JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Premier mémoire sur la Théorie des Équations différentielles linéaires et sur le développement des Fonctions en séries

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 3 (1838), p. 561-614.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1838_1_3__561_0>

PREMIER MÉMOIRE

Sur la Théorie des Équations différentielles linéaires et sur le développement des Fonctions en séries ;

Par J. LIOUVILLE (*).

La plupart des problèmes de Physique mathématique conduisent à des équations différentielles partielles que l'on peut regarder comme linéaires au moins à une première approximation. Il s'agit d'intégrer ces équations et de satisfaire en même temps à certaines conditions définies relatives soit à quelques points singuliers du système matériel dont on s'occupe, soit à l'état initial des températures ou des vibrations de ses molécules. La méthode que les géomètres suivent ordinairement pour atteindre ce but consiste à représenter l'intégrale demandée par la somme d'un nombre infini d'intégrales particulières qui vérifient toutes les conoitions données, excepté celles relatives à l'état initial. Chacune des intégrales particulières dont nous parlons doit satisfaire à une équation différentielle ordinaire facile à trouver et dans laquelle entre un paramètre variable de l'une à l'autre. On a donc à résoudre deux questions bien distinctes, puisqu'il faut discuter d'abord l'équation différentielle à laquelle sont successivement soumises les intégrales particulières dont l'ensemble compose la valeur générale cherchée, puis traiter à son tour cette expression générale et déterminer les constantes arbitraires qu'elle contient encore, de manière à remplir les conditions définies négligées en premier lieu. Ces deux questions feront l'objet du présent Mémoire, où je les ai consi-

(*) Ce Mémoire a servi de texte à quelques-unes des leçons que j'ai faites cette année au Collége de France, comme suppléant de M. Biot.

dérées sous un point de vue purement analytique, abstraction faite de leur application à tel ou tel problème.

La théorie des équations différentielles est encore peu avancée malgré les nombreux travaux dont elle a été l'objet. Une équation linéaire à coefficients constants ou variables étant donnée, on peut toujours, il est vrai, en trouver l'intégrale exprimée par une série convergente; mais cette intégrale suffit rarement pour découvrir les propriétés et la marche de la fonction que l'équation différentielle détermine. En considérant la fonction dont nous parlons comme l'ordonnée d'une courbe et prenant pour abscisse la variable indépendante, il sera le plus souvent très difficile de reconnaître si, dans un intervalle donné, cette courbe coupe une ou plusieurs fois l'axe des abscisses, si elle le touche sans le couper, si elle a enfin des points de maximum ou de minimum ou des points d'inflexion. « Cependant la connaissance de » ces propriétés renferme celle des circonstances les plus remarquables » que peuvent offrir les nombreux phénomènes physiques ou dyna- » miques auxquels se rapportent les équations différentielles dont il » s'agit. » Une intégrale qui nous laisse ignorer ces propriétés intéressantes est d'une utilité bornée. Elle ne dispense nullement d'étudier en elle-même l'équation différentielle qui est plus simple et plus traitable. C'est en nous livrant à cette dernière étude que nous pouvons espérer d'arriver à des résultats précis et à des théorèmes généraux. La remarque que nous venons de faire serait vraie encore lors même que l'on parviendrait à obtenir sous forme finie l'intégrale de l'équation différentielle dont on s'occupe. C'est ainsi que la découverte d'une formule algébrique et générale propre à représenter les racines des équations déterminées n'ôterait rien à l'utilité des méthodes d'approximation, qui fournissent les valeurs numériques de ces racines, et des propositions remarquables dont l'ensemble forme ce qu'on nomme aujourd'hui la *théorie des équations*.

L'idée si simple d'étudier en elles-mêmes les équations différentielles que l'on rencontre dans chaque question, au lieu de s'attacher uniquement à la recherche de leur intégrale, a dû se présenter aux géomètres dès l'origine du calcul différentiel. Mais dans ces derniers temps elle a été surtout développée par M. Sturm qui, dans son beau Mémoire sur la théorie des équations différentielles linéaires du second ordre (*), en a tiré le parti le plus avantageux. Il y considère l'équation

$$L\frac{d^2V}{dx^2} + M\frac{dV}{dx} + NV = 0,$$

dans laquelle L, M, N sont des fonctions de x, et par une méthode très élégante il trouve successivement toutes les propriétés dont jouit la fonction V qui satisfait à cette équation. Ces propriétés sont analogues à celles des sinus ou des exponentielles. La même théorie fournit les moyens de calculer les racines de certaines équations transcendantes qui se présentent en analyse lorsqu'on veut par exemple déterminer les lois du mouvement de la chaleur dans une barre hétérogène.

