JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

POISSON

Note sur les limites de la série de Taylor

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 3 (1838), p. 4-9.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1838_1_3__4_0>

NOTE

Sur les limites de la série de Taylor ;

PAR M. POISSON.

Soit fx une fonction donnée de la variable x. Si l'on suppose qu'aucune des n fonctions fx, $\frac{dfx}{dx}$, $\frac{d^2fx}{dx^2}$, ... $\frac{d^{n-1}fx}{dx^{n-1}}$, ne devient infinie pour la valeur qu'on attribuera à x, et si cette variable se change en $x+y$, on pourra développer $f(x+y)$, par la série de Taylor prolongée jusqu'au $n^{ième}$ terme inclusivement, de sorte qu'en désignant par R la somme de tous les termes suivants, on aura

$$\left.\begin{array}{l} f(x+y)=fx+y\frac{dfx}{dx}+\frac{y^2}{1.2}\frac{d^2fx}{dx^2}+\frac{y^3}{1.2.3}\cdot\frac{d^3fx}{dx^3}+\ldots \\ \qquad +\frac{y^{n-1}}{1.2.3\ldots n-1}\frac{d^{n-1}fx}{dx^{n-1}}+\mathrm{R}. \end{array}\right\} (1)$$

Je supposerai que l'accroissement y de x, soit compris entre zéro et une quantité donnée h; le reste R sera une fonction inconnue de x et y ; et il s'agira d'en trouver deux limites, c'est-à-dire, deux quantités dont l'une soit plus grande et l'autre plus petite que R, pour la valeur qui sera donnée à x, et pour toutes les valeurs de y, depuis $y=0$ jusqu'à $y=h$.

Pour cela, je fais

$$x+y=c,\quad x=c-y,\quad \frac{d^nfx}{dx^n}=\mathrm{F}x=\mathrm{F}(c-y);$$

je suppose qu'on donne à c une valeur constante, que l'on fasse croître y depuis zéro jusqu'à h, et que l'on désigne par a la valeur de y pour laquelle celle de $\mathrm{F}(c-y)$ sera la plus grande; de sorte qu'on ait

$$F(c-y)-F(c-a)<0,$$

pour toutes les autres valeurs de y. Cela étant, je mets $\frac{y^n}{1.2.3\ldots n}F(c-a)$ à la place de R dans l'équation (1); puis je représente par Q l'excès de son premier membre sur le second, ou autrement dit, je fais

$$\left.\begin{array}{l} f(x+y)-fx-y\frac{dfx}{dx}-\frac{y^2}{1.2}\cdot\frac{d^2fx}{dx^2}-\frac{y^3}{1.2.3}\frac{d^3fx}{dx^3}\cdots\cdots \\ \quad -\frac{y^{n-1}}{1.2.3\ldots n-1}\frac{d^{n-1}fx}{dx^{n-1}}-\frac{y^n}{1.2.3\ldots n}F(c-a)=Q. \end{array}\right\} (2)$$

A cause de $x=c-y$, la quantité Q sera une fonction de la seule variable y. Elle sera nulle pour $y=0$, et une quantité finie, depuis $y=0$ jusqu'à $y=h$, ou depuis $x=c$ jusqu'à $x=c-h$, du moins si l'on suppose qu'aucune des $n+1$ fonctions fx, $\frac{dfx}{dx}$, $\frac{d^2fx}{dx^2}$, ... $\frac{d^{n-1}fx}{dx^{n-1}}$, $\frac{d^nfx}{dx^n}$, ne devienne infinie entre ces limites. En supposant aussi, pour fixer les idées, que h soit une quantité positive, je dis, de plus, que la fonction Q sera constamment négative entre ces mêmes limites.

