JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

E. CATALAN

Note sur une Équation aux différences finies

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 3 (1838), p. 508-516.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1838_1_3__508_0>

Note sur une Équation aux différences finies;

PAR E. CATALAN.

M. *Lamé* a démontré que l'équation

$$P_{n+1} = P_n + P_{n-1}P_3 + P_{n-2}P_4 + \ldots + P_4P_{n-2} + P_3P_{n-1} + P_n, \quad (1)$$

se ramène à l'équation linéaire très simple,

$$P_{n+1} = \frac{4n-6}{n} P_n. \quad (2)$$

Admettant donc la concordance de ces deux formules, je vais chercher à en déduire quelques conséquences.

I.

L'intégrale de l'équation (2) est

$$P_{n+1} = \frac{6}{3} \cdot \frac{10}{4} \cdot \frac{14}{5} \ldots \frac{4n-6}{n} P_3;$$

et comme, dans la question de géométrie qui conduit à ces deux équations, on a $P_3 = 1$, nous prendrons simplement

$$P_{n+1} = \frac{2.6.10.14\ldots(4n-6)}{2.3.4.5\ldots n}. \quad (3)$$

Le numérateur

$$2.6.10.14\ldots(4n-6) = 2^{n-1}.1.3.5.7\ldots(2n-3)$$
$$= \frac{2^{n-1}.1.2.3.4.5\ldots(2n-2)}{2.4.6.8\ldots(2n-2)} = \frac{1.2.3.4\ldots(2n-2)}{1.2.3\ldots(n-1)}.$$

Donc

$$P_{n+1} = \frac{n(n+1)(n+2)\ldots(2n-2)}{2.3.4\ldots n}. \quad (4)$$

Si l'on désigne généralement par $C_{m,p}$ le nombre des combinaisons de m lettres, prises p à p; et si l'on change n en $n+1$, on aura

$$P_{n+2} = \frac{1}{n+1} C_{2n,n}, \qquad (5)$$

ou bien

$$P_{n+2} = C_{2n,n} - C_{2n,n-1}. \qquad (6)$$

II.

Les équations (1) et (5) donnent ce théorème sur les combinaisons :

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{n+1} C_{2n,n} = \frac{1}{n} C_{2n-2,n-1} + \frac{1}{n-1} C_{2n-4,n-2} \times \frac{1}{2} C_{2,1} \\ &\quad + \frac{1}{n-2} C_{2n-6,n-3} \times \frac{1}{3} C_{4,2} + \ldots + \frac{1}{n} C_{2n-2,n-1}. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

III.

On sait que le $(n+1)^e$ nombre figuré de l'ordre $n+1$, a pour expression, $C_{2n,n}$: si donc, dans la table des nombres figurés, on prend ceux qui occupent la diagonale; savoir :

$$1,\quad 2,\quad 6,\quad 20,\quad 70,\quad 252,\quad 924\ldots;$$

qu'on les divise respectivement par

$$1,\quad 2,\quad 3,\quad 4,\quad 5,\quad 6,\quad 7\ldots;$$

on obtiendra une nouvelle suite de nombres,

$$1,\quad 1,\quad 2,\quad 5,\quad 14,\quad 42,\quad 132\ldots, \qquad (A)$$

lesquels jouiront de cette propriété :

Un terme quelconque de la suite (A) *est égal à la somme des produits que l'on obtient en écrivant au-dessous d'elle-même, et dans un ordre inverse, la série des termes précédents, et en multipliant les termes correspondants des deux séries.*

Par exemple,

$$132 = 1.42 + 1.14 + 2.5 + 5.2 + 14.1 + 42.1.$$

Les nombres qui composent cette suite, sont à commencer du second, les valeurs de P_3, P_4, ...

IV.