« Le principe sur lequel reposent, dit M. Sturm, les théorèmes que » je développe, n'a jamais, si je ne me trompe, été employé en ana- » lyse, et il ne me paraît pas susceptible de s'étendre à d'autres » équations différentielles. »

L'auteur a eu raison, je crois, de n'énoncer qu'avec réserve cette dernière assertion. Il me serait facile en effet de prouver au contraire, et je prouverai dans un autre article, que la méthode de M. Sturm peut être employée utilement dans la théorie des équations différentielles du troisième ordre et d'ordre supérieur. Néanmoins, je dois l'avouer, cette extension offre des difficultés qui ne m'ont pas permis de l'opérer d'une manière tout-à-fait générale. Sans renoncer à l'espoir fondé de voir un jour renverser ces obstacles qui ne seront point sans doute insurmontables (surtout si M. Sturm reprend, pour la perfectionner et l'étendre à de nouvelles questions, une méthode qui dans ses mains s'est déjà montrée si féconde), j'ai donc eu recours à d'autres principes possédant le double avantage d'une extrême simplicité et d'une généralité très grande. Ces principes s'appliquent en effet à des équations différentielles linéaires d'un ordre quelconque, pourvu toutefois que les conditions définies à l'aide desquelles on détermine les constantes arbitraires implicitement contenues dans les intégrales de nos équations différentielles aient une forme convenable.

Dans ce premier Mémoire, je me borne à considérer les équations différentielles linéaires d'un ordre quelconque μ, qui peuvent se mettre sous la forme

(*) Tome I[er] de ce Journal, page 106.

$$\frac{d.\mathrm{K}d.\mathrm{L}\ldots d.\mathrm{M}d.\mathrm{N}d\mathrm{U}}{dx^{\mu}} + r\mathrm{U} = 0,$$

K, L,...M, N étant des fonctions positives de x, et r un paramètre indépendant de cette variable. De plus j'admets que pour une valeur particulière x de x, les quantités

$$\mathrm{U}, \quad \frac{\mathrm{N}d\mathrm{U}}{dx}, \quad \frac{\mathrm{M}d.\mathrm{N}d\mathrm{U}}{dx^2}, \ldots\ldots \frac{\mathrm{K}d.\mathrm{L}\ldots.d.\mathrm{N}d\mathrm{U}}{dx^{\mu-1}}$$

sont égales à des constantes positives. Ces conditions laissent encore le paramètre r indéterminé. Mais on déterminera ce paramètre à l'aide d'une nouvelle équation, si l'on exige par exemple que U se réduise à zéro pour une certaine valeur X de x, X étant $>$ x.

Je prouve que les racines de l'équation transcendante dont le paramètre r dépend alors sont en nombre infini, toutes réelles, positives et inégales. Chacune d'elles donne naissance à une fonction particulière U. La première de ces fonctions, celle qui répond à la plus petite racine, conserve constamment le même signe lorsque x croît depuis x jusqu'à X. Celle qui répond à la $n^{ième}$ racine s'évanouit et change de signe $(n-1)$ fois dans le même intervalle. Deux de ces fonctions correspondantes à deux racines consécutives changent toujours de signe l'une après l'autre alternativement; celle qui répond à la plus grande racine s'évanouit la première à partir de $x =$ x. En un mot on retrouve ici, comme dans l'équation du second ordre traitée par M. Sturm, des propriétés analogues à celles des sinus d'arcs multiples d'une même variable.

Dans un Mémoire présenté à l'Académie le 30 novembre 1835 et imprimé tome I^{er} de ce Journal, page 253, j'ai montré, je crois, le premier quelle liaison intime existe entre les propriétés des intégrales des équations linéaires du second ordre et le développement des fonctions en séries. On verra clairement dans ce nouveau Mémoire que les théorèmes auxquels je suis parvenu subsistent quel que soit l'ordre des équations différentielles que l'on considère. C'est le résultat principal que j'annonçais il y a quelques mois (*), en donnant

(*) Voyez page 255 de ce volume.

une indication succincte, mais assez précise, de mes nouvelles recherches.

Ces recherches prendront une extension très grande dans les Mémoires que je publierai par la suite. Dans ce premier travail, je dois le dire, j'ai cherché surtout la rigueur et la simplicité.

