faudra, d'après la règle indiquée, que la seconde limite $b$ soit située entre les points $a$ et $a'$ pour que l'intégrale du principe de la moindre action soit véritablement un minimum. Si le point $b$ tombe en $a'$, alors la variation seconde ne peut pas à la vérité devenir négative, mais elle devient nulle, en sorte que la variation de l'intégrale est du troisième ordre et peut devenir tantôt positive et tantôt négative. Si $b$ tombe au-delà de $a'$, la variation seconde peut aussi elle-même devenir négative. Si le point de départ $a$ est situé entre l'aphélie et le périhélie, le point opposé $a'$ est déterminé par la corde de l'ellipse qui passe par le point $a$ et le Soleil $f$. Car si $a$ et $a'$ sont les points limites, on obtient une infinité de solutions par la rotation de l'ellipse autour de $aa'$. Si dans ce dernier cas le second point tombe au-delà de $a'$, il y aura une courbe à double courbure entre les deux limites données, pour laquelle l'intégrale $\int v ds$ sera plus petite que pour l'ellipse.

Je dirai à cette occasion deux mots sur la variation des intégrales doubles, dont la théorie est susceptible d'une plus grande élégance même après les travaux de M. Gauss et de M. Poisson. Afin de donner un exemple de la manière qui me semble la plus directe pour exprimer la variation d'une intégrale double, je prendrai le cas le plus simple où l'on considère $\delta\int\int f(x,y,z,p,q)\,dxdy$, dans laquelle $p=\frac{dz}{dx}$, $q=\frac{dz}{dy}$.

Soit $w$ la variation de $z$, on aura

$$\delta\int\int f(x,y,z,p,q)\,dydx=\int\int dxdy\left(\frac{df}{dz}w+\frac{df}{dp}\frac{dw}{dx}+\frac{df}{dq}\frac{dw}{dy}\right).$$

La méthode employée pour les intégrales simples consiste à partager les expressions sous le signe d'intégration en deux parties, dont la première est multipliée par $w$ et dont l'autre est l'élément d'une intégrale. La première doit être égalée à zéro sous le signe d'intégration; la seconde peut être intégrée, et l'on fait disparaître son intégrale. Par analogie, je partage l'expression sous le double signe en une partie multipliée par $w$ et en une autre qui est l'élément d'une intégrale double, c'est-à-dire que je pose en faisant $u=aw$,

$$\frac{df}{dz}w+\frac{df}{dp}\frac{dw}{dx}+\frac{df}{dq}\frac{dw}{dy}=\mathrm{A}w+\frac{du}{dx}\frac{dv}{dy}-\frac{dv}{dx}\frac{du}{dy};$$

si l'on égale les termes en $w$, en $\frac{dw}{dx}$ et en $\frac{dw}{dy}$, on obtient

$$\frac{df}{dz}=\mathrm{A}+\frac{da}{dx}\frac{dv}{dy}-\frac{da}{dy}\frac{dv}{dx},\quad \frac{df}{dp}=a\frac{dv}{dy},\quad \frac{df}{dq}=-a\frac{dv}{dx},$$

d'où

$$\mathrm{A}=\frac{df}{dz}-d\,.\frac{\frac{df}{dp}}{dx}-d\,.\frac{\frac{df}{dq}}{dy}.$$

En égalant cette valeur de A à zéro, on trouve l'équation différentielle connue, qui est ainsi obtenue d'une manière parfaitement symétrique. La fonction $v$ doit satisfaire à l'équation $\frac{df}{dp}\frac{dv}{dx}+\frac{df}{dq}\frac{dv}{dy}=0$. Si l'on pose $\mathrm{A}=0$, on a

$$\delta\int\int f(x,y,z,p,q)dxdy=\int\int dxdy\left(\frac{du}{dx}\frac{dv}{dy}-\frac{dv}{dx}\frac{du}{dy}\right)=\int\int dvdu,$$

