JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

A. MIQUEL

Théorèmes de Géométrie

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 3 (1838), p. 485-487.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1838_1_3__485_0>

THÉORÈMES DE GÉOMÉTRIE;

PAR A. MIQUEL.

THÉORÈME I. Lorsque trois circonférences de cercle A, O, C (Pl. II, fig. 1) se coupent en un même point I; si l'on joint un point F de l'une d'elles A, aux points N et R où cette même circonférence A rencontre de nouveau les deux autres O et C; les points D et E où les droites FN et FR couperont de nouveau les circonférences O et C, seront en ligne droite avec la seconde intersection M de ces deux circonférences O et C.

En effet, joignons DM et EM, ainsi que MI, NI, RI. En observant que les angles F, D, E sont supplémentaires des angles NIR, MIN, MIR, on aura

$$F + D + E = 6d - (NIR + MIN + MIR),$$

ou bien

$$F + D + E = 2d.$$

D'où l'on peut aisément conclure que la figure FDME est un triangle et que, par conséquent, DME est une ligne droite.

Scolie. Il est facile de s'assurer que la proposition précédente est vraie, quelle que soit la position des trois cercles A, O, C qui se coupent en un même point I; et quelle que soit la position du point F sur la circonférence A.

De cette proposition on déduit sans peine les deux réciproques suivantes :

Réciproque I. Lorsque trois circonférences de cercle se coupent en un même point I, si par la seconde intersection M de deux de ces circonférences, on mène une droite DME jusqu'à la rencontre de chacune de ces circonférences O et C aux points D et E; et si l'on joint respectivement chacun de ces points D et E aux points N et R où chacune des deux circonférences O et C coupe de nouveau la troisième circonférence A; les droites DN et ER, ainsi menées, se rencontreront en un point F de cette troisième circonférence A.

Réciproque 2. Trois points M, N, R étant pris respectivement sur chacun des côtés d'un triangle DEF; si l'on fait passer une circonférence de cercle par chaque sommet et par les deux points qui se trouvent sur les deux côtés qui aboutissent à ce sommet; les trois circonférences ainsi obtenues se couperont en un même point I.

THÉORÈME II. Si l'on circonscrit des circonférences de cercle aux quatre triangles ADC, CBF, AEF, BDE (fig. 2) que forment les côtés d'un quadrilatère complet ADEFBC, les quatre circonférences ainsi obtenues se couperont en un même point I.

En effet, les trois points B, F, E appartenant respectivement à chacun des trois côtés du triangle ADC; d'après la réciproque 2, les trois circonférences CBF, DEB, AEF se coupent en un même point. On démontrerait de la même manière que les trois circonférences DEB, AEF, ADC se coupent en un même point : donc toutes les quatre se coupent en un même point.

THÉORÈME III. Soit un pentagone quelconque ABCDE (fig. 3), dont on prolonge les côtés jusqu'à leur mutuelle intersection aux points I, K, F, G, H. Si l'on circonscrit des circonférences de cercle aux cinq triangles IAB, KBC... formés par un côté et par les prolongements des deux côtés qui lui sont adjacents, je dis que les cinq nouveaux points P, Q, M, N, R résultant de l'intersection de deux circonférences consécutives, se trouvent sur une même circonférence de cercle.

Par les trois points P, M, R je fais passer une circonférence de cercle, et je dis qu'elle passera par les points N et Q.

Afin de prouver qu'elle passe par le point N, je circonscris une circonférence de cercle au triangle ICG. En considérant successivement les quadrilatères complets IAGCKB, GEICFD, on voit, d'après le théorème précédent, que cette circonférence passe par les points P et M.

Maintenant les circonférences PMG, PMR, PAR se coupant en un même point P, et la droite IAG passant par l'intersection I des circonférences PMG, PAR, en joignant les points A et G aux intersections R et M de chacune de ces deux circonférences avec la troisième PMR, les droites RA et MG prolongées se couperont en un point L de cette dernière circonférence PMR. (*Réciproque* 1.)

Observant enfin que les trois points R, M, E sont situés respectivement sur chacun des côtés du triangle ALG, on voit que les trois circonférences ARE, LRM, GME se coupent en un même point. (*Réciproque* 2.) Donc la circonférence PMR passe par le point N d'intersection des circonférences HAE, GED.

On prouverait de la même manière qu'elle passe par le point Q. Donc les cinq points P, Q, M, N, R sont situés sur une même circonférence de cercle. Ce qu'il fallait démontrer.