J'ai supprimé tous les détails qui m'ont paru n'avoir qu'une importance secondaire, ou qui ne se rattachaient pas d'une manière très directe au fond du sujet. Je n'ai jamais prouvé de deux manières les théorèmes qu'une seule démonstration établissait avec assez de clarté. Enfin parmi toutes les formes dont une démonstration était susceptible, j'ai constamment préféré celle qui se rapprochait le plus des méthodes connues.

§ I.

1. Soient x une variable indépendante qui peut croître depuis x jusqu'à X; K, $\mathrm{L}, \ldots \mathrm{M}$, N des fonctions de x positives et continues; r un paramètre indéterminé; et U une fonction de x et de r satisfaisant à l'équation

$$(1)\qquad \frac{d.\mathrm{K}d.\mathrm{L}\ldots d\mathrm{M}d.\mathrm{N}d\mathrm{U}}{dx^{\mu}} + r\mathrm{U} = 0.$$

L'intégrale de l'équation (1) renfermera μ constantes arbitraires que l'on déterminera en se donnant les valeurs des μ quantités

$$\mathrm{U},\quad \frac{\mathrm{N}d\mathrm{U}}{dx},\quad \frac{\mathrm{M}d.\mathrm{N}d\mathrm{U}}{dx^{2}},\ldots\quad \frac{\mathrm{K}d.\mathrm{L}\ldots d.\mathrm{M}d.\mathrm{N}d\mathrm{U}}{dx^{\mu-1}}$$

pour $x = \mathrm{x}$: nous désignerons ces valeurs par A, B, $\mathrm{C}, \ldots \mathrm{D}$, et nous poserons

$$(2)\quad \mathrm{U} = \mathrm{A},\quad \frac{\mathrm{N}d\mathrm{U}}{dx} = \mathrm{B},\ldots\ldots \frac{\mathrm{K}d.\mathrm{L}\ldots d.\mathrm{N}d\mathrm{U}}{dx^{\mu-1}} = \mathrm{D} \text{ pour } x = \mathrm{x} :$$

de plus, nous admettrons toujours que A, B, $\mathrm{C}, \ldots \mathrm{D}$ sont des quantités indépendantes de r, positives ou nulles, mais non pas toutes nulles à la fois. De cette manière, U sera une fonction de x et de r qui ne contiendra plus rien d'inconnu, et que nous représenterons par

$U(x)$ ou par $U(x, r)$ quand nous voudrons mettre en évidence la variable x ou les variables x et r.

Si l'on a $\mu=2$, l'équation (1) est du second ordre seulement, et U doit satisfaire d'une part à l'équation indéfinie,

$$(3) \qquad \frac{d.\mathrm{K}d\,\mathrm{U}}{dx^2} + r\mathrm{U} = 0,$$

et d'autre part aux conditions définies

$$(4) \qquad \mathrm{U} = \mathrm{A}, \quad \frac{\mathrm{K}d\mathrm{U}}{dx} = \mathrm{B} \text{ pour } x = \mathrm{x}.$$

Si l'on pose $\mu=5$, l'équation (1) est du troisième ordre, et U doit satisfaire à l'équation indéfinie

$$(5) \qquad \frac{d.\mathrm{K}d.\mathrm{L}d\mathrm{U}}{dx^3} + r\mathrm{U} = 0,$$

et aux conditions définies

$$(6) \qquad \mathrm{U} = \mathrm{A}, \quad \frac{\mathrm{L}d\mathrm{U}}{dx} = \mathrm{B}, \quad \frac{\mathrm{K}d.\mathrm{L}d\mathrm{U}}{dx^2} = \mathrm{C} \quad \text{pour } x = \mathrm{x}.$$

Nous répétons une fois pour toutes que la variable x reste constamment comprise entre deux limites x, X : x est la plus petite valeur de x ; X est une autre valeur déterminée quelconque : les valeurs des fonctions K, L,... M, N sont supposées essentiellement > 0 ; ces fonctions ne s'évanouissent donc jamais : les nombres A, B, etc. sont aussi supposés positifs ; toutefois notre analyse subsisterait encore si quelques-uns d'entre eux se réduisaient à zéro.

La fonction U qui satisfait à l'équation linéaire (1) et aux conditions définies (2) jouit de propriétés très générales et très remarquables. L'étude de ces propriétés est l'objet principal du présent Mémoire.

