

JOURNAL  
DE  
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

---

DE CALIGNY, ANATOLE

**Note sur le calcul des effets de la Machine précédente et les  
dispositions essentielles de ses tuyaux d'ascension. - Coup d'œil  
historique sur quelques Machines à élever l'eau**

*Journal de mathématiques pures et appliquées 1<sup>re</sup> série*, tome 3 (1838), p. 460-476.

[http://www.numdam.org/item?id=JMPA\\_1838\\_1\\_3\\_460\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1838_1_3_460_0)

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Gallica de la Bibliothèque nationale de France  
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc  
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc  
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

---

## NOTE

*Sur le calcul des effets de la Machine précédente et les dispositions essentielles de ses tuyaux d'ascension. — Coup d'œil historique sur quelques machines à élever l'eau;*

PAR ANATOLE DE CALIGNY.

---

1. La présente Note ayant simplement pour but l'exposition d'une méthode de calcul, je n'ai rien à ajouter à la description que M. Coriolis a donnée de ma machine. Peu importe pour le moment la forme des emmanchements et de la soupape, ou la manière dont celle-ci fonctionne. Les tuyaux horizontaux sont supposés très longs, et les résistances locales à un coude ou à un rétrécissement sont supposées peu de chose relativement au frottement dans tout le système. Je ferai d'abord abstraction du travail nécessaire pour faire fonctionner la soupape ou le régulateur quelconque.

Pour bien comprendre ce qui va suivre, il est cependant essentiel de savoir comment, en termes de praticien, on *amorce* la machine au moyen d'oscillations, dont les hauteurs successives au-dessus du niveau de la source augmenteraient comme les termes d'une progression arithmétique s'il n'y avait pas de résistance passive. Le système peut être présenté de la manière suivante :

2. Étant donné un réservoir à niveau constant, ou *réservoir de la source*, un tuyau de conduite dérivé par le fond se relève verticalement à une grande distance, je vais d'abord faire le calcul, comme si son diamètre était constant dans toute son étendue. Supposez d'abord l'eau en équilibre avec la source dans le tuyau vertical; j'interromps d'une manière quelconque la communication entre la source et le

tuyau vertical que je fais communiquer par le bas au moyen d'un autre tuyau avec un réservoir dont le niveau, moins élevé que la source, n'est point aussi bas que le sol, quand on a une fontaine à alimenter en ce point à une certaine hauteur. Je nomme cependant *hauteur de chute* la différence de hauteur des deux niveaux. L'eau du tuyau vertical que je nomme *tuyau d'ascension*, se trouvant ainsi en communication avec le tuyau et le réservoir que je nomme *tuyau et réservoir de décharge*, abstraction faite des pertes de force vive, les extrémités étant d'ailleurs évasées, l'eau descend au-dessous du niveau du réservoir de décharge à une profondeur égale à la *hauteur de chute* en vertu des lois de l'oscillation. Quand on remet les communications dans leur premier état, l'eau monte au-dessus du niveau de la source, au double de la *hauteur de chute*. En continuant une manœuvre semblable, on la fait descendre au-dessous du niveau du réservoir de décharge à une profondeur égale au triple de la *hauteur de chute*, monter ensuite au-dessus du niveau de la source, à une hauteur égale au quadruple de la *hauteur de chute* et ainsi de suite; on gagne à chaque période le double de la *hauteur de chute*, au-dessus du niveau de la source. Si donc la profondeur du tuyau vertical et de ses emmanchements avec les deux autres tuyaux était indéfinie, l'eau parviendrait à une hauteur indéfinie au-dessus de la source au moyen d'une chute quelconque, et la machine serait en train. Le jeu continuerait ensuite de la même manière indéfiniment. A chaque oscillation ascendante, au lieu de monter plus haut, l'eau verserait alors au sommet du tuyau d'ascension et fournirait l'effet utile. Nous allons maintenant tenir compte du frottement.

Dans un précédent article, *Cahier de mai 1838*, j'ai établi, au moyen de considérations géométriques vérifiées par l'expérience, une formule très simple pour déterminer dans un tuyau indéfiniment prolongé la hauteur obtenue par l'oscillation au-dessus du niveau d'un réservoir, ou la quantité vidée au-dessous par une oscillation descendante, en tenant compte des résistances passives. Cette formule a été retrouvée par M. Coriolis au moyen de l'analyse.

Je suppose le tuyau d'ascension plein et la colonne sur le point de redescendre; je détermine, au moyen de cette formule, la quantité de tuyau vidée par l'oscillation descendante. Cette quantité exprimera

le volume d'eau versée au réservoir de décharge ou au bas de la chute.

