JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

PAUL BRETON

Application d'un principe de Mécanique rationnelle à la résolution de quelques Problèmes de Géométrie

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 3 (1838), p. 488-494.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1838_1_3__488_0>

Applications d'un principe de Mécanique rationnelle à la résolution de quelques Problèmes de Géométrie;

PAR M. PAUL BRETON,

Élève - ingénieur des Ponts - et - Chaussées.

§ I. Le principe dont il s'agit peut être énoncé dans ces termes : *Tout mouvement infiniment petit d'un corps solide retenu par un point fixe, n'est autre qu'un mouvement de rotation autour d'une certaine droite passant par ce point.*

Quoique l'on en trouve la démonstration dans tous les traités de Mécanique rationnelle, et même dans ce recueil, nous croyons devoir le démontrer ici de nouveau, en suivant une marche conforme à l'esprit de cet article.

Nommons F le point fixe, A et B deux autres points pris à volonté, formant avec F les trois sommets d'un triangle de dimensions invariables. Concevons les plans normaux aux chemins infiniment petits décrits par A et B; leur intersection passera par le point F et pourra être prise pour l'axe commun de deux circonférences tangentes aux chemins décrits simultanément par les points A et B. Par conséquent il sera permis de regarder le mouvement infiniment petit qui a lieu, comme déterminé par la condition que les sommets A et B du triangle ABF demeurent sur deux circonférences dont l'axe commun passe en F. Or, il est évident que tout point C lié au triangle ABF par les distances invariables CA, CB, CF décrirait un élément de circonférence autour du même axe. Donc, tous les points d'un corps solide retenu par un point fixe, qui éprouve un mouvement infiniment petit, tournent en même temps autour d'un certain axe passant par le point fixe.

Celui-ci peut être pris en dehors du mobile, et si on le suppose infiniment éloigné, le mouvement de chaque point aura toujours lieu autour d'un certain axe ; mais dans le cas dont il s'agit, le corps sera assujéti à se mouvoir comme si trois de ses points devaient rester dans un plan fixe, perpendiculaire à la direction de l'axe de rotation.

On en conclut que toute figure plane qui prend un mouvement infiniment petit tourne autour d'un certain axe perpendiculaire à son plan, et par suite, que l'un des points de cette figure reste fixe pendant le mouvement.

Dans ce qui va suivre, nous parlerons plus spécialement du cas d'une figure plane. Nous appellerons *centre instantané de rotation* le point du plan de celle-ci qui reste immobile pendant chaque mouvement infiniment petit.

M. Chasles, qui a remarqué le premier l'existence du centre instantané de rotation, en a fait la base d'une méthode particulière pour construire la tangente de certaines courbes, méthode qui est une heureuse généralisation de celle appliquée par Descartes à la cycloïde. De ce que les normales menées simultanément aux trajectoires de tous les points d'un plan mobile, glissant sur lui-même, concourent en un point unique, il conclut ce théorème : *Lorsqu'une courbe est décrite par un point d'une figure en mouvement dans son plan, la normale à cette courbe s'obtient en joignant le point décrivant au centre instantané de rotation.*

Un grand nombre de courbes particulières se prêtent avantageusement à l'application de la méthode de M. Chasles; nous nous bornerons à citer la courbe à longue inflexion décrite par le point d'attache de la tige du piston dans le parallélogramme des machines à vapeur de Watt.

Comme deux points suffisent pour déterminer en général la position d'une figure plane, il suffira de deux conditions pour en régler le mouvement. Dans tous les cas, pour déterminer le centre instantané de rotation, il suffira de rappeler la démonstration du théorème qui est au commencement de cet article. On sera conduit ainsi à substituer aux courbes qui règlent le mouvement, le système de deux circonférences concentriques ayant pour centre commun le centre instantané de rotation. Lorsque la figure mobile contiendra des courbes assujéties à passer par des points fixes, on substituera à ces points des circonférences d'un rayon infiniment petit. Les exemples que nous citerons bientôt dissiperont les nuages que ces généralités peuvent laisser dans l'esprit du lecteur.

