JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

G. LAMÉ

Note sur des Intégrales définies déduites de la théorie des surfaces orthogonales

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 3 (1838), p. 552-555.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1838_1_3__552_0>

NOTE

Sur des Intégrales définies déduites de la théorie des surfaces orthogonales ;

Par G. LAMÉ,

Professeur à l'École Polytechnique.

L'étude des surfaces orthogonales me paraît de plus en plus féconde en applications. Les paramètres de ces surfaces, introduits en analyse comme système de coordonnées, permettent de résoudre des questions de Physique mathématique, et d'intégrer des équations aux différences partielles, qui seraient autrement inabordables. C'est du moins ce qui semble résulter des mémoires que j'ai présentés à l'Académie, sur les surfaces isothermes, sur les lois de l'équilibre du fluide éthéré, sur les coordonnées curvilignes en général, et de celui que je rédige actuellement sur les surfaces isostatiques dans les corps solides. Je me propose d'indiquer ici une application nouvelle, en démontrant, à l'aide des coordonnées curvilignes, une formule très générale, qui établit une relation entre certaines intégrales définies.

Soient ρ, ρ_1, ρ_2, les paramètres proprement dits d'un système de surfaces orthogonales; h, h_1, h_2, les paramètres différentiels du premier ordre de ces mêmes surfaces, ou les expressions

$$\sqrt{\left(\frac{d\rho}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\rho}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\rho}{dz}\right)^2},\ \sqrt{\left(\frac{d\rho_1}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\rho_1}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\rho_1}{dz}\right)^2},\ \sqrt{\left(\frac{d\rho_2}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\rho_2}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\rho_2}{dz}\right)^2};$$

ds, ds_1, ou ds_2, l'arc parcouru lorsqu'on passe normalement d'une surface ρ, ρ_1, ou ρ_2, à une autre surface de même espèce, infiniment voisine de la première. On aura

$$(1) \qquad ds = \frac{d\rho}{h}, \quad ds_1 = \frac{d\rho_1}{h_1}, \quad ds_2 = \frac{d\rho_2}{h_2}.$$

Nous supposerons qu'une partie au moins des surfaces ρ soient fermées, ou que chacune d'elles enveloppe un espace fini.

Imaginons qu'une masse solide homogène soit rapportée à ces surfaces orthogonales, et qu'elle éprouve une très petite dilatation, uniforme dans tous les sens. Si λ représente l'accroissement de la distance de deux molécules du corps, séparées primitivement par l'unité de longueur, il résulte de la théorie mathématique de l'élasticité que la dilatation cubique constante θ sera égale à 3λ.

Considérons en particulier une surface ρ fermée, et soit λR le déplacement normal, éprouvé par un de ses points m, lors de la dilatation générale. Le point m étant rapporté à des coordonnées rectilignes orthogonales, x, y, z, dont la surface ρ enveloppe l'origine O supposée fixe, et la distance $\overline{Om} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ étant représentée par r, le déplacement de m s'opérera sur Om, et sera égal à λr; ses projections sur les axes rectilignes seront λx, λy, λz; et enfin sa projection sur la normale à la surface ρ sera

$$(2) \qquad \lambda R = \lambda \frac{\left(x\frac{d\rho}{dx} + y\frac{d\rho}{dy} + z\frac{d\rho}{dz}\right)}{h},$$

puisque $\frac{1}{h}\frac{d\rho}{dx}$, $\frac{1}{h}\frac{d\rho}{dy}$, $\frac{1}{h}\frac{d\rho}{dz}$, sont les cosinus des angles que cette normale fait avec les axes des x, y, z. Or les surfaces orthogonales étant connues, il est toujours possible de déterminer x, y, z, $\frac{d\rho}{dx}$, $\frac{d\rho}{dy}$, $\frac{d\rho}{dz}$, h en fonction de ρ, ρ_1, ρ_2; R peut donc être regardé comme une fonction de ces mêmes paramètres.

Cela posé, l'espace parcouru par la surface ρ, ou qu'elle abandonne derrière elle, lors du déplacement général, s'obtiendra en intégrant la différentielle $[\lambda R ds_1 ds_2]$, et étendant l'intégrale à toute la surface ρ, ou à toutes les valeurs des paramètres ρ_1 et ρ_2. Mais cet espace doit être évidemment égal à la dilatation totale de l'espace enveloppé par la surface ρ, laquelle s'obtiendra en multipliant, par $\theta = 3\lambda$, le volume V de cet espace, ou l'intégale triple $\int\int\int ds ds_1 ds_2$, étendue aussi à toutes les valeurs de ρ_1 et ρ_2, et de plus aux valeurs du paramètre ρ inférieures à celle de la surface considérée.