Connaissant ainsi le point de départ inférieur de l'oscillation ascendante, je détermine par la même formule quelle serait la hauteur obtenue dans le tuyau vertical indéfiniment prolongé. Je coupe le tuyau au-dessus de la source à la hauteur d'où j'ai déjà supposé que devait partir l'oscillation descendante, et comme l'eau doit monter moins haut dans cette hypothèse, il passe par cette section plus d'eau que dans le cas où le tuyau était indéfiniment prolongé.

Pour déterminer la quantité versée, connaissant la quantité qui passerait, au-dessus du point où je coupe le tuyau, dans le cas où celui-ci serait indéfiniment prolongé, je la multiplie par le rapport de la hauteur de son centre de gravité au-dessus du niveau de la source, à la hauteur où je coupe le tuyau au-dessus de ce même niveau. La quantité ainsi obtenue est trop forte.

3. Il y a toujours quelque perte de force vive à la sortie du tuyau, on peut la diminuer au moyen d'un évasement et d'ailleurs elle est peu de chose quand la masse immobile au moment du départ est assez longue (*voy.* mon article précédent). Mais on ne peut négliger la quantité dont le travail résistant est augmenté par la raison même qu'il passe par la section où le tuyau est coupé une plus grande quantité d'eau à chaque oscillation, ce qui augmente le chemin parcouru par le frottement.

Si l'on coupait le tuyau très près du niveau, la différence dont il s'agit serait très considérable. Si le versement se faisait trop haut, cette différence serait très peu de chose, mais il faudrait tenir compte de ce que le déchet se reportant en entier au sommet de l'oscillation, se reporte précisément sur l'effet utile qui serait zéro à la limite de hauteur, quand même celle-ci serait peu diminuée par le frottement; Il sera donc convenable de couper le tuyau aux environs de la moitié de cette limite de hauteur.

J'ai fait diverses expériences pour déterminer dans ce cas la différence dont il s'agit, en y réunissant celle qui provient de la perte de force vive à la sortie du tuyau d'ascension. Pour évaluer avec plus de sûreté la perte totale, je n'avais pas évasé le sommet du tuyau. La quantité reçue était environ les  $\frac{9}{10}$  de celle qui avait été calculée,

comme au numéro précédent, sans tenir compte des deux surcroîts de perte dont il s'agit. Dans les circonstances où j'ai opéré, la hauteur moyenne du jet dans l'air était d'environ  $\frac{1}{12}$  de la hauteur du versement au-dessus de la source. Ainsi, quand on évase le sommet du tuyau, le surcroît de perte que nous cherchons à évaluer et que je pourrais d'ailleurs donner par la Géométrie est peu de chose.

4. Nous savons, par ce qui précède, évaluer la quantité descendue au bas de la chute; nous savons donc déterminer le rapport de la quantité élevée à la quantité descendue. Dans ses exemples numériques, M. Coriolis a retrouvé, par sa méthode, les résultats numériques que j'avais obtenus de cette manière et sur lesquels il est par conséquent inutile d'insister.

5. Pour calculer le travail résistant en frottement que l'on éprouverait en conduisant dans le même temps la même quantité d'eau par un mouvement uniforme depuis la source jusqu'au bas du tuyau d'ascension, je fais abstraction du frottement dans ce dernier très court par rapport aux autres. Je calcule la durée de l'oscillation ascendante, par un moyen qu'on verra plus loin; je divise par cette durée la longueur de la colonne passée par le pied du tuyau d'ascension à chaque oscillation, ou par l'orifice du réservoir de la source. J'ai ainsi la vitesse moyenne nécessaire pour amener la même quantité d'eau par un mouvement uniforme dans le même tuyau développé.

Par une opération d'arithmétique, je détermine, au moyen des expériences connues sur le frottement dans les grandes vitesses uniformes, quel devrait être dans le mouvement uniforme le rapport entre la longueur et le diamètre de mon tuyau, pour que, abstraction faite du terme de la résistance proportionnelle aux simples vitesses et des contractions ou déviations, le rapport entre une charge d'eau quelconque et la hauteur due à une vitesse moyenne uniforme effective fût une quantité donnée. Cette hauteur due, étant une fraction donnée de la hauteur de cette charge, il est très commode d'exprimer que la portion de charge absorbée est un certain nombre de fois cette hauteur due. En comparant la longueur de tuyau ainsi trouvée à la longueur du tuyau que l'on considère, on voit à l'instant la valeur de la portion de charge

absorbée dans le mouvement uniforme pour une vitesse moyenne effective donnée. La perte est ainsi égale au produit de l'eau passée en un temps donné, par une certaine hauteur. *Voyez* mon précédent article.

Une opération du même genre donnera la perte qui serait éprouvée dans le tuyau de décharge, si l'on y conduisait aussi par un mouvement uniforme l'eau qu'il doit verser dans une fontaine ou réservoir de décharge.