§ II. *Du centre instantané de rotation considéré dans ses rapports avec la théorie des enveloppes.*

L'enveloppe d'une courbe mobile étant la courbe qui la touche dans toutes ses positions, on en conclut que la trajectoire du point de contact de l'enveloppe et de l'enveloppée est tangente elle-même à ces deux lignes. Par conséquent on obtiendra les points de contact de la courbe mobile avec son enveloppe en menant à celle-ci des normales par le centre instantané de rotation.

Premier exemple. *Construire l'enveloppe des positions successives d'une droite de longueur constante qui glisse sur les côtés d'un angle droit.*

Soit AB (Planche II, fig. 4) une position de l'enveloppée, yOx l'angle dans lequel elle se meut. Menons AC, BC perpendiculaires aux côtés Ox, Oy; le point C sera le centre instantané de rotation. Abaissons sur AB la perpendiculaire CM, le point M appartiendra à l'enveloppe.

Rien de plus facile que de trouver l'équation de cette courbe en la rapportant aux axes Ox, Oy. Soient $\mathrm{MP} = x$ et $\mathrm{MQ} = y$ l'abscisse et l'ordonnée du point M; posons $\mathrm{OA} = \mathrm{BC} = \alpha$, $\mathrm{OB} = \mathrm{AC} = \beta$; en ayant égard aux similitudes de triangles que présente la figure, on trouvera sans peine les relations

$$\frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{MB}} = \frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{A}} \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{MB}}{\mathrm{BC}} = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}} \quad \text{ou} \quad \frac{x}{\mathrm{MB}} = \frac{\alpha}{a} \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{MB}}{\alpha} = \frac{\alpha}{a},$$

la lettre a désignant la longueur constante AB. On a également

$$\frac{\mathrm{MQ}}{\mathrm{MA}} = \frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{AB}} \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{AC}} = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BA}}, \quad \text{ou} \quad \frac{y}{\mathrm{MA}} = \frac{\beta}{\alpha} \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{MA}}{\beta} = \frac{\beta}{a}.$$

On en déduit

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{\alpha^2}{a}, \qquad y = \frac{\beta^2}{a^2}.$$

D'ailleurs, on a

$$a^2 = \alpha^2 + \beta^2.$$

Éliminant α et β entre ces trois dernières équations, il vient

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},$$

pour l'équation de l'enveloppe. Les procédés du calcul différentiel conduisent au même résultat.

Deuxième exemple. *Construire l'enveloppe des positions d'une ligne droite qui se meut en formant constamment le même angle avec une courbe donnée.*

Par le point de rencontre de la droite mobile avec la courbe directrice, menons la normale à celle-ci. Ces deux droites formeront un angle égal au complément de l'angle donné; et l'on pourra imaginer que ce dernier se meut de manière que son sommet restant sur la courbe, l'un des côtés lui soit constamment normal; les intersections successives de l'autre côté formeront l'enveloppe cherchée. Or le centre instantané de rotation de la figure n'est autre chose que celui de la normale, c'est-à-dire le centre de courbure de la directrice. Par conséquent, si l'on abaisse de ce point une perpendiculaire sur la droite mobile, leur point de rencontre sera sur l'enveloppe cherchée.

On voit combien il serait facile d'obtenir l'équation de cette courbe; mais pour éviter d'être trop long, nous ne faisons qu'indiquer ce détail.

Troisième exemple. *Étant donné un point fixe et une circonférence de cercle, on propose de construire l'enveloppe des positions successives de l'un des côtés d'un angle droit dont le sommet se meut sur la circonférence tandis que l'autre côté passe constamment par le point fixe.*

Soit FPM (fig. 5) une des positions de la figure mobile. Joignons le sommet P de l'angle droit au centre O de la circonférence APB; prolongeons le rayon OP jusqu'à sa rencontre en C avec FC perpendiculaire sur FP. Le point C, ainsi obtenu, est le centre instantané de rotation. Abaissons CM perpendiculaire sur PM: le point M appartient à la courbe cherchée.