2. On peut développer U en une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de r. Pour fixer les idées, admettons que l'on ait $\mu = 2$ et posons

$$\varphi_0 = \mathrm{A} + \mathrm{B}\int_{\mathrm{x}}^{x} \frac{dx}{\mathrm{K}},$$

puis en général,

$$\varphi_n = \int_{\mathrm{x}}^{x} \frac{dx}{\mathrm{K}} \int_{\mathrm{x}}^{x} \varphi_{n-1}\, dx,$$

d'où résultera immédiatement

$$\varphi_n = \int_{\mathrm{x}}^{x} \frac{dx}{\mathrm{K}} \int_{\mathrm{x}}^{x} dx \ldots\ldots \int_{\mathrm{x}}^{x} \frac{dx}{\mathrm{K}} \int_{\mathrm{x}}^{x} \varphi_0\, dx$$

expression où le signe $\int$ entre $2n$ fois. Il est aisé de voir qu'en prenant

$$\mathrm{U} = \varphi_0 - r\varphi_1 + r^2\varphi_2 - r^3\varphi_3 + \ldots,$$

on satisfera à l'équation indéfinie (3) et aux conditions définies (4).

Représentons par α la plus petite valeur que K puisse prendre lorsque x croît de x à X : on augmentera évidemment la valeur de φ_0 si l'on y remplace K par α et x par X; en faisant

$$\mathrm{A} + \frac{\mathrm{B}}{\alpha}(\mathrm{X} - \mathrm{x}) = \varphi,$$

on aura donc $\varphi_0 < \varphi$. Maintenant dans l'expression générale de φ_n et dans celle de $\frac{d\varphi_n}{dx}$ qui s'en déduit par la différentiation, écrivez partout α au lieu de K, φ au lieu de φ_0, et vous trouverez

$$\varphi_n < \frac{(x-\mathrm{x})^{2n}.\varphi}{1.2.3\ldots 2n.\alpha^n}, \quad \frac{d\varphi_n}{dx} < \frac{(x-\mathrm{x})^{2n-1}.\varphi}{1.2.3\ldots(2n-1)\alpha^n}.$$

Les séries

$$\begin{gathered} \varphi_0 - r\varphi_1 + r^2\varphi_2 - r^3\varphi_3 + \ldots, \\ \frac{\mathrm{K}d\varphi_0}{dx} - r\frac{\mathrm{K}d\varphi_1}{dx} + r^2\frac{\mathrm{K}d\varphi_2}{dx} - \ldots, \\ - r\varphi_0 + r^2\varphi_1 - r^3\varphi_2 + \ldots, \end{gathered}$$

qui représentent respectivement les valeurs de

$$\mathrm{U}, \quad \frac{\mathrm{K}d\mathrm{U}}{dx}, \quad \frac{d.\mathrm{K}d\mathrm{U}}{dx^2} \quad \text{ou} \quad -r\mathrm{U},$$

sont donc convergentes, et il en est de même de leurs dérivées d'un ordre quelconque prises par rapport à r. De là il suit que les dérivées soit par rapport à x, soit par rapport à r, des deux quantités

$$\mathrm{U}, \quad \frac{\mathrm{K}d\mathrm{U}}{dx}$$

ont des valeurs finies exprimées par des séries convergentes : donc ces quantités elles-mêmes sont fonctions continues de x et de r : par suite la quantité

$$\frac{d.\mathrm{K}d\mathrm{U}}{dx^2} \quad \text{ou} \quad -r\mathrm{U}$$

est aussi fonction continue de ces deux variables.

3. On trouve par une méthode semblable l'intégrale complète de l'équation (1) exprimée en série convergente sous la forme

$$\mathrm{U} = \varphi_0 - r\varphi_1 + r^2\varphi_2 - r^3\varphi_3 + \ldots,$$

et l'on démontre que les quantités

$$\mathrm{U}, \quad \frac{\mathrm{N}d\mathrm{U}}{dx}, \quad \frac{\mathrm{M}d.\mathrm{N}d\mathrm{U}}{dx^2}, \ldots. \quad \frac{d.\mathrm{K}d.\mathrm{L}\ldots d.\mathrm{N}d\mathrm{U}}{dx^\mu},$$

et leurs dérivées d'un ordre quelconque, prises par rapport à r, sont des fonctions continues de x et de r. Le premier terme φ_0 s'obtient en intégrant l'équation

$$\frac{d.\mathrm{K}d.\mathrm{L}\ldots. d.\mathrm{M}d.\mathrm{N}d\varphi_0}{dx^\mu} = 0,$$