En mettant pour les quantités C, leurs valeurs dans l'équation (7), il vient

$$\frac{1}{n+1}\cdot\frac{2n}{1}\cdot\frac{2n-1}{2}\cdots\frac{n+1}{n}=\frac{1}{n}\cdot\frac{2n-2}{1}\cdot\frac{2n-3}{2}\cdots\frac{n}{n-1}+\frac{1}{n-1}\cdot\frac{2n-4}{1}\cdot\frac{2n-5}{2}\cdots\frac{n-1}{n-2}$$
$$\times\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{1}+\frac{1}{n-2}\cdot\frac{2n-6}{1}\cdots\frac{n-2}{n-3}\times\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{1}\cdot\frac{3}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\cdot\frac{2n-2}{1}\cdot\frac{2n-3}{2}\cdots\frac{n}{n-1}.$$

Et en multipliant les deux membres par $1.2.3\ldots n$:

$$\overline{2n}.\overline{2n-1}\ldots\overline{n+2}=\overline{2n-2}.\overline{2n-3}\ldots\overline{n}+\frac{n}{1}\overline{2n-4}\ldots\overline{n-1}\,.1+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\,\overline{2n-6}$$
$$\ldots\overline{n-2}\times 4+\frac{n}{1}\,\frac{n-1}{2}\,\frac{n-2}{3}\,.\overline{2n-8}\ldots\overline{n-3}\times 6.5+\ldots+\overline{2n-2}\ldots n \qquad (8)$$

Dans ce développement, le terme qui en a i avant lui, a pour expression,

$$T=\frac{n}{1}\,\frac{n-1}{2}\cdots\frac{n-i+1}{i}(2n-2i-2)(2n-2i-3)\ldots(n-i)\times 2i(2i-1)\ldots(i+2). \qquad (9)$$

Cette quantité peut s'exprimer à l'aide des fonctions Γ, dont la définition est, comme on sait,

$$\Gamma(p)=(p-1)\Gamma(p-1);$$

on a effectivement

$$T_i=\frac{n}{1}\,\frac{n-1}{2}\cdots\frac{n-i+1}{i}\,\frac{\Gamma(2n-2i-1)}{\Gamma(n-i)}\cdot\frac{\Gamma(2i+1)}{\Gamma(i+2)};$$

ou

$$T_i=\frac{n}{1}\,\frac{n-1}{2}\cdots\frac{n-i+1}{i}\,\frac{1}{(2n-2i-1)(2i+1)(i+1)}\,\frac{\Gamma(2n-2i)}{\Gamma(n-i)}\cdot\frac{\Gamma(2i+2)}{\Gamma(i+1)}.$$

A l'aide de la relation

$$\frac{\Gamma(2n)}{\Gamma(n)}=\frac{2^{2n-1}}{\sqrt{\pi}}\,\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right),$$

découverte par *Legendre*, nous transformerons les deux rapports

$$\frac{\Gamma(2n-2i)}{\Gamma(n-i)}, \quad \frac{\Gamma(2i+2)}{\Gamma(i+1)},$$

en

$$\frac{2^{2n-2i-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(n-i+\frac{1}{2}\right), \quad \frac{2^{2i+1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(i+\frac{3}{2}\right);$$

alors le terme général devient

$$T_i = \frac{n}{1}\frac{n-1}{2}\ldots\frac{n-i+1}{i}\frac{1}{(2n-2i-1)(2i+1)(i+1)}\cdot\frac{2^{2n}}{\pi}\Gamma\left(n-i+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(i+\frac{3}{2}\right);$$

ou enfin

$$T_i = \frac{n(n-1)\ldots(n-i+1)}{1.2.3\ldots i(i+1)}\cdot\frac{2^{2n-2}}{\pi}\Gamma\left(n-i-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(i+\frac{1}{2}\right). \quad (10)$$

Nous pouvons remplacer le produit des deux fonctions Γ par une intégrale eulérienne de première espèce, au moyen de la relation,

$$\frac{\Gamma(p).\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} = \int_0^1 \theta^{p-1}(1-\theta)^{q-1}d\theta;$$

et nous aurons

$$T_i = \frac{n(n-1)\ldots(n-i+1)}{1.2.3\ldots(i+1)}\cdot\frac{2^{2n-2}}{\pi}\Gamma(n).\int_0^1\theta^{n-i-\frac{3}{2}}(1-\theta)^{i-\frac{1}{2}}d\theta. \quad (11)$$

