JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

OLINDE RODRIGUES

Sur le nombre de manières d'effectuer un produit de n facteurs

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 3 (1838), p. 549.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1838_1_3__549_0>

Sur le nombre de manières d'effectuer un produit de n facteurs;

Par M. Olinde RODRIGUES.

Soit P_n ce nombre; M. Catalan, dans le numéro précédent de ce Journal, a trouvé, sauf la notation

$$P_{n+1} = (4n - 2)P_n.$$

Il est arrivé à ce résultat indirectement, à l'aide des formules employées par M. Lamé, pour la décomposition d'un polygone en triangles. En voici la démonstration directe et élémentaire.

Remarquons d'abord que chaque manière d'effectuer le produit de n facteurs implique $n - 1$ multiplications, et maintenant cherchons P_{n+1}, connaissant P_n.

Or le $(n+1)^{ième}$ facteur introduit, ne peut se combiner avec les n facteurs donnés dans chaque système de multiplication conduisant au produit de ces n facteurs, que suivant deux modes différents, savoir: 1° comme multiplicateur ou multiplicande du produit déjà effectué, ce qui fournit $2P_n$ systèmes de multiplications des $n+1$ facteurs, ou bien 2° comme multiplicateur ou multiplicande de l'un des deux facteurs qui entrent dans chacune des $n - 1$ multiplications dont le système donne le produit de n facteurs, ce qui fournit $(4n - 4)P_n$ autres manières d'effectuer le produit de $(n+1)$ facteurs. On a donc

$$P_{n+1} = (4n - 2)P_n.$$