et en déterminant les constantes arbitraires à l'aide des conditions

$$\varphi_0 = \mathrm{A}, \quad \frac{\mathrm{N}d\varphi}{dx} = \mathrm{B}, \ldots.. \frac{\mathrm{K}d.\mathrm{L}\ldots d.\mathrm{N}d\varphi_0}{dx^{\mu-1}} = \mathrm{D} \ \text{pour} \ x = \mathrm{x},$$

de telle sorte que l'on transporte à ce terme φ_0 toutes les conditions définies auxquelles la fonction U doit satisfaire. Ensuite on prend généralement

$$\varphi_n = \int_{\mathrm{x}}^{x} \frac{dx}{\mathrm{N}} \int_{\mathrm{x}}^{x} \frac{dx}{\mathrm{M}} \cdots. \int_{\mathrm{x}}^{x} \frac{dx}{\mathrm{K}} \int_{\mathrm{x}}^{x} \varphi_{n-1} dx.$$

Les coefficients $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$ de la série

$$U = \varphi_0 - r\varphi_1 + r^2\varphi_2 - \ldots.$$

sont donc positifs et d'autant plus grands que les valeurs des fonctions $K, \ldots M, N$ sont elles-mêmes plus petites : ils ne pourraient se réduire à zéro que si toutes les quantités $A, B, \ldots D$ étaient nulles. En excluant ce cas particulier, on voit que la fonction U ne devient identiquement nulle pour aucune valeur déterminée de r, tant que x reste indéterminée.

Quand le paramètre r est égal à zéro, U se réduit à φ_0, quantité essentiellement > 0 : dans ce cas U ne peut s'annuler pour aucune valeur de x comprise entre x et X : il en est de même *à fortiori* quand le paramètre r est négatif.

On peut observer enfin que les quantités

$$\varphi_n, \quad \frac{Nd\varphi_n}{dx}, \quad \frac{Md.Nd\varphi_n}{dx^2}, \ldots \frac{Kd.L\ldots d.Nd\varphi_n}{dx^{\mu-1}}$$

étant > 0, si l'on désigne par $a, b, \ldots c$ des coefficients positifs, et si l'on égale à zéro la somme

$$aU + b\,\frac{NdU}{dx} + \ldots + c\,\frac{Kd.L\ldots d.NdU}{dx^{\mu-1}},$$

après avoir donné à x une valeur déterminée $>$ x, l'équation ainsi formée ne sera satisfaite par aucune racine r négative ou nulle.

§ II.

4. Études maintenant avec un peu plus de détail la marche de la fonction U.

Lorsqu'on suppose le paramètre r négatif, les quantités φ_n, $\frac{Nd\varphi_n}{dx}$, etc., et par suite

$$U, \quad \frac{NdU}{dx}, \quad \frac{Md.NdU}{dx^2}, \ldots \frac{Kd.L\ldots d.NdU}{dx^{\mu-1}},$$

sont positives : ce sont même des fonctions croissantes de x puisque leurs dérivées sont aussi positives. La courbe dont l'équation est $y = U$ ne présente alors dans son cours rien de remarquable : elle ne coupe nulle part l'axe des x et n'a aucune tangente parallèle à cet axe.

Quand le paramètre r est positif, la courbe représentée par l'équation $y = U$ peut au contraire offrir des sinuosités, devenir parallèle à l'axe de x, couper cet axe une ou plusieurs fois. On s'en convaincra en considérant d'abord le cas où les coefficients K, L,...M, N sont constants dans l'équation (1).

5. Pour fixer les idées, supposons que l'équation (1) soit du troisième ordre seulement, en sorte que la fonction U doive satisfaire à l'équation indéfinie (5) et aux conditions définies (6). Remplaçons K, L par des constantes positives α, β, et U par u. L'équation (5) deviendra

$$(7) \qquad \alpha\beta \frac{d^3u}{dx^3} + ru = 0,$$

et les conditions définies servant à la détermination des constantes arbitraires seront

$$(8) \qquad u = A, \quad \beta \frac{du}{dx} = B, \quad \alpha\beta \frac{d^2u}{dx^2} = C \text{ pour } x = \mathrm{x}.$$

Si l'on pose

$$\frac{1}{\alpha\beta} = \omega^3, \quad r = \rho^3, \quad x - \mathrm{x} = z,$$

l'intégrale de l'équation (7), exprimée sous forme finie, sera

$$u = C_1 e^{-\omega\rho z} + C_2 e^{-\mu\omega\rho z} + C_3 e^{-\mu^2\omega\rho z},$$