De même, si nous substituons au facteur

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-i+1)}{1.2.3\ldots(i+1)} = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(i+2)\Gamma(n-i+1)},$$

la quantité

$$\Gamma(n+1):\Gamma(n+3)\int_0^1\theta^{i+1}(1-\theta)^{n-i}d\theta;$$

nous obtiendrons finalement

$$T_i = \frac{2^{2n-2}}{\pi}\cdot\frac{\Gamma(n)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+3)}\frac{\int_0^1\theta^{n-i-\frac{3}{2}}(1-\theta)^{i-\frac{1}{2}}d\theta}{\int_0^1\theta^{n-i}(1-\theta)^{i+1}d\theta}, \quad (12)$$

Au moyen de cette valeur de T_i, l'équation (8) devient

$$\frac{\Gamma(2n+1)}{\Gamma(n+2)} = \frac{2^{2n-2}}{\pi}\,\frac{\Gamma(n)\,\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+3)} \sum_0^{n-1} \frac{\int_0^1 \theta^{n-i-\frac{3}{2}}(1-\theta)^{i-\frac{1}{2}}\,d\theta}{\int_0^1 \theta^{n-i}(1-\theta)^{i+1}\,d\theta},$$

ou

$$\frac{n+2}{2^{2n-2}}\,\pi = \int_0^1 \theta^{n-1}(1-\theta)^n d\theta \sum_0^{n-1} \frac{\int_0^1 \theta^{n-i-\frac{3}{2}}(1-\theta)^{i-\frac{1}{2}}\,d\theta}{\int_0^1 \theta^{n-i}(1-\theta)^{i+1}\,d\theta}, \qquad (13)$$

V.

Le terme général de notre développement peut se mettre sous une forme différente de (12). Nous pouvons écrire

$$T_i = \frac{2^{2n-2}}{\pi}\,\Gamma(n+1)\,\frac{\Gamma(n-i-\frac{1}{2})}{\Gamma(n-i+1)}\,\frac{\Gamma(i+\frac{1}{2})}{\Gamma(i+2)}.$$

Or

$$\frac{\Gamma(n-i-\frac{1}{2})}{\Gamma(n-i+1)} = \frac{\Gamma(n-i-\frac{1}{2})\,\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(n-i+1)} \times \frac{1}{\Gamma(\frac{3}{2})} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 \theta^{n-i-\frac{3}{2}}(1-\theta)^{\frac{1}{2}}\,d\theta,$$

et

$$\frac{\Gamma(i+\frac{1}{2})}{\Gamma(i+2)} = \frac{\Gamma(i+\frac{1}{2})\,\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(i+2)} \times \frac{1}{\Gamma(\frac{3}{2})} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 \theta^{i-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{\frac{1}{2}}\,d\theta,$$

donc

$$T_i = \frac{2^{2n}}{\pi^2}\int_0^1 \theta^{n-i-\frac{3}{2}}(1-\theta)^{\frac{1}{2}}\,d\theta \times \int_0^1 \theta^{i-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{\frac{1}{2}}\,d\theta. \qquad (14)$$

Les valeurs (12) et (14) devant être identiques, on aura

$$\int_0^1 \theta^{n-i-\frac{3}{2}}(1-\theta)^{i-\frac{1}{2}}\,d\theta = \frac{4}{\pi}\,n(n+1)(n+2)\int_0^1 \theta^{n-i}(1-\theta)^{i+1}\,d\theta$$
$$\times \int_0^1 \theta^{n-i-\frac{3}{2}}(1-\theta)^{\frac{1}{2}}\,d\theta \times \int_0^1 \theta^{i-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{\frac{1}{2}}\,d\theta. \qquad (15)$$

Si l'on suppose $i = 1$, il vient

$$\pi = 4n\,(n+1)(n+2)\int_0^1 \theta^{n-1}(1-\theta)^{2}\,d\theta \times \int_0^1 \theta^{\frac{1}{2}}(1-\theta)^{\frac{1}{2}}\,d\theta. \quad (16)$$

D'ailleurs, ces deux dernières relations se vérifient immédiatement.