Il y a toujours deux tuyaux d'ascension, dans le cas où la durée de chaque oscillation est réglée au moyen de la longueur des tuyaux de conduite et de décharge, de façon que l'eau ne se repose jamais dans les parties horizontales, une oscillation ascendante commençant quand l'autre finit. On prendra la somme des deux hauteurs absorbées dans le tuyau de conduite et le tuyau de décharge, et l'on opérera ainsi : Je suppose que la *hauteur de chute* soit de 2 mètres, et que dans un cas particulier l'effet utile ne fût que 0,50, si l'on n'avait pas à s'occuper du transport de l'eau. La perte serait dans ce cas le produit de la quantité d'eau descendue, par un mètre ; mais la perte que l'on ne pourrait se dispenser d'éprouver dans un mouvement permanent est égale au produit de la même masse d'eau par une hauteur que nous savons apprécier. La seule perte qui doit être imputée à la machine est la différence de ces deux pertes.

M. Coriolis ayant tenu compte du terme de la résistance proportionnel à la simple vitesse dans le mouvement permanent, a trouvé la perte réelle ou la différence des deux pertes dont il s'agit un peu moindre que je ne l'ai trouvée moi-même en négligeant ce terme par prudence.

6. La manière dont je calcule la durée de mes oscillations repose tout simplement sur les lois du pendule. Dans le cas où je n'ai pas à considérer de versement supérieur et où la colonne immobile au moment du départ est très longue par rapport à l'amplitude de l'oscillation, je trouve la durée de l'oscillation égale à celle d'un pendule de même longueur que la colonne. Cela résulte évidemment de ce que ma colonne oscillante n'est autre chose qu'une colonne oscillante dans un siphon dont une des branches droites est très large par rapport à l'autre. Les choses se passent alors comme si l'intensité de la pesanteur

était moitié moindre, puisque l'eau tombe de moitié moins haut que dans un siphon ordinaire où les oscillations ont, comme on sait, la durée de celles d'un pendule d'une longueur moitié de celle de la colonne liquide.

Dubuat a trouvé dans ses expériences sur les siphons, que la durée des oscillations n'était pas influencée par la résistance des parois. J'ai tiré la même conclusion des expériences que j'ai faites pour des oscillations de 2 à 3 mètres d'amplitude maximum sur une colonne de plus de 50 mètres de long, dont je ne peux donner ici le détail. Dans le calcul de la durée des oscillations, on peut donc se contenter des résultats de la théorie, comme s'il n'y avait pas de frottement. On le peut évidemment pour l'oscillation descendante, mais il n'en est pas tout-à-fait ainsi pour l'oscillation ascendante, lorsqu'il y a versement. Étudions d'abord le cas du versement où il n'y a pas de frottement.

7. Comme je l'ai dit dans mon premier article, *Cahier de mai 1838*, la colonne horizontale étant très longue, la vitesse varierait, abstraction faite du frottement, comme les ordonnées d'un cercle, s'il n'y a pas de versement.

Quand il y a versement, il passe plus d'eau dans le tuyau; or on va voir, qu'abstraction faite de toute perte de force vive, à partir du moment où l'eau commence à verser, la vitesse diminue comme les ordonnées d'une parabole.

Les choses se passent *en sens contraire* comme si la force vive s'emmagasinait dans un tuyau de conduite de même développement, sous une hauteur de pression constante égale à la hauteur du versement au-dessus du niveau de la source, depuis zéro de vitesse jusqu'à une vitesse égale à celle dont il s'agit, au commencement du versement supérieur. Or, la force vive augmenterait comme les quantités d'eau sorties, par hypothèse sans vitesse sensible à cause d'un évasement. Les carrés des vitesses augmenteraient donc dans le corps d'un bélier comme les éléments d'un triangle et par conséquent, les vitesses comme les ordonnées d'une parabole. C'est le contraire qui arrive pendant le versement supérieur.

Cela posé, au moyen des propriétés élémentaires du cercle et de la parabole, on détermine la durée totale de l'oscillation ascendante. Il

n'y a qu'à faire une opération arithmétique au moyen de la mesure des surfaces des figures dont il s'agit.

Si le travail résistant en frottement était assez grand pour empêcher tout-à-fait le versement, on conçoit qu'il ne serait pas rigoureux de ne pas tenir compte du frottement dans le calcul de la durée. Mais en général on pourra s'en dispenser comme l'a fait M. Coriolis dans les applications, puisque l'on ne considère pas cette hypothèse. Comme il a obtenu les mêmes résultats numériques que moi, je crois inutile d'en donner le détail. Je remarquerai, seulement pour les praticiens, l'avantage de ma méthode de n'opérer que sur des nombres de très peu de chiffres.

8. Il y a un moyen général plus simple que ce qui précède, pour voir *à priori* quel doit être, dans les divers cas, l'effet de la machine en se débarrassant de la mesure du temps. Je prends la durée *quelconque* d'une révolution de la machine, pendant laquelle je suppose qu'un mouvement permanent conduise la même quantité d'eau que le mouvement oscillatoire.