C_1, C_2, C_3 étant des constantes arbitraires, et μ, μ^2 les racines cubiques imaginaires de l'unité. On déterminera les constantes C_1, C_2, C_3 à l'aide des conditions (8) qui donnent

$$C_1 + C_2 + C_3 = A,$$
$$C_1 + C_2\mu + C_3\mu^2 = -\frac{B}{\beta\omega\rho},$$
$$C_1 + C_2\mu^2 + C_3\mu = \frac{C}{\alpha\beta\omega^2\rho^2},$$

équations faciles à résoudre et desquelles on tire

$$C_1 = \frac{A}{3} - \frac{B}{3\beta\omega\rho} + \frac{C}{3\alpha\beta\omega^2\rho^2},$$
$$C_2 = \frac{A}{3} - \frac{B\mu^2}{3\beta\omega\rho} + \frac{C\mu}{3\alpha\beta\omega^2\rho^2},$$
$$C_3 = \frac{A}{3} - \frac{B\mu}{3\beta\omega\rho} + \frac{C\mu^2}{3\alpha\beta\omega^2\rho^2}.$$

Donc, si l'on pose

$$\frac{A}{3}\left(e^{-\omega\rho z} + e^{-\mu\omega\rho z} + e^{-\mu^2\omega\rho z}\right) = F(\rho z),$$
$$\frac{B}{3\beta\omega}\left(e^{-\omega\rho z} + \mu^2 e^{-\mu\omega\rho z} + \mu e^{-\mu^2\omega\rho z}\right) = F_1(\rho z),$$
$$\frac{C}{3\alpha\beta\omega^2}\left(e^{-\omega\rho z} + \mu e^{-\mu\omega\rho z} + \mu^2 e^{-\mu^2\omega\rho z}\right) = F_2(\rho z),$$

on aura

$$u = F(\rho z) - \frac{1}{\rho} F_1(\rho z) + \frac{1}{\rho^2} F_2(\rho z).$$

Cette valeur de u est fonction continue des constantes α, β, ω : elle se simplifie beaucoup quand ρ est très grand, et peut servir à démontrer qu'alors il existe un très grand nombre de racines x ou z de l'équation $u=0$: le nombre de ces racines devient même infini lorsque $\rho=\infty$, et cela a lieu non-seulement quand on considère les valeurs de z comprises entre les limites $z=0$, $z=X-x$ qui répondent à $x=x$, $x=X$, mais même quand on se borne à considérer les valeurs de z comprises dans un très petit intervalle à partir de $z=0$. C'est ce que nous allons expliquer.

6. *Posons* $\rho\xi=\theta$, θ *étant une quantité aussi grande qu'on voudra, mais que nous regarderons comme restant invariable lorsque* ρ *croît de plus en plus. La valeur de* ξ, *savoir* $\xi=\frac{\theta}{\rho}$, *finira donc par être très petite. Or, si l'on prend le paramètre* ρ *extrêmement grand, et si l'on se borne aux racines* z *de l'équation* $u=0$ *qui sont comprises entre les limites* $z=\xi$, $z=2\xi$, *je dis que le nombre de ces racines sera d'autant plus grand que la valeur arbitraire de* θ *aura été choisie plus considérable, en sorte qu'on pourra toujours le rendre supérieur à un nombre entier donné d'avance.*

Puisque les fonctions $F(\rho z)$, $F_1(\rho z)$, $F_2(\rho z)$ ne contiennent que le produit ρz, posons

$$\rho z = t:$$

t sera une inconnue comprise entre deux limites fixes et très grandes θ, 2θ, et l'on aura

$$(9) \qquad u = F(t) - \frac{1}{\rho} F_1(t) + \frac{1}{\rho^2} F_2(t).$$

Maintenant attribuons à ρ une valeur infiniment grande : les deux quantités

$$\frac{1}{\rho} F_1(t), \quad \frac{1}{\rho^2} F_2(t)$$

deviendront infiniment petites. Le premier terme $\frac{A}{3} e^{-\alpha t}$ de $F(t)$ est aussi très petit puisqu'on suppose très grande la limite inférieure θ de t: quant aux deux autres termes de $F(t)$, il suffira de remplacer μ et μ^2 par leurs valeurs

$$\frac{-1+\sqrt{3}\sqrt{-1}}{2}, \quad \frac{-1-\sqrt{3}\sqrt{-1}}{2},$$

pour leur donner la forme

$$\frac{2A}{3} e^{\frac{\alpha t}{2}} \cos\left(\frac{\alpha t\sqrt{3}}{2}\right).$$

Donc quand ρ devient infiniment grand, la valeur fixe de θ étant aussi infiniment grande, l'équation $u=0$ se réduit à

$$(10) \qquad \cos\left(\frac{\alpha t\sqrt{3}}{2}\right) = \varepsilon,$$

ε désignant un infiniment petit.