On a donc essentiellement, en supprimant le facteur commun λ, et substituant à ds, ds_1, ds_2, leurs valeurs (1) :

$$(3) \qquad \int\int \frac{R d\rho_1 d\rho_2}{h_1 h_2} = 3V = 3\int\int\int \frac{d\rho d\rho_1 d\rho_2}{h h_1 h_2};$$

équation dans laquelle R, h, h_1, h_2, doivent être exprimés en ρ, ρ_1, ρ_2. Cette formule établit ainsi une relation nécessaire entre deux intégrales définies, l'une double et l'autre triple, dans un système quelconque de coordonnées curvilignes. Si le volume V, ou plutôt si l'intégrale triple $\int\int\int \frac{d\rho d\rho_1 d\rho_2}{h h_1 h_2}$ est connue, on en déduit immédiatement la valeur de l'intégrale double $\int\int \frac{R d\rho_1 d\rho_2}{h_1 h_2}$.

Pour donner une application de cette formule générale, prenons le système de surfaces orthogonales du second degré, comprises dans les équations :

$$(4) \quad \frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\rho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\rho^2 - c^2} = 1, \quad \frac{x^2}{\rho_1^2} + \frac{y^2}{\rho_1^2 - b^2} - \frac{z^2}{c^2 - \rho_1^2} = 1, \quad \frac{x^2}{\rho_2^2} - \frac{y^2}{b^2 - \rho_2^2} - \frac{z^2}{c^2 - \rho_2^2} = 1,$$

lesquelles représentent des ellipsoïdes (ρ), des hyperboloïdes à une nappe (ρ_1), et des hyperboloïdes à deux nappes (ρ_2), tous homofocaux. La constante b est moindre que c; les limites du paramètre ρ_2 sont zéro et b, celles de ρ_1, b et c; quant à ρ, sa limite inférieure est c. On a, par des calculs faciles, développés dans mon Mémoire sur les surfaces isothermes

$$(5) \quad h = \frac{\sqrt{\rho^2 - b^2}\sqrt{\rho^2 - c^2}}{\sqrt{\rho^2 - \rho_1^2}\sqrt{\rho^2 - \rho_2^2}}, \quad h_1 = \frac{\sqrt{\rho_1^2 - b^2}\sqrt{c^2 - \rho_1^2}}{\sqrt{\rho_1^2 - \rho_2^2}\sqrt{\rho^2 - \rho_1^2}}, \quad h_2 = \frac{\sqrt{b^2 - \rho_2^2}\sqrt{c^2 - \rho_2^2}}{\sqrt{\rho^2 - \rho_2^2}\sqrt{\rho_1^2 - \rho_2^2}}.$$

L'équation en ρ, (4), donne par la différentiation, en désignant l'expression

$$\left[\frac{x^2}{\rho^4} + \frac{y^2}{(\rho^2 - b^2)^2} + \frac{z^2}{(\rho^2 - c^2)^2}\right]$$

par φ,

$$\varphi\rho\frac{d\rho}{dx}=\frac{x}{\rho^{2}},\quad \varphi\rho\frac{d\rho}{dy}=\frac{y}{\rho^{2}-b^{2}},\quad \varphi\rho\frac{d\rho}{dz}=\frac{z}{\rho^{2}-c^{2}};$$

d'où l'on conclut facilement

$$\varphi\rho^{2}h^{2}=1,\quad \varphi\rho\left(x\frac{d\rho}{dx}+y\frac{d\rho}{dy}+z\frac{d\rho}{dz}\right)=1;$$

d'où enfin, par l'élimination de φ,

$$x\frac{d\rho}{dx}+y\frac{d\rho}{dy}+z\frac{d\rho}{dz}=\rho h^{2}. \tag{6}$$

Le volume V d'un ellipsoïde (ρ) est $\frac{4}{3}\pi\rho\sqrt{\rho^{2}-b^{2}}\sqrt{\rho^{2}-c^{2}}$. On a donc, en substituant la valeur (6) sous l'intégrale double de la formule (3), où R est l'expression (2), et observant que toutes les valeurs positives de ρ_1 et ρ_2, comprises entre leurs limites respectives, n'embrassent que la huitième partie de l'espace :

$$8\iint\frac{\rho_2}{h_1h_2}\,d\rho_1d\rho_2=4\rho\sqrt{\rho^{2}-b^{2}}\sqrt{\rho^{2}-c^{2}},$$

ou, en mettant les valeurs (5) de h, h_1, h_2, et réduisant

$$\int_b^c\int_0^b\frac{(\rho_1^2-\rho_2^2)\,d\rho_1d\rho_2}{\sqrt{\rho_1^2-b^2}\sqrt{c^2-\rho_1^2}\sqrt{b^2-\rho_2^2}\sqrt{c^2-\rho_2^2}}=\frac{\pi}{2}; \tag{7}$$

intégrale définie que j'ai déduite de la théorie des surfaces isothermes, que M. Poisson a vérifiée par les propriétés des transcendantes elliptiques, et dont M. Chasles a donné une démonstration géométrique, simplifiée depuis par M. Terquem.