qui, prise aux limites données, doit disparaître. Si $z$ est donnée aux limites, $w$ et par suite $u=aw$ sera nul aux mêmes limites, et l'on aura $\int\int dudv = 0$. Si les valeurs de $z$ aux limites sont entièrement arbitraires, $v$ doit s'évanouir, et l'équation $v=0$ représentera la courbe limite; alors il faudra que les fonctions arbitraires provenant de l'intégrale de l'équation $A = 0$ soient déterminées de manière que $\frac{df}{dp}\frac{dv}{dx}+\frac{df}{dq}\frac{dv}{dy}=0$, etc.

Pour en revenir au maximum et au minimum, la confusion qui règne dans l'emploi de ces mots donne lieu à de graves inconvénients. Quelquefois, par exemple, on dit qu'une expression est un maximum ou un minimum, quand il serait vrai seulement de dire que sa variation est égale à zéro. Quelquefois aussi, on dit qu'une grandeur est un maximum au lieu de dire qu'elle n'est pas un minimum. C'est ainsi que M. Poisson dit dans sa Mécanique, que la distance entre deux points donnés sur une surface fermée peut devenir un maximum, tandis qu'il est évident qu'à l'aide d'inflexions infiniment petites, la longueur de toute ligne tracée entre ces deux points peut encore être augmentée. En réalité, la ligne que fournit le calcul des variations appliqué à ce problème est un minimum sur la surface, si la condition dérivée de la règle générale établie ci-dessus est remplie, savoir qu'entre les deux points extrêmes, il n'y en ait pas deux autres entre lesquelles on puisse mener une nouvelle ligne infiniment rapprochée de la première et plus courte. Mais dans tout autre cas on n'a ni maximum ni minimum. Au reste, quand il s'agit de surfaces ayant en chaque point des courbures opposées, j'ai démontré que le minimum existe toujours réellement.

Les recherches indiquées plus haut sur les caractères des *maxima* et *minima* dans les problèmes isopérimètres remplissent une véritable lacune dans une des plus belles parties des Mathématiques; elles sont d'ailleurs remarquables par les artifices d'intégration que l'on y a employés. Mais les recherches suivantes engrènent plus profondément dans toute l'étendue de la science : je vais en donner une courte indication.

M. Hamilton a montré que les problèmes de mécanique auxquels s'applique le principe des forces vives peuvent se ramener à l'intégration d'une équation aux différentielles partielles du premier ordre