En formant, ce qui est facile, l'équation de cette courbe, on arriverait à ce résultat, auquel M. de Prony parvient en employant la théorie des enveloppes, que les *courbes enveloppes* dont il s'agit sont des sections coniques. Nous verrons tout-à-l'heure que ce théorème est susceptible d'une démonstration très simple.

§ III. *Du centre instantané de rotation considéré comme moyen de démontrer certains théorèmes de Géométrie.*

Comme dans ce qui précède, nous présenterons des exemples choisis de manière à faire ressortir l'importance du centre instantané de rotation.

Reprenons d'abord le dernier exemple, ne changeons rien à la figure qui s'y rapporte. Prenons $OF' = OF$, joignons MF, MF'. La figure FPMC étant un rectangle, on a

$$PC = MF.$$

Ces deux diagonales se coupent mutuellement en I en parties égales, et l'on a

$$IP = IC = IM = IF.$$

Le point I étant le milieu de MF, et le point O celui de FF', on a

$$MF' = 2OI = 2(OP + IP) = AB + MF,$$

ou

$$MF' - MF = AB.$$

On en conclut que la courbe est une hyperbole dont les foyers sont en F et F', et dont l'axe transverse est égal au diamètre AB du cercle donné.

Si le point F (fig. 6) au lieu d'être placé hors du cercle, ainsi que nous l'avons supposé tacitement, était au contraire à l'intérieur, on ferait la même construction que pour le premier cas, et l'on aurait toujours

$$MF' = 2OI = 2(OP - IP) = AB - MF,$$

ou

$$MF' + MF = AB,$$

ce qui fait voir que, dans le cas dont il s'agit, l'enveloppe est une ellipse dont les foyers sont en F et F', et qui a pour diamètre maximum le diamètre AB du cercle donné.

Ainsi l'usage du centre instantané de rotation conduit non-seulement à la construction des enveloppes, mais encore elle en fait connaître la nature en mettant en évidence leurs propriétés caractéristiques.

Nous ne croyons pouvoir mieux terminer qu'en joignant à l'exemple qui vient d'être traité, un théorème élégant dû à Monge, dont on trouve la démonstration dans les traités de Géométrie analytiques.

Théorème. *Le sommet d'un angle trièdre trirectangle dont les faces restent tangentes à une surface du second ordre décrit une sphère.*

Concevons que l'un des points de contact étant fixe, on fasse varier les deux autres. Si l'on imagine un cylindre circonscrit à la surface donnée, dont les génératrices soient parallèles à l'intersection des deux plans tangents mobiles, les traces de ceux-ci sur le troisième, perpendiculaires entre elles, seront tangentes à la trace du cylindre sur le même plan, laquelle sera une section conique. Les normales à celle-ci menées par ses points de contact avec les deux arètes de l'angle trièdre comprises dans son plan, détermineront, par leur section, le centre instantané de rotation du système de ces deux arètes. Joignant ce point au sommet mobile, on aura la normale à la courbe plane qu'il décrit; mais les deux arètes dont il s'agit, et les normales correspondantes forment un rectangle dont les diagonales se coupent mutuellement en deux parties égales; l'une d'elles étant normale au lieu plan du sommet mobile, passe par le milieu de la corde des contacts, et par conséquent est un diamètre de la conique (*). Il est facile d'en conclure que le plan perpendiculaire au plan fixe, et normal à l'élément décrit, est un plan diamétral de la surface proposée. On en

(*) Cette partie de la démonstration pourrait être adaptée à ce théorème de Géométrie plane : *le sommet d'un angle droit tangent à une section conique décrit une circonférence de cercle ;* car alors les normales vont toutes passer au centre de la conique.

conclut qu'il passe par le centre; et si l'on rend fixes chacun à leur tour les deux points de contact de l'angle trièdre avec la surface que nous avions d'abord supposés variables, on aura deux autres plans diamétraux de la surface qui se couperont suivant la ligne qui en joint le centre au sommet de l'angle mobile. Cette droite, normale aux éléments décrits sur la surface cherchée dans trois directions différentes (deux suffisent), est elle-même la normale à cette surface.

Telle est donc la nature de la surface dont il s'agit, que toutes ses normales concourent en un même point. Ce caractère suffit pour faire reconnaître la surface sphérique.