Les mots infiniment petit, infiniment grand, sont employés ici uniquement pour abréger. Il n'est pas nécessaire en effet que le second membre ε demeure infiniment petit dans toute l'étendue des valeurs de t, c'est-à-dire depuis $t=\theta$ jusqu'à $t=2\theta$: il suffit que dans cet intervalle on ait constamment $\varepsilon^2 < 1$. Cela étant, si l'on désigne par m le nombre entier immédiatement supérieur à $\frac{\omega\theta\sqrt{3}}{2\pi}$, et par $(m+i)$ le nombre entier immédiatement inférieur à $\frac{\omega\theta\sqrt{3}}{\pi}$: donc l'on donne à t les valeurs successives

$$t = \frac{2m\pi}{\omega\sqrt{3}}, \quad t = \frac{2(m+1)\pi}{\omega\sqrt{3}}, \ldots . t = \frac{2(m+i)\pi}{\omega\sqrt{3}},$$

pour lesquelles la valeur de $\cos\left(\frac{\omega t\sqrt{3}}{2}\right)$ devient successivement.... $+1$, -1, il est clair qu'elles rendront la différence

$$\cos\left(\frac{\omega t\sqrt{3}}{2}\right) - \varepsilon,$$

aussi alternativement positive et négative, en sorte que de l'une d'elles à la suivante il y a au moins une racine de l'équation $u = 0$. Par suite entre les limites

$$t = \frac{2m\pi}{\omega\sqrt{3}}, \quad t = \frac{2(m+i)\pi}{\omega\sqrt{3}},$$

il y a au moins i racines de cette équation. Ce nombre i est d'ailleurs infiniment grand quand la valeur attribuée à θ est infiniment grande. De là résulte la démonstration du théorème énoncé; car à chaque valeur de t qui annule u répond une valeur de z comprise entre ξ et 2ξ.

7. On étendra notre théorème à la fonction U et à l'équation (5) dans laquelle les coefficients K, L sont variables, si l'on fait voir que la variabilité de ces coefficients, quand le paramètre ρ est très considérable, n'altère la valeur de u et par suite le second membre de l'équation (10), que d'une quantité très petite que l'on peut confondre dans ε et qui ne change rien aux raisonnements précédents.

Admettons que les constantes α, β représentent les plus grandes valeurs des fonctions K, L dans l'intervalle compris depuis $z=0$ jusqu'à $z=2\xi$; soient α', β' d'autres constantes représentant les plus petites valeurs de ces fonctions dans le même intervalle : si la valeur de ξ est infiniment petite, les différences $\alpha'-\alpha$, $\beta'-\beta$ seront aussi infiniment petites. La valeur exacte de U est

$$U = \varphi_0 - r\varphi_1 + r^2\varphi_2 - r^3\varphi_3 + \ldots . . ,$$

$\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \ldots$ conservant la signification qu'on leur a attribuée n° 3. Désignons par φ'_n, φ''_n les deux valeurs que prend φ_n lorsqu'on y remplace K, L d'abord par α, β, et ensuite par α', β'; il est aisé de voir que l'on aura

$$\varphi_n > \varphi'_n \quad \text{et} \quad \varphi_n < \varphi''_n.$$

Donc l'erreur que l'on commet en prenant φ'_n pour valeur de φ_n est plus petite que $\varphi''_n - \varphi'_n$. L'erreur totale commise en remplaçant la série

$$\varphi_0 - r\varphi_1 + r^2\varphi_2 - \text{etc.}$$

par la série

$$\varphi'_0 - r\varphi'_1 + r^2\varphi'_2 - \text{etc.},$$

est donc inférieure à la somme

$$\varphi''_0 - \varphi'_0 + r(\varphi''_1 - \varphi'_1) + r^2(\varphi''_2 - \varphi'_2) + \ldots,$$

dans laquelle on a pris tous les termes positivement, tandis que dans l'expression de U ces termes sont alternativement positifs et négatifs.