Si l'on considère seulement la résistance proportionnelle au carré de la vitesse ou le coefficient  $\beta$ , dans le cas du mouvement oscillatoire, en supposant ce coefficient le même que dans le mouvement permanent, le travail résistant en frottement pour chaque tuyau dans chaque période est proportionnel au produit de la quantité d'eau qui y est passée dans une même période, par la moyenne des carrés des vitesses, pour chaque tuyau. Étant donné le déchet, abstraction faite du transport de l'eau, pour avoir le seul déchet qui doit être attribué à la machine, il faut le multiplier par le rapport entre la différence de la moyenne des carrés des vitesses dans le mouvement oscillatoire et du carré de la vitesse moyenne permanente dont il s'agit, à cette même moyenne des carrés des vitesses.

On sait, par la Géométrie, que la différence entre la moyenne des carrés des ordonnées d'une courbe et le carré de l'ordonnée moyenne est souvent peu de chose. Elle est au moins peu de chose pour le cercle.

D'après mon précédent article, *cahier de mai*, il faudrait que le travail en frottement fût assez considérable relativement au travail de la pesanteur, pour que la différence dont il s'agit fût aussi grande que

si la courbe des vitesses, ou la courbe ayant pour abscisses les hauteurs parcourues dans le tuyau d'ascension et pour ordonnées les vitesses de la colonne horizontale, était formée de deux portions de parabole et à plus forte raison de deux triangles. Or, même dans ce dernier cas, il est facile de voir par les propriétés de la pyramide qu'un quart seulement du déchet devrait être imputé à la machine.

9. Les calculs précédents supposent le coefficient  $\beta$  aussi grand dans le mouvement oscillatoire que dans le mouvement permanent, ce qui n'est pas, comme je l'ai dit dans mon précédent article, et dans un Mémoire, *Annales des Mines*, tome XIII. L'effet utile paraît donc réellement plus grand; mais comme je ne peux pas tenir compte d'une manière rigoureuse de la perte de travail nécessaire au jeu de la soupape, le mode de calcul précédent est assez exact. C'est à cause de cette différence quelconque, entre les coefficients  $\beta$  qu'il est rationnel de ne pas s'embarasser du terme de la résistance proportionnelle aux simples vitesses, quand les vitesses ne sont pas excessivement petites. Si elles l'étaient, on serait conduit, dans le cas où l'on supposerait le coefficient  $\alpha$  seul et le même que dans le mouvement uniforme, à un effet utile rigoureusement égal à l'unité, sauf le jeu de la soupape. En effet, on n'aurait plus à s'occuper de la différence entre le carré de la vitesse moyenne dans le mouvement uniforme et la moyenne des carrés des vitesses dans le mouvement oscillatoire.

Quant à la manière dont j'ai déduit le véritable coefficient  $\beta$ , dans le mouvement oscillatoire, en m'appuyant aussi sur quelques expériences de Dubuat, je crois devoir dire, en passant, que les formules du mouvement de l'eau dans le siphon sont tout-à-fait de la même forme que les formules du mouvement de nos colonnes oscillantes précédentes, sauf le versement supérieur; cela résulte de l'identité énoncée n° 6, dans le cas où l'on ne tient compte que du coefficient  $\beta$ . Si la force vive est double dans le siphon, la résistance est double et le rapport de la puissance à la résistance est le même que dans mes oscillations.

10. On pourrait se demander si en employant la forme du bélier, il ne serait pas possible de faire une machine à colonne oscillante sans autre choc que celui de la soupape d'arrêt sur son siège et dont

l'effet utile serait analogue à celui de la machine dont il s'agit, sauf les considérations relatives au transport de l'eau, puisqu'il y aurait alors un retour vers la source.

J'ai imaginé un appareil de ce genre à *une seule soupape*, en substituant au réservoir d'air et au matelas d'air du bélier un tuyau d'ascension d'une disposition particulière. Cet appareil repose sur des considérations trop délicates pour que je les expose ici. Je n'en parle en ce moment que pour insister sur une propriété tout-à-fait distinctive de la machine, objet de cet article, propriété qui la sépare de plus en plus du bélier, de la machine de Manoury (\*) et de toutes celles où la force vive s'emmagasine dans une colonne liquide sous une charge constante ou même moindre que la chute naturelle.