En mettant pour T_1 sa nouvelle expression dans (8), cette équation devient

$$\frac{\Gamma(2n+1)}{\Gamma(n+2)} = \frac{2^{2n}}{\pi^2}\Gamma(n+1)\sum_0^{n-1}\int_0^1 \theta^{n-i-\frac{3}{2}}(1-\theta)^{\frac{1}{2}}\,d\theta \times \int_0^1 \theta^{i-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{\frac{1}{2}}\,d\theta.$$

Et à cause de

$$\frac{\Gamma(2n+1)}{\Gamma(n+1)} = 2\,\frac{\Gamma(2n)}{\Gamma(n)} = \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right);$$

puis de

$$\frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\Gamma(n+2)} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 \theta^{n-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{\frac{1}{2}}\,d\theta;$$

nous aurons enfin

$$2\pi\int_0^1 \theta^{n-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{\frac{1}{2}}\,d\theta = \sum_0^{n-1}\int_0^1 \theta^{n-i-\frac{3}{2}}(1-\theta)^{\frac{1}{2}}\,d\theta \times \int_0^1 \theta^{i-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{\frac{1}{2}}\,d\theta. \quad (17)$$

VI.

L'équation précédente exprime une propriété des fonctions Γ. Pour la mettre en évidence, remplaçons π par $2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$; puis chaque intégrale définie par sa valeur; il viendra

$$4\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\cdot\frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})\,\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(n+2)} = \sum_0^{n-1}\frac{\Gamma(n-i-\frac{1}{2})\,\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(n-i+1)}\cdot\frac{\Gamma(i+\frac{1}{2})\,\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(i+2)};$$

ou, en changeant n en $n-1$ et i en $i-1$:

$$\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(2)}\cdot\frac{\Gamma(n-\frac{1}{2})}{\Gamma(n+1)} = \frac{1}{4}\cdot\sum_1^{n-1}\frac{\Gamma(n-i-\frac{1}{2})}{\Gamma(n-i+1)}\cdot\frac{\Gamma(i-\frac{1}{2})}{\Gamma(i+1)}. \quad (18)$$

Ainsi, en posant

$$\frac{\Gamma(i-\frac{1}{2})}{\Gamma(i+1)} = A_i,$$

on a

$$A_1 . A_n = \frac{1}{4}\sum_1^{n-1} A_{n-i}A_i. \qquad (19)$$

Cette équation peut se mettre sous une forme plus simple. Pour cela, remarquons d'abord qu'en posant $i=0$, la fonction A_i devient $\frac{\Gamma(-\frac{1}{2})}{\Gamma(1)}$. Or, $\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{-\frac{1}{2}} = -2\sqrt{\pi}$, et $\Gamma(1)=1$. Si donc, après avoir chassé le dénominateur de l'équation précédente, nous ajoutons $2A_0A_n$ aux deux membres, nous obtiendrons

$$4A_1A_n - 4\sqrt{\pi}\,.\,A_n = \sum_0^n A_{n-i}A_i.$$

ou simplement, à cause de $A_1 = \sqrt{\pi}$:

$$\sum_0^n A_{n-i}A_i = 0 \qquad (20)$$

Autrement dit, l'équation aux différences finies

$$P_0P_n + P_1P_{n-1} + P_2P_{n-2} + \ldots + P_{n-1}P_1 + P_nP_0 = 0,$$

est satisfaite par $P_n = \frac{\Gamma(n-\frac{1}{2})}{\Gamma(n+1)}$, pourvu que l'on prenne $P_0 = -2\sqrt{\pi}$, $P_1 = \sqrt{\pi}$.

Il est d'ailleurs évident que cette équation n'a lieu qu'à partir de $n=2$.

Il suit aussi, de ce qui précède, que l'intégrale générale de l'équation

$$4P_1P_n = P_1P_{n-1} + P_2P_{n-2} + \ldots + P_{n-1}P_1, \qquad (21)$$

est

$$P_n = \frac{\Gamma(n-\frac{1}{2})}{\Gamma(n+1)}\cdot\frac{P_1}{\sqrt{\pi}}. \qquad (22)$$

VII.

Je terminerai cette note par la solution d'un problème qui a une liaison remarquable avec la question de Géométrie, traitée par M. *Lamé*.

Problème. *De combien de manières peut-on effectuer le produit de* n *facteurs différents.*

Désignons par Z_{n+1} ce nombre.

