JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

LAMÉ

Extrait d'une lettre de M. Lamé à M. Liouville sur cette question: Un polygone convexe étant donné, de combien de manières peut-on le partager en triangles au moyen de diagonales ?

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 3 (1838), p. 505-507.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1838_1_3__505_0>

Extrait d'une lettre de M. Lamé à M. Liouville sur cette question : *Un polygone convexe étant donné, de combien de manières peut-on le partager en triangles au moyen de diagonales?* (*)

« La formule que vous m'avez communiquée hier, se déduit facilement de la comparaison de deux méthodes qui conduisent au même but.

» En effet, on peut, à l'aide de deux méthodes différentes, évaluer le nombre des décompositions en triangles d'un polygone : par la considération des côtés, ou par celle des sommets.

I.

» Soit ABCDEF... un polygone convexe de $n+1$ côtés, et soit désigné par le symbole P_k le nombre total des décompositions en triangles d'un polygone de k côtés. Un côté quelconque AB de ABCDEF... servira de base à un triangle, dans chacune des P_{n+1} décompositions de ce polygone, et ce triangle aura son sommet en C, ou D, ou E, ou F... ; au triangle CBA correspondront P_n décom-

(*) *Voyez* un Mémoire de Segner (*Novi Commentarii Acad. Petrop.*, t. VII, p. 203). L'auteur a trouvé l'équation (1) de M. Lamé ; mais la formule (3) offre une solution bien plus simple que la sienne. Cette formule (3) est due sans doute à Euler. Elle est indiquée sans démonstration à la page 14 du volume cité plus haut. L'identité des équations (1) et (3) n'est pas facile à établir. M. Terquem y étant parvenu à l'aide de quelques propriétés des factorielles, m'a proposé ce problème. Je l'ai communiqué ensuite à divers géomètres : aucun d'eux ne l'a résolu ; M. Lamé a été plus heureux : j'ignore si d'autres avaient obtenu avant lui une solution aussi élégante.

J. Liouville.

positions différentes; à DBA un autre groupe de décompositions, représenté par le produit P_3P_{n-1}; à EBA le groupe P_4P_{n-2}; à FBA, celui P_5P_{n-3}; et ainsi de suite, jusqu'au triangle ZAB, qui appartiendra à un dernier groupe P_n. Or, tous ces groupes sont essentiellement distincts: leur somme donnera donc P_{n+1}. Ainsi l'on a

$$(1)\quad P_{n+1} = P_n + P_3P_{n-1} + P_4P_{n-2} + P_5P_{n-3} + \ldots + P_{n-3}P_5 + P_{n-2}P_4 + P_{n-1}P_3 + P_n.$$

II.

» Soit *abcde*... un polygone de n côtés. A chacune des $n-3$ diagonales, qui aboutissent à l'un des sommets a, correspondra un groupe de décompositions, pour lesquelles cette diagonale servira de côté à deux triangles adjacents : à la première diagonale ac, le groupe P_3P_{n-1}; à la seconde ad, celui P_4P_{n-2}; à la troisième ac, P_5P_{n-3}, et ainsi de suite jusqu'à la dernière ax qui sera active dans le groupe P_3P_{n-1}. Ces groupes ne sont pas totalement différents, car il est aisé de voir que quelques-unes des décompositions partielles, appartenant à l'un d'eux, se retrouvent dans les précédents. De plus ils ne comprennent pas les décompositions partielles de P_n pour lesquelles aucune des diagonales aboutissant en a n'est active.

» Mais si l'on fait la même opération à chacun des autres sommets du polygone et qu'on réunisse toutes les sommes de groupes de ces sommets, par leur somme totale $n(P_3P_{n-1}+P_4P_{n-2}+ ..+P_{n-2}P_4+P_{n-1}P_3)$ on sera certain d'embrasser toutes les décompositions partielles de P_n; chacune d'elles s'y trouvera même répétée un certain nombre de fois.

» En effet, si l'on imagine une quelconque de ces décompositions, elle comprend $n-2$ triangles, ayant en tout $3n-6$ côtés; si l'on retranche de ce nombre les n côtés du polygone, et qu'on prenne la moitié du reste qui est $n-3$, on aura le nombre des diagonales actives dans la décomposition dont il s'agit. Or, il est évident que cette décomposition partielle se trouvera répétée autant de fois, dans la somme totale qui précède, que ces $n-3$ diagonales ont d'extrémités, c'est-à-dire $2n-6$ fois : puisque chaque extrémité est un sommet du polygone, et qu'en évaluant les groupes de ce sommet, la diagonale a fourni un groupe, comprenant la décomposition partielle considérée.

» Ainsi, chacune des décompositions partielles du groupe total P_n, étant répetée $2n$-6 fois dans $n(P_3P_{n-1}+P_4P_{n-2}+\ldots+P_{n-2}P_4+P_{n-1}P_3)$, on obtiendra P_n en divisant cette somme par $2n-6$. On a donc

$$(2) \quad P_n = \frac{n(P_3P_{n-1}+P_4P_{n-2}+\ldots+P_{n-2}P_4+P_{n-1}P_3)}{2n-6}.$$

III.

» La première formule (1) donne

$$P_3P_{n-1}+P_4P_{n-2}+\ldots+P_{n-2}P_4+P_{n-1}P_3 = P_{n+1}-2P_n,$$

et la seconde (2)

$$P_3P_{n-1}+P_4P_{n-2}+\ldots+P_{n-2}P_4+P_{n+1}P_3 = \frac{2n-6}{n}P_n;$$

donc enfin

$$P_{n+1}-2P_n = \frac{2n-6}{n}P_n,$$

ou bien

$$(3) \qquad P_{n+1} = \frac{4n-6}{n}P_n.$$

Ce qu'il fallait démontrer. »

Paris, 25 août 1838.