Sa méthode exige bien l'intégration de deux équations de ce genre; mais on peut montrer facilement qu'il suffit de connaître une intégrale complète de l'une d'elles. On étend aussi avec facilité ses résultats au cas où les fonctions de forces, c'est-à-dire les fonctions dont les différentielles partielles donnent les forces, renferment le temps explicitement, auquel cas le principe des forces vives ne s'applique pas, mais le principe de la moindre action a encore lieu. Il semble qu'on devrait gagner peu de chose à cette transformation d'équations différentielles, puisque, d'après la méthode de Pfaff, consignée dans les Mémoires de votre Académie (et pour plus de trois variables on ne connaissait jusqu'ici rien de plus sur les équations différentielles partielles du premier ordre), l'intégration de l'équation aux différentielles partielles à laquelle se trouve ramené le problème de dynamique, est beaucoup plus difficile que celle du système des équations différentielles du mouvement données immédiatement. Dans le fait, si l'on étend les recherches de M. Hamilton à toutes les équations aux différentielles partielles du premier ordre, ce qui se fait sans difficulté, il en résulte au contraire cette découverte importante dans la théorie des équations aux différentielles partielles du premier ordre qu'elles peuvent toujours être ramenées à l'intégration d'un seul système d'équations différentielles ordinaires, qui n'était pas suffisante d'après la méthode de Pfaff; mais cette remarque ne peut être utile pour l'intégration des équations différentielles de la mécanique qu'autant que l'on fait voir que les systèmes d'équations différentielles ordinaires auxquels se ramènent les équations aux différentielles partielles du premier ordre sont susceptibles d'être traitées d'une manière particulière qui les distingue des autres équations différentielles. M. Hamilton, quoiqu'il ait cherché à faire plusieurs applications de sa *nouvelle méthode*, comme il l'appelle, n'a rien dit à ce sujet; aussi n'a-t-il tiré aucune utilité réelle de ses théorèmes remarquables. Cependant Lagrange, relativement aux équations aux différentielles partielles du premier ordre et à trois variables auxquelles il s'est borné, et dont l'intégration constitue une de ses plus belles et de ses plus célèbres découvertes, avait déjà remarqué que, si l'on connaît une intégrale du système des trois équations aux différentielles ordinaires du premier ordre entre quatre variables, auquel il ramène le problème on n'a plus à intégrer que deux équations différentielles du premier ordre, chacune entre deux variables. Mais dans le cas général, il y aurait à intégrer une équation différentielle du second ordre entre deux variables, que l'on peut donc toujours ramener à celle du premier ordre, pour ce système particulier d'équations différentielles ordinaires. Si l'équation aux différentielles partielles du premier ordre entre trois variables ne renferme pas la fonction inconnue elle-même, mais seulement ses deux coefficients différentiels, alors il n'y a plus à intégrer que deux équations différentielles du premier ordre entre trois variables; et, si l'on connaît une intégrale de ces équations, la question est ramenée à deux quadratures par la méthode de Lagrange, tandis qu'en général il resterait à intégrer une équation différentielle du premier ordre. Ce dernier cas se présente dans la mécanique, c'est-à-dire que les équations aux différentielles partielles du premier ordre, auxquelles se ramènent les problèmes de dynamique, ne renferment jamais la fonction inconnue elle-même. D'après cela, on peut tirer du procédé de Lagrange pour trois variables des conséquences très importantes pour la mécanique. Ainsi il en résulte que généralement si un problème quelconque de mécanique, pour lequel le principe des forces vives a lieu, dépend d'une équation différentielle du second ordre, et si l'on en connaît une intégrale, outre celle donnée par ce principe, ce qui ramène le problème à l'intégration d'une équation aux différentielles ordinaires du premier ordre à deux variables, on peut toujours intégrer cette équation ou du moins on peut trouver par une règle précise et générale le facteur qui la rend intégrable. Le mouvement d'un corps attiré vers deux centres fixes, dans un plan, fournit un exemple d'un problème de ce genre. Euler a trouvé facilement une intégrale, outre celle du principe des forces vives; il arrive par là à une équation différentielle du premier ordre, mais qui est véritablement si compliquée, qu'il fallait toute l'intrépidité de ce grand géomètre pour en entreprendre l'intégration, et le succès de ses efforts est un de ses plus beaux chefs-d'œuvre; mais cette intégration pourrait être effectuée sans employer tant d'artifices à l'aide de la règle générale ci-dessus mentionnée. Il y a environ six mois, j'ai communiqué à l'Académie de Paris des formules relatives au mouvement d'un point libre dans un plan, qui ramènent le problème aux quadratures dès qu'on connaît une intégrale outre celle du principe de forces vives. Ces formules peuvent s'étendre au mouvement d'un point sur une surface.