11. Abstraction faite du frottement et des pertes de force vive, pour emmagasiner une quantité donnée de force vive, une puissance est obligée de parcourir un chemin d'autant plus long que cette puissance est moindre. Dans mon appareil où l'eau descend bien plus bas que le sol, la moyenne des pressions motrices est en général bien plus grande que la chute. Pour emmagasiner la même quantité de force vive que le bélier, etc., on a donc un espace bien moins long à parcourir. *Or cet espace est un des facteurs du travail en frottement.*

12. Je suppose maintenant que pour emmagasiner la même quantité de force vive, abstraction faite du frottement, on fasse partir de la moitié plus bas un tuyau d'ascension d'un diamètre moitié moindre. La quantité d'eau entrée dans une même fraction de la longueur plus considérable du tuyau d'ascension sera toujours moitié moindre pour une oscillation. Je veux dire que si  $\frac{1}{m}$  de la hauteur est rempli, quand ce  $\frac{1}{m}$  aura une longueur moitié plus grande et un diamètre moitié moindre, il contiendra la moitié moins d'eau; mais aussi elle sera tombée d'une hauteur moitié plus grande et il y aura compensation. Or, par la raison même que la quantité pénétrée ainsi sera moitié moindre, le chemin parcouru dans la conduite horizontale sera moitié moindre, cela diminuera le travail en frottement; mais la moyenne des vitesses serait la même sans ce frottement.

---

(\*) *Essai sur la composition des Machines*, par Lantz et Bétancourt, p. 11 et 12.

On peut ainsi emmagasiner une même quantité donnée de force vive, en éprouvant diverses quantités de travail résistant à cause des différences dans les chemins parcourus.

Mais on pourrait se tromper dans les applications de cette idée à la machine. Ainsi sous une chute motrice donnée, je préviens qu'on ne peut pas à volonté, pour emmagasiner une même quantité de force vive, faire partir l'eau d'une plus grande profondeur; mais on peut diminuer le diamètre du tuyau d'ascension dont la longueur est à peu près déterminée d'avance. Dans ce cas, on diminue, comme on va voir, la durée de l'oscillation et cependant on diminue la quantité d'eau qui passe, en un temps donné, par le système. Abstraction faite du frottement, la quantité de force vive emmagasinée est proportionnelle à la section du tuyau d'ascension quand l'eau arrive à une hauteur donnée (\*). On voit que la moyenne des vitesses, dans une même conduite horizontale, est à peu près proportionnelle à la racine carrée de cette section ou à son diamètre. Le chemin parcouru dans la conduite est en raison de cette section; la durée d'une oscillation est donc en raison de son diamètre.

Abstraction faite du transport de l'eau, on augmente l'effet utile de la machine en diminuant ainsi dans toute son étendue le diamètre du tuyau d'ascension. Le rapport du travail résistant en frottement au travail moteur est en raison de la section du tuyau d'ascension pour un même tuyau de conduite, abstraction faite du frottement dans le tuyau d'ascension. *Voyez mon précédent article, cahier de mai, n° 33.*

13. Or, il s'agit de voir, au moyen du n° 8, comment les choses se passent relativement au transport de l'eau. Nous savons déjà que l'effet utile est augmenté en vertu du rétrécissement, abstraction faite du transport. La courbe ayant pour ordonnées les vitesses dans la conduite, et pour abscisses les hauteurs obtenues dans le tuyau d'ascension, est donc moins déformée, et nous sommes plus près des limites pour lesquelles la différence entre le carré de l'ordonnée moyenne d'une courbe et la moyenne des carrés des ordonnées est peu de chose. Or, en la supposant aussi grande, le déchet déjà trouvé

---

(\*) Il est essentiel de connaître mon premier article, pour bien saisir tous les détails de celui-ci.

étant moindre que dans l'autre cas, sa fraction, qui est le déchet définitif, sera également moindre.

Quoique l'on ait un effet utile plus grand, il faut avoir égard au volume débité par seconde relativement au diamètre des tuyaux. Si ce volume était trop petit, on ne se donnerait pas la peine de faire de gros tuyaux pour alimenter une petite fontaine. Il y a même des cas où la machine ne donnerait pas un débit assez grand, lors même que le tuyau d'ascension serait aussi large que la conduite. Or, il y a un moyen très simple d'y remédier en diminuant, il est vrai, l'effet utile. Il suffit d'*élargir le tuyau d'ascension, au lieu de le rétrécir*. L'augmentation du chemin parcouru par la pression motrice augmentera la force vive moyenne. Abstraction faite des pertes de force vive la moyenne des vitesses sera toujours comme le diamètre du tuyau d'ascension pour une même conduite, par la même raison qu'au n° 12 (\*).

Étant donné, un tuyau de conduite d'un diamètre déterminé, on peut ainsi régler la quantité d'eau débitée par la machine selon les besoins de la localité. Je dois ajouter, d'après ce qui a été dit dans le premier article, que, sauf le frottement dans le tuyau d'ascension, la même formule servira à calculer le travail en frottement, au moyen du rapport entre le chemin parcouru dans la conduite horizontale au diamètre de cette conduite pour chaque oscillation.

Faisons abstraction encore, pour un moment, du frottement dans le tuyau d'ascension, afin de trouver la forme la plus avantageuse de ce tuyau.