En effet, si l'on différentie l'équation (2) par rapport à x et à y, mais en considérant la somme $x+y$ comme une constante, ou en faisant $dx=-dy$, et sans faire varier non plus la quantité a, qui est une valeur déterminée de y, on trouvera, toutes réductions faites,

$$\frac{dQ}{dy}=\frac{y^{n-1}}{1.2.3.n-1}[F(c-y)-F(c-a)]; \qquad (3)$$

quantité négative, à raison de l'inégalité précédente, et parce que la variable y, comprise entre zéro et h, est supposée positive. Or, on démontre sans difficulté, que toute fonction Q de y, qui s'évanouit avec la variable, dont le coefficient différentiel $\frac{dQ}{dy}$ conserve toujours le même signe depuis $y=0$ jusqu'à $y=h$, et qui ne passe pas par l'infini entre ces limites, est du même signe que $\frac{dQ}{dy}$ entre ces mêmes limites (*); par conséquent la fonction Q que nous considérons, est négative depuis $y=0$ jusqu'à $y=h$; ce qu'il s'agissait de démontrer.

Maintenant, on tire des équations (1) et (2),

$$R=\frac{y^n}{1.2.3\ldots n}F(c-a)+Q; \qquad (4)$$

la quantité Q étant négative, on aura donc

$$R<\frac{y^n}{1.2.3\ldots n}F(c-a).$$

Si l'on eût supposé négative, la limite h des valeurs de y, il y aurait eu deux cas à distinguer dans l'équation (3): selon que n serait un nombre pair ou impair, $\frac{dQ}{dy}$ aurait une valeur positive ou négative, et, par suite, il en serait de même à l'égard de Q; l'inégalité qu'on vient d'écrire, ne changerait donc pas dans le cas de n impair, et elle se changerait en celle-ci :

$$R>\frac{y^n}{1.2.3\ldots n}F(c-a),$$

dans le cas de n un nombre pair.

En désignant par b la valeur de y, qui répond à la plus petite valeur de $F(c-y)$, quand on y fait croître y depuis zéro jusqu'à h, sans faire varier c, on trouvera, par un raisonnement semblable au précédent,

$$R>\frac{y^n}{1.2.3\ldots n}F(c-b),$$

quand h sera une quantité positive, ou bien quand n sera un nombre impair, et, au contraire,

---

(*) Cette proposition est un cas particulier du théorème fondamental des intégrales définies, d'après lequel une intégrale $\int_a^b Xdx$ exprime la somme de toutes les valeurs de la différentielle Xdx, depuis $x=a$ jusqu'à $x=b$, en supposant que X soit une fonction de x, qui ne devient point infinie entre ces limites.

$$R < \frac{y^n}{1.2.3\ldots n} F(c-b),$$

lorsque ce nombre n sera pair, et h une quantité négative.

Pour donner à ces limites de R les formes sous lesquelles on a coutume de les présenter, je considère la fonction $F(x+y)$; je suppose que, sans faire varier x, on y fasse croître y depuis $y=0$ jusqu'à $y=h$, et je désigne par α et β, les valeurs de y correspondantes à la plus grande et à la plus petite de celles que prendra $F(x+y)$, de manière qu'on ait

$$F(x+\alpha) > F(x+y), \quad F(x+\beta) < F(x+y),$$

pour toutes les autres valeurs de y. D'après ce qu'on a représenté plus haut par a et b, on aura identiquement

$$F(c-a) = F(x+\alpha), \quad F(c-b) = F(x+\beta);$$

d'où il résultera les formules ordinaires

$$R < \frac{y^n}{1.2.3\ldots n} F(x+\alpha), \quad R > \frac{y^n}{1.2.3\ldots n} F(x+\beta),$$

quand n sera impair et quel que soit le signe de h, et au contraire

$$R > \frac{y^n}{1.2.3\ldots n} F(x+\alpha), \quad R < \frac{y^n}{1.2.3\ldots n} F(x+\beta),$$

dans le cas où n est un nombre pair et h ou y une quantité négative. Les quantités $F(x+\alpha)$ et $F(x+\beta)$ pourront être positives ou négatives, et c'est en ayant égard à leurs signes et à celui de y^n, que ces inégalités auront lieu, de sorte qu'elles signifient que l'excès de la limite supérieure de R sur R, et l'excès de R sur sa limite inférieure, sont des quantités positives.

