

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

O. TERQUEM

Solution d'un Problème de combinaison

Journal de mathématiques pures et appliquées 1^{re} série, tome 3 (1838), p. 559-560.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1838_1_3_559_0

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

Solution d'un Problème de combinaison ;

PAR M. O. TERQUEM.

Ce problème, qui a été proposé par M. Stern (*), peut être énoncé de la manière suivante :

PROBLÈME. « Étant donnés les n nombres $1, 2, 3 \dots n-1, n$; si
 » on les permute n à n , on aura $[n]$ permutations; ce symbole désigne
 » le produit résultant de la multiplication de tous ces nombres; quel
 » est le nombre total des *dérangements* qui se rencontrent dans ces $[n]$
 » permutations ? »

Solution. Quand un nombre est suivi dans le même terme, *médiate-
 ment* ou *immédiatement*, d'un nombre plus petit que lui, on appelle
 cela un *dérangement*. C'est la définition de Cramer, telle qu'il la
 donne dans la belle règle qu'il a découverte, pour déterminer les
 signes des termes dans les formules générales relatives à la résolution
 des équations du 1^{er} degré (*Introduction à l'Analyse des lignes courbes
 algébriques*. Appendice, p. 658). Par exemple, le terme 321 renferme
 trois dérangements et 123 n'en a aucun. Soit donc γ_n le nombre total
 des dérangements pour les n nombres: prenons en plus le nombre
 $n+1$ plus grand que tous les précédents, et soit γ_{n+1} le nombre total
 des dérangements pour ces $n+1$ nombres; il s'agit de trouver une
 relation entre γ_{n+1} et γ_n ; à cet effet, faisons parcourir au nombre $n+1$
 les diverses positions qu'il peut occuper. En le plaçant à la gauche de
 tous les termes, il augmente évidemment chaque terme de n déran-
 gements; en le plaçant entre le premier et le second nombre, il intro-

(*) *Journal de M. Crelle*, tome 18, p. 100, année 1838.

duit dans chaque terme $n - 1$ nouveaux dérangements et ainsi de suite; dans la première position, le nombre des dérangements est donc $y_n + n[n]$; dans la seconde position, il est $y_n + (n - 1)[n]$; dans la troisième position, $y_n + (n - 2)[n]$, etc. Donc, on a

$$y_{n+1} = (n + 1)y_n + \frac{n(n+1)}{2}[n] = (n + 1)y_n + \frac{n}{2}[n + 1]. \quad (A)$$

Cette équation donne celle-ci :

$$y_{n+2} = (n + 2)y_{n+1} + \frac{n+1}{2}[n + 2].$$

Des deux équations réunies, on déduit

$$y_{n+2} = (n + 1)(n + 2)y_n + \frac{2n+1}{2}[n + 2];$$

de même

$$y_{n+3} = (n + 1)(n + 2)(n + 3)y_n + \frac{3n+3}{2}[n + 3],$$

et en général,

$$y_{n+p} = (n + 1)(n + 2) \dots (n + p)y_n + \frac{1}{2} \left[pn + \frac{p(p-1)}{2} \right] [n + p].$$

Faisant $n = 1$, on a $y_1 = 0$; donc

$$y_{p+1} = \frac{p(p+1)}{4}[p + 1].$$

Changeant $p + 1$ en n , on a enfin, pour le terme général,

$$y_n = \frac{n(n-1)}{4}[n]. \quad \text{C. Q. F. T.}$$