14. Considérons l'oscillation ascendante, sans nous occuper d'abord de l'autre. Si le tuyau est indéfiniment prolongé, abstraction faite du frottement, on ne diminuera pas la hauteur de l'oscillation, en donnant au tuyau d'ascension la forme d'un sablier, engendré par la révolution d'une courbe dont les ordonnées varieraient symétriquement au-dessus et au-dessous du niveau de la source. On peut, sans diminuer la quantité versée par le sommet, rétrécir de cette ma-

---

(\*) Ce tuyau supposé vertical devra quelquefois être incliné ou former une certaine courbe; je reviendrai dans un autre article, sur les détails utiles pour éviter les pertes de force vive dans les applications.

nière le milieu du tuyau d'ascension, au moins dans certaines limites, puisqu'on ne changera pas la hauteur du centre de gravité de l'eau.

Par des dispositions de ce genre, je resserre par son milieu, la *courbe des vitesses* dans la conduite. Si donc on rétablit l'hypothèse du frottement dans cette conduite horizontale, pour obtenir le même versement supérieur on aura moins de travail résistant à y surmonter. Le chemin parcouru et la moyenne des carrés des vitesses dans la conduite doivent être des minima pour chaque quantité d'eau versée au sommet du tuyau d'ascension. La forme de sablier, dont je viens de parler, remplit assez bien cette condition, puisque les vitesses sont d'autant plus grandes dans la conduite que la colonne approche plus des environs du milieu de sa course; or, c'est précisément alors que cette forme du tuyau d'ascension modifie le plus puissamment le chemin parcouru dans la conduite horizontale.

15. Il y a aussi des circonstances où l'on doit se proposer d'élever l'eau le plus haut possible avec une chute donnée. Comme je l'ai dit dans mon précédent article, c'est à partir d'une certaine quantité au-dessous du niveau de la source, qu'il faut commencer à rétrécir le tuyau d'ascension pour obtenir la hauteur maximum; quand il y a des résistances passives, cela est confirmé par l'expérience; le maximum de force vive a lieu avant que la colonne atteigne le niveau. Mais quand on est obligé de tenir compte à un certain point du frottement dans le tuyau d'ascension, si la conduite n'est pas très longue, la forme du tuyau d'ascension doit être modifiée d'après les principes suivants:

La partie basse du tuyau d'ascension frotte pendant toute la durée des oscillations ascendante et descendante. Il est donc important qu'elle ne soit pas rétrécie assez pour faire éprouver un frottement considérable. Il faut rétrécir le tuyau graduellement à partir du bas, et ne le rétrécir qu'à partir d'une certaine hauteur d'une manière très notable. Si la section du tuyau est déjà rétrécie de moitié, ce qu'il y a de plus important est fait relativement à la diminution du chemin du frottement dans la conduite. Or, le rétrécissement, aux environs du niveau, abstraction faite de la diminution du chemin parcouru, augmente peu la hauteur obtenue dans le tuyau d'ascension, puisque le produit de l'eau qui occupe le tuyau à ces environs, par la distance de

son centre de gravité au-dessus ou au-dessous du niveau, est peu de chose. C'est vers le haut du tuyau d'ascension qu'il est le plus important de le rétrécir, pour obtenir la hauteur maximum du point de versement. Le sommet devra s'élargir ensuite graduellement, pour que le versement se fasse avec peu de vitesse.

On peut donc se représenter alors assez bien la forme du tuyau d'ascension par celle d'une fiole allongée, qui s'évase au sommet du goulot, pour faciliter le versement.

16. Il y a, comme on voit, deux circonstances essentielles qui doivent influer sur la détermination de la forme du tuyau d'ascension: 1°. celle où l'on peut négliger le frottement dans ce tuyau; 2°. celle où il ne peut être négligé et où l'on veut verser l'eau le plus haut possible.

17. Pour calculer le frottement dans les parties de ce tuyau dont le diamètre ne varie pas trop rapidement, on peut se servir de considérations relatives à la théorie des centres de gravité. Je suppose que l'on connût la loi de la variation des carrés des vitesses, le frottement serait à chaque instant proportionnel dans chaque portion de tuyau rétréci à la longueur qui en serait occupée, par le carré de la vitesse de l'eau qui s'y meut. Si donc nous connaissions *la courbe des carrés des vitesses*, dans chaque tuyau partiel, la résistance varierait dans chaque tuyau partiel, comme le moment de l'ordonnée correspondante par rapport à l'origine de ce tuyau partiel. Le travail total résistant dans l'intérieur de ce tuyau partiel jusqu'à ce qu'il soit rempli, sera donc proportionnel au produit de la surface de la courbe des carrés des vitesses relative à ce tuyau, par la hauteur du centre de gravité de cette courbe au-dessus de l'origine dont il s'agit.