Les hypothèses que l'on a faites pour parvenir à ces résultats, consistent à supposer qu'aucune des $n+1$ fonctions $f(x+y)$, $\frac{df(x+y)}{dx}$, $\frac{d^2f(x+y)}{dx^2}$, ... $\frac{d^{n-1}f(x+y)}{dx^{n-1}}$, $\frac{d^nf(x+y)}{dx^n}$, ne devient infinie pour la valeur qu'on donne à x, et pour l'une des valeurs de y

comprises depuis $y=0$ jusqu'à $y=h$. Mais, par la théorie relative aux cas où la série de Taylor est en défaut, on sait que si l'un des coefficients différentiels d'une fonction devient infini pour une valeur particulière de la variable, chacun des coefficients suivants le deviendra également; pour que la condition précédente soit remplie, il sera donc nécessaire et il suffira que la plus grande et la plus petite valeur $\mathrm{F}(x+\alpha)$ et $\mathrm{F}(x+\beta)$ du dernier coefficient $\frac{d^n f(x+y)}{dx^n}$, ou de $\mathrm{F}(x+y)$, soient des quantités finies. Quand l'une ou l'autre de ces deux quantités, aura une valeur infinie, positive ou négative, les limites précédentes de R ne seront plus applicables, et pour en découvrir d'autres, il faudra recourir à des considérations relatives à la fonction particulière fx, dont il s'agira.

Si l'on veut exprimer par une intégrale la valeur exacte du reste R, on tirera d'abord, de l'équation (3),

$$\mathrm{Q}=\frac{1}{1.2.3\ldots n-1}\int y^{n-1}\mathrm{F}(c-y)\,dy-\frac{y^n}{1.2.3\ldots n}\mathrm{F}(c-a),$$

et ensuite, de l'équation (4),

$$\mathrm{R}=\frac{1}{1.2.3\ldots n-1}\int y^{n-1}\mathrm{F}(c-y)\,dy;$$

l'intégrale étant prise de manière qu'elle s'évanouisse avec y, et en considérant c comme une constante que l'on remplacera par $x+y$ après l'intégration.

Pour vérifier ce résultat, j'observe que l'on a

$$\mathrm{F}(c-y)=(\mp 1)^n\,\frac{d^n f(c-y)}{dy^n};$$

en intégrant par partie, on aura donc

$$\begin{aligned}\int y^{n-1}\mathrm{F}(c-y)\,dy &= (\mp 1)^n y^{n-1}\frac{d^{n-1}f(c-y)}{dy^{n-1}}\\ &\quad-(\mp 1)^n(n-1)\int y^{n-2}\frac{d^{n-1}f(c-y)}{dy^{n-1}}\,dy;\end{aligned}$$

on aura de même

$$\int y^{n-2}\frac{d^{n-1}f(c-y)}{dy^{n-1}}dy=y^{n-2}\frac{d^{n-2}f(c-y)}{dy^{n-2}}-(n-2)\int y^{n-3}\frac{d^{n-2}f(c-y)}{dy^{n-2}}dy;$$

et en continuant ainsi jusqu'à ce qu'on ait épuisé l'exposant de y, on parviendra à une dernière équation

$$\int \frac{df(c-y)}{dy}\,dy = f(c-y) - fc.$$

Or, en faisant $c = x + y$, hors des signes f, dans toutes ces équations successives, et observant qu'il en résultera, pour un nombre m quelconque,

$$\frac{d^m f(c-y)}{dy^m} = (\mp 1)^m \frac{d^m fx}{dx^m},$$

on en conclura une valeur de $\int y^{n-1}\,\mathrm{F}(c-y)\,dy$, au moyen de laquelle la valeur précédente de R coïncidera avec celle que l'on déduit de l'équation (1); ce qu'il s'agissait de vérifier.

Cette note n'ajoute rien à ce qui était connu; mais elle pourra être utile aux élèves qui commencent l'étude du calcul différentiel.