Pour que ces considérations puissent s'appliquer à des problèmes de mécanique plus compliqués, il est nécessaire d'étendre à un nombre quelconque de variables la méthode de Lagrange pour l'intégration des équations aux différentielles partielles du premier ordre à trois variables. Pfaff, qui regarda la difficulté comme insurmontable, s'est vu forcé par ce motif d'abandonner entièrement cette méthode. Il considéra la question comme un cas particulier d'un problème beaucoup plus général, dont la solution heureuse est une des acquisitions les plus importantes du calcul intégral. Mais le problème de l'intégration des équations aux différentielles partielles du premier ordre présente des facilités qui, ne se trouvant pas dans le problème général considéré par Pfaff, lui ont échappé, et il ne pouvait pas les rencontrer sur la route qu'il a suivie. J'ai réussi à lever les difficultés qui s'opposaient à la généralisation de la méthode de Lagrange et à fonder par là une nouvelle théorie des équations aux différentielles partielles du premier ordre pour un nombre quelconque de variables ; cette théorie offre des avantages réels pour leur intégration, et trouve immédiatement son application dans les problèmes de mécanique. Je me contenterai de donner ici les indications suivantes :

Les équations aux différentielles partielles et les problèmes d'isopérimètres dans lesquels les différentielles partielles des fonctions inconnues ne s'élèvent qu'au premier ordre, dépendent de la même analyse, en sorte que tout problème d'isopérimètres peut être conçu comme l'intégration d'une équation aux différentielles partielles du premier ordre. On peut comprendre parmi ces problèmes d'isopérimètres ceux pour lesquels l'expression, qui doit devenir un maximum ou un minimum, ou plus généralement, dont la variation doit s'évanouir, n'est point donnée immédiatement par une intégrale, mais par une équation différentielle du premier ordre. Réciproquement on peut concevoir l'intégration d'une équation aux différentielles partielles du premier ordre, comme la solution d'un problème d'isopérimètres. En vertu du principe de la moindre action, on peut considérer comme un problème d'isopérimètres de ce genre le mouvement d'un système de corps qui s'attirent mutuellement, et qui peuvent d'ailleurs être sollicités par des forces parallèles ou dirigées vers des centres fixes ou même vers des centres mobiles, pourvu que les corps du système ne réagissent pas sur ces derniers centres dont le mouvement doit être déterminé d'avance. Un tel problème de mécanique peut donc aussi être conçu comme l'intégration d'une équation aux différentielles partielles du premier ordre. Cette intégration dépend d'un système d'équations différentielles ordinaires qui s'accordent avec les équations connues de la mécanique, mais qui, par leur relation avec une équation aux différentielles partielles du premier ordre, présentent des facilités particulières. Ainsi, au moyen d'un procédé particulier et par un certain choix de grandeurs qu'on prend pour variables, on peut faire en sorte que chaque intégrale obtenue tienne lieu de deux intégrations. Pour m'exprimer plus clairement je dirai qu'un système d'équations différentielles est du $n^{\text{ième}}$ ordre, quand on peut, par l'élimination des autres variables, l'amener à une équation différentielle ordinaire du $n^{\text{ième}}$ ordre entre deux variables. Mais pour les équations aux différentielles partielles du premier ordre qui ne contiennent pas la fonction inconnue elle-même, mais seulement ses coefficients différentiels, comme aussi pour les problèmes d'isopérimètres, et par suite pour les problèmes de mécanique désignés ci-dessus, dans lesquels l'expression dont la variation doit s'évanouir est donnée par une intégrale, voici la marche à suivre dans les opérations et les avantages qu'on en retire. L'équation aux différentielles ordinaires, dont dépend le problème, étant supposée de l'ordre $2n$, si l'on en connaît une intégrale, on pourra, par un certain choix des quantités prises pour variables, ramener le problème à un système d'équations différentielles de l'ordre $2n-2$. Si l'on connaît encore une intégrale de ce système, on pourra le réduire de la même manière à un système de l'ordre $2n-4$, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on n'ait plus d'équations différentielles à intégrer. D'ailleurs toutes les opérations à effectuer reposent uniquement sur les quadratures. J'ajouterai, pour plus de clarté, que j'appelle intégrale d'un système d'équations différentielles ordinaires, une équation $\mathrm{U}=a$ dans laquelle $a$ est une constante arbitraire qui ne se trouve pas dans U, et U une expression telle que sa différentielle $d\mathrm{U}$ est identiquement nulle.