Si, par exemple, on considérait le frottement dans toute l'étendue du tuyau d'ascension sans versement, et que son travail résistant fût peu de chose relativement à celui de la pesanteur, on trouverait que la longueur du tuyau d'ascension à laquelle on devrait avoir égard dans le calcul du frottement, serait environ la moitié de la longueur de ce tuyau d'ascension, les carrés des vitesses variant comme les cercles d'une sphère, puisque les tuyaux horizontaux sont toujours très longs. Quand le travail en frottement est considérable, et que la hauteur de l'ascension est assez considérablement diminuée, le point auquel la colonne arrive quand la vitesse est un maximum se trouvant

baissé, on peut faire le calcul relativement au tuyau d'ascension, au moyen de principes analogues.

Au reste, il serait inutile d'insister en ce moment sur ce mode de calcul, pour la forme rigoureuse du tuyau d'ascension; elle doit aussi être combinée en tenant compte du mouvement dans la décharge; et d'ailleurs la nature du frottement d'une colonne oscillante qui pénètre dans un tuyau d'ascension sans le trouver rempli d'avance, n'est pas assez connue dans l'état actuel de la science. J'en ai donné une idée dans les *Annales des Mines*, tome XIII, ainsi que dans mon précédent article, et je publierai sous peu un Mémoire à ce sujet; il me suffit, pour le moment, de dire que le coefficient du frottement dans ce cas est bien moindre qu'on ne l'avait pensé jusqu'à ce jour; il est moindre que dans le mouvement permanent au moins quand le tuyau d'ascension n'est pas trop long relativement à son diamètre.

18. Pour achever de donner une idée des propriétés distinctives du système, revenons un moment au cas où faisant abstraction du frottement, on considérerait des oscillations d'une amplitude indéfinie. On a vu, dans mon précédent article, comment les pressions en un point donné dépendent de l'amplitude de l'oscillation, quand le tuyau horizontal est très long. Considérons un point situé aux environs du niveau du réservoir de décharge. Pendant une moitié environ de la durée des oscillations, ce point ne sera pas il est vrai pressé par la colonne. Mais si l'amplitude est très grande, par rapport à la hauteur de chute, la moyenne des pressions sera aussi très grande, relativement à cette hauteur, pendant l'autre moitié. Ainsi, quoique pendant une moitié du temps, la pression exercée par l'eau sur le point dont il s'agit soit nulle; cependant la moyenne des pressions supportées par ce point sera bien plus grande que dans le cas où la colonne serait en équilibre avec le réservoir de la source. Si donc nous plaçons au point dont il s'agit, un branchement qui d'ailleurs ne débite par trop d'eau relativement à celle qui passe dans le tuyau d'ascension, ce branchement débitera plus d'eau, même dans le cas où nous aurons à considérer quelque travail en frottement, que dans le cas où nous ne produirions pas d'oscillation. Il faudrait tenir compte de l'inertie de l'eau du branchement dans les mouve-

ments oscillatoires, s'il était long ; mais le principe est nouveau, comme celui de mon *jet d'eau oscillant dans l'air libre* (voyez mon premier article) sur lequel repose un appareil dont je ne peux parler ici, où ce jet oscillant distribue l'eau à plusieurs étages en passant sur des réservoirs superposés comme les marches d'un escalier.

19. Il est facile maintenant de voir en quoi mon principe diffère de ceux qui semblent d'abord analogues.

*Les phénomènes de la percussion des liquides sont le principe du bélier de Montgolfier et de la colonne oscillante de Manoury.* La machine de Manoury ne marche pas quand on supprime le diaphragme sur lequel sa colonne *s'écrase* dans la descente, comme toute veine liquide choquant un plan et conservant une vitesse horizontale sur le sol. D'après la description de Lantz et Bétancourt, reproduite par Navier, *quand même il n'y aurait pas de frottement*, l'eau ne pourrait monter au double de la hauteur de chute, si son tuyau d'ascension n'était pas rétréci par le haut (\*).

*La percussion des liquides* est au contraire une des choses que j'évite dans mon système où l'eau entre sans choc, et d'où elle sort sans vitesse sensible. Lorsque j'aurai donné la description de mes autres appareils et de leurs modifications, on verra que cette propriété ne suffit pas pour particulariser le système principal.

S'il n'y avait pas de frottement, je pourrais verser l'eau à une *hauteur indéfinie*, sans être obligé de rétrécir le tuyau d'ascension, ni d'emmagasiner la force vive au moyen d'un écoulement extérieur pendant l'oscillation ascendante, ce dont on ne peut se dispenser dans le bélier, et je me procurerais, sur un branchement dans certaines circonstances, des pressions dont la moyenne serait indéfinie. Cette idée, distinctive comme principe, n'est cependant pas celle sur laquelle je dois le plus spécialement insister.