Supposons les n facteurs écrits dans l'ordre alphabétique,

$$abc\ldots.ghkl\ldots.qrs;$$

décomposons ce produit en deux groupes, l'un composé de i facteurs $abc\ldots gh$, l'autre composé des $n-i$ facteurs restants; désignons en outre par X_{n+1} le nombre de manières dont il est possible d'effectuer le produit ci-dessus, sans changer l'ordre des lettres : il est clair que l'un des éléments de cette somme sera $X_{i+1}X_{n-i+1}$. Et comme i peut varier depuis 1 jusqu'à $n-1$, nous aurons sans aucune *omission* ni *répétition :*

$$X_{n+1} = \sum_{0}^{n-1} X_{i+1}.X_{n-i+1}. \qquad (23)$$

On doit supposer $X_2 = 1$; d'ailleurs X_3 est aussi égal à 1 : il s'ensuit que l'équation (23) a la même intégrale que l'équation (1); savoir

$$X_{n+1} = P_{n+1}. \qquad (24)$$

Nous avons supposé que les n facteurs étaient disposés en ordre alphabétique : comme ils peuvent être pris dans un ordre quelconque, la quantité X_{n+1} doit être multipliée par le nombre des permutations de n lettres; donc

$$Z_{n+1} = P_{n+1}.\Gamma(n+1),$$

ou

$$Z_{n+1} = n(n+1)(n+2)\ldots(2n-2). \qquad (25)$$

Si, dans l'équation (23), nous mettons au lieu des X leurs valeurs en Z, nous trouverons après avoir multiplié tous les termes par $\Gamma(n+1)$:

$$Z_{n+1} = \frac{n}{1} Z_2 Z_n + \frac{n}{1}\frac{n-1}{2} Z_3 Z_{n-1} + \ldots + \frac{n}{1} Z_n Z_2, \qquad (26)$$

et comme la formule (25) donne

$$Z_{n+1} = (4n - 6) Z_n. \qquad (27)$$

Il s'ensuit que ces deux dernières équations rentrent l'une dans l'autre. Ce résultat, auquel il serait peut-être difficile d'arriver directement, est assez remarquable.

L'équation (26) devient, en mettant pour Z_{n+1} sa valeur $\frac{\Gamma(2n-1)}{\Gamma(n)}$:

$$\frac{\Gamma(2n-1)}{\Gamma(n)} = \frac{n}{1}\frac{\Gamma(1)}{\Gamma(1)} \cdot \frac{\Gamma(2n-3)}{\Gamma(n-1)} + \frac{n}{1}\frac{n-1}{2}\frac{\Gamma(3)}{\Gamma(2)} \cdot \frac{\Gamma(2n-5)}{\Gamma(n-2)} + \ldots + \frac{n}{1}\frac{\Gamma(2n-3)}{\Gamma(n-1)}.$$

A cause de

$$\frac{\Gamma(2n-1)}{\Gamma(n)} = \frac{(2n-2)\,\Gamma(2n-2)}{(n-1)\,\Gamma(n-1)} = 2\frac{\Gamma(2n-2)}{\Gamma(n-1)} = \frac{2^{2n-2}}{\sqrt{\pi}}\,\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right),$$

cette dernière équation se transforme facilement en

$$\left.\begin{aligned} 4\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-\tfrac{1}{2}\right) = \frac{n}{1}\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-\tfrac{3}{2}\right) + \frac{n}{1}\frac{n-1}{2}\Gamma\left(\tfrac{3}{2}\right)\Gamma\left(n-\tfrac{5}{2}\right) \\ + \ldots + \frac{n}{1}\Gamma\left(n-\tfrac{3}{2}\right)\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (28)$$

Celle-ci peut encore s'écrire

$$\left.\begin{aligned} 4n\int_c^1 \theta^{-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{n-\frac{1}{2}}d\theta = \frac{n+1}{1}\int_0^1 \theta^{-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{n-\frac{3}{2}}d\theta + \frac{n+1}{1}\frac{n}{2}\int_0^1 \theta^{-\frac{3}{2}}(1-\theta)^{n-\frac{1}{2}}d\theta \\ + \ldots + \frac{n+1}{1}\int_0^1 \theta^{n-\frac{3}{2}}(1-\theta)^{-\frac{1}{2}}\,d\theta. \end{aligned}\right\} \qquad (29)$$

Les équations (28) ou (29) expriment une propriété des fonctions Γ, analogue à celle qui a été donnée plus haut.