Comme exemple de la méthode générale, je prends un problème de mécanique, dont j'ai déjà eu l'honneur d'entretenir l'Académie, dans mon dernier mémoire. Il y a certains cas dans le mouvement des corps célestes, comme par exemple celui de la Lune ou d'une comète qui s'approche beaucoup de Jupiter, pour lesquels le mouvement elliptique est si peu approché que l'on ne peut fonder aucun procédé d'approximation qui ait une valeur scientifique sur l'intégration des équations différentielles de ce mouvement. Il est alors de la plus grande importance de trouver un autre mouvement qu'on puisse traiter facilement et qui se rapproche davantage du cas de la nature. On pourrait ici chercher à choisir le mouvement d'un point matériel attiré par deux corps qui se meuvent simultanément et avec la même vitesse angulaire autour de leur centre de gravité commun. Relativement à la Lune on peut supposer, dans le problème d'approximation, que les trois corps se meuvent dans un même plan; on a alors deux équations différentielles du second ordre, dans lesquelles les forces renferment le temps explicitement, en sorte que ni le principe des aires, ni le principe des forces vives ne peuvent s'appliquer; et le système équivaut à une équation différentielle du quatrième ordre à deux variables. Quoique le principe des aires et des forces vives n'ait pas lieu, j'ai fait voir cependant qu'on pouvait appliquer une certaine combinaison de ces deux principes. Cette intégrale que j'ai trouvée ne ramène pas seulement le problème au troisième ordre, mais l'application de la méthode générale à ce cas montre que, par un choix convenable de variables, le problème peut être ramené à une équation différentielle du second ordre à deux variables dont il faudrait seulement connaître une seule intégrale, en appliquant le même procédé. Ainsi au moyen de cette méthode et à l'aide de l'intégrale trouvée par moi, on peut ramener l'intégration de l'équation différentielle du quatrième ordre à la recherche d'une intégrale particulière d'une équation différentielle du second ordre, et tout le reste ne suppose que des quadratures.

Toute la marche de l'opération dépend chaque fois de l'intégrale qu'on a trouvée; le choix des variables dépend aussi de la même intégrale, et exige en outre l'intégration d'équations différentielles; mais toujours de telle manière qu'au moyen de l'intégrale trouvée, le système des équations est ramené à un autre dont l'ordre est de deux unités moindre, et même il arrive dans beaucoup de cas, que ces équations différentielles nécessaires pour la détermination du choix des variables sont faciles à intégrer. Si on ne laisse pas échapper les intégrales simples qui se présentent, on peut en suivant la marche indiquée être sûr de réduire le problème à des quadratures, ou du moins de la simplifier autant que sa nature le permet. Lors même que les équations différentielles auxquelles on arrive ne peuvent pas s'intégrer, on leur reconnaîtra des propriétés remarquables qui seront très utiles. Ainsi dans le problème cité, quoiqu'on ne sache pas intégrer l'équation différentielle du second ordre à laquelle on le ramène, toutefois on sait que ses deux intégrales se déduisent l'une de l'autre par des quadratures.

Vous voyez, Monsieur et très honoré professeur, que les résultats énoncés dans cette esquisse, enrichissent la *Mécanique analytique* d'un chapitre nouveau et important; ils montrent les avantages que la *forme* des équations différentielles de la mécanique, offre pour leur intégration. Cette forme est due à Lagrange; mais Lagrange et les géomètres ses successeurs ne s'en sont servis que pour obtenir plus promptement, et avec plus d'ensemble, les transformations analytiques, et donner aux lois de la mécanique toute l'extension dont elles sont susceptibles. Aujourd'hui, cette *forme* acquiert une importance bien plus grande; car, ce sont précisément là les équations différentielles susceptibles d'être traitées d'une manière particulière, qui diminue notablement les difficultés de l'intégration.

29 novembre 1836.