---

(\*) *Essai sur la composition des Machines*, p. 11 et 12. Cette description est faite d'après les renseignements donnés par Manoury d'Ectot lui-même. On ne dit nulle part que l'on puisse augmenter ou diminuer la hauteur obtenue par sa colonne oscillante, en engageant l'orifice dans l'eau du bief inférieur. Sa colonne ascendante, en vertu de phénomènes peu connus, devant alors se *charger* d'une partie de l'eau du bief inférieur, on ne peut prévoir ni le retard qui en résultera ni l'ensemble des pertes de force vive dans la confusion des mouvements.

Au moyen de deux tuyaux d'ascension, l'eau est toujours en mouvement dans la conduite d'arrivée. Elle est aussi toujours en mouvement dans le tuyau de décharge, quand ce dernier a la longueur suffisante, et l'eau *ne revenant pas vers sa source*, n'éprouve guère d'autre résistance passive que celle qui ne pourrait être évitée dans son transport par un mouvement permanent dans de longs tuyaux. Il est facile de voir que si le tuyau de conduite de la machine de Manoury était d'une certaine longueur, au lieu de monter l'eau s'échapperait par la solution de continuité pratiquée au bas du tuyau d'ascension, à cause de son peu de vitesse ascensionnelle.

L'eau étant amenée avec des vitesses variables, le maximum de ces vitesses variables est plus grand que la vitesse moyenne permanente qui suffirait pour amener la même quantité d'eau dans le même temps; si donc il y avait quelque dépôt accidentel, on aurait périodiquement une *chasse* plus forte que dans le mouvement permanent dont il s'agit. La moyenne des carrés des vitesses étant d'ailleurs plus grande que le carré de la vitesse moyenne ne le serait dans le mouvement permanent, c'est une nouvelle raison pour compter sur une *chasse* plus forte.

Pour emmagasiner une même quantité de force vive, on a moins de travail en résistances passives à surmonter que dans le bélier et les autres machines; la pression motrice moyenne est plus grande et le chemin parcouru par ces résistances est moindre.

20. On pourrait aussi comparer ce système à la machine à colonne d'eau où le liquide ne revient point vers sa source. Il aura évidemment pour les cas où il est applicable, l'avantage d'éviter le frottement du piston de la machine à colonne d'eau ou la compression de l'air dans la machine de Schemnitz. Il débitera donc alors beaucoup beaucoup plus d'eau que ces machines. Dans un cas particulier qui n'est pas celui où il est le plus avantageux, M. Coriolis trouve, comme moi, qu'il élèvera environ 150 pouces d'eau avec un effet utile de 0,95; d'après les évaluations de M. Ducros, *Mémoire sur l'alimentation des Canaux*, c'est à peu près un dixième de ce qui suffit ordinairement au point du partage du canal du Languedoc pour alimenter un des versants. On voit même, par d'autres évaluations, que celui des deux qui exige le moins d'eau dépense ordinairement 18,000 mètres

cubes par jour. (Voyez *Histoire de la Navigation intérieure de la France*; par M. Dutens, tome I, p. 171.)

21. Héron d'Alexandrie inventa le premier une machine à élever l'eau où se présente le principe de l'oscillation des liquides.

En 1726, Denizard et de La Deuille ont inventé la machine à colonne d'eau où ce principe se retrouve.

En 1775, Witehurst a inventé un bélier hydraulique.

En 1797, Montgolfier en a présenté un tout différent.

En 1812, Manoury d'Ectot a inventé une machine à colonne oscillante.

On a toujours bien su qu'on pouvait élever de l'eau par une première oscillation dans un tuyau de conduite, cette idée ne mérite pas d'être réclamée; mais le problème consistait à recommencer en vidant le tuyau d'ascension d'une manière convenable.

Ces diverses solutions, la machine à colonne d'eau, le bélier et la colonne oscillante n'ont au fond d'autre rapport entre elles, et avec ma propre solution, que le principe de l'oscillation de l'eau, principe connu de toute antiquité. Personne ne peut s'en attribuer l'invention; car il nous est révélé par le jeu des vagues dans le creux de rochers, et l'on trouve même sur plusieurs côtes des corps de bélier naturels.

Dès l'année 1766, Borda avait publié, dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences*, sur les oscillations de l'eau dans un tube vertical, une expérience d'un genre indiqué trente ans auparavant par Daniel Bernouilli. Voyez les expériences de ce dernier, *Hydrodynamicæ*, 1738, pages 141 — 143; il avait même employé des tubes coniques. Le fait suivant suffira d'ailleurs pour prouver que la difficulté des problèmes dont il s'agit, consistait uniquement à reproduire indéfiniment, d'une manière convenable, des effets connus et expliqués depuis long-temps. Bossut, qui a varié l'expérience de Borda, plus de vingt ans avant Montgolfier, avait lui-même expliqué pourquoi quelquefois l'eau qui sort par un ajutage saillit plus haut que ne le demande la hauteur du réservoir. On peut voir avec détail son explication, *Hydrodynamique*, tome II, p. 101, 1775.

---