La somme

$$\varphi''_0 - \varphi'_0 + r(\varphi''_1 - \varphi'_1) + r^2(\varphi''_2 - \varphi'_2) + \ldots$$

représente ainsi une limite supérieure de l'erreur que l'on commet dans l'évaluation de U lorsque l'on remplace les fonctions variables K, L par les constantes α, β; et tout se réduit à prouver qu'elle devient infiniment petite en même temps que l'intervalle ξ. Or si l'on pose

$$u'' = \varphi''_0 + r\varphi''_1 + r^2\varphi''_2 + \text{etc.}, \quad u' = \varphi'_0 + r\varphi'_1 + r^2\varphi'_2 + \text{etc.},$$

cette somme est exprimée par $u'' - u'$. La série

$$\varphi'_0 - r\varphi'_1 + r^2\varphi'_2 - \text{etc.}$$

n'est autre chose que le développement de la fonction u des n^{os} 5 et 6. Donc u' se déduira de u en y remplaçant r par $-r$. Supposons que par ce changement les fonctions $F(t)$, $F_1(t)$, $F_2(t)$ deviennent $f(t)$, $f_1(t)$, $f_2(t)$; on aura

$$u' = f(t) - \frac{1}{\rho}f_1(t) + \frac{1}{\rho^2}f_2(t).$$

Pour passer de u' à u'' il suffira d'augmenter maintenant les constantes α, β des différences infiniment petites $\alpha' - \alpha$, $\beta' - \beta$: donc puisque u' est une fonction continue de ces constantes, la différence $u'' - u'$ sera aussi infiniment petite, ce qu'il fallait démontrer.

8. La démonstration dont nous venons de faire usage pour prouver que les racines x de l'équation $\mathrm{U} = 0$ sont en nombre infini quand le paramètre r est infiniment grand, n'est pas bornée aux équations différentielles du troisième ordre que nous avons spécialement considérées. Voici comment on peut l'exposer en peu de mots pour l'équation générale (1) sans entrer toutefois dans le détail des calculs.

Posons, comme ci-dessus, $x - \mathrm{x} = z$, $\rho\xi = \theta$, et bornons-nous aux valeurs de z comprises entre ξ et 2ξ : nous regardons θ comme un nombre très grand en lui-même, mais très petit par rapport à ρ ; les valeurs de z seront donc toujours très petites, et par suite les fonctions K, L,...N seront sensiblement constantes : en faisant $\mathrm{K} = \alpha$, $\mathrm{L} = \beta, \ldots \mathrm{N} = \gamma$, où α, $\beta, \ldots \gamma$ désignent des constantes convenables, on altérera très peu la valeur de U ainsi que les valeurs des racines de l'équation $\mathrm{U} = 0$. En posant donc

$$\frac{1}{\alpha\beta\ldots\gamma} = \omega^{\mu}, \quad r = \rho^{\mu}, \quad \rho z = t,$$

l'équation qui détermine la valeur de U simplifiée sera

$$\frac{d^{\mu}\mathrm{U}}{dt^{\mu}} + \omega^{\mu}\mathrm{U} = 0,$$

et les conditions définies qu'il faudra y joindre prendront la forme

$$\mathrm{U} = \mathrm{A}, \quad \gamma\frac{d\mathrm{U}}{dt} = \frac{\mathrm{B}}{\rho}, \text{ etc.} \quad \text{pour} \quad t = 0.$$

Or si l'on intègre cette équation, et qu'après avoir déterminé les constantes arbitraires, on néglige les termes infiniment petits divisés par ρ, on a simplement

$$\mathrm{U} = \frac{\mathrm{A}}{\mu}\left(e^{\nu_1\omega t} + e^{\nu_2\omega t} + \ldots + e^{\nu_{\mu}\omega t}\right),$$

ν_1, $\nu_2, \ldots \nu_{\mu}$ étant les racines de l'équation binome $\nu^{\mu} + 1 = 0$. Il reste à discuter l'équation

$$e^{\nu_1 \omega t} + e^{\nu_2 \omega t} + \ldots + e^{\nu_\mu \omega t} = 0,$$

dans laquelle on considère seulement les valeurs de t comprises entre deux nombres très grands θ, 2θ. A cet effet, désignons par $p + q\sqrt{-1}$, $p - q\sqrt{-1}$ les deux valeurs de ν dont la partie réelle est la plus grande. Si l'on multiplie tous les termes de l'équation

$$e^{\nu_1 \omega t} + e^{\nu_2 \omega t} + \ldots + e^{\nu_\mu \omega t} = 0$$

par $e^{-p\omega t}$, on rendra très petit le module de toutes les exponentielles qui répondent à des racines ν différentes des deux racines $p \pm q\sqrt{-1}$ dont nous venons de parler; en sorte que ce premier membre deviendra à très peu près

$$2\cos(q\omega t).$$

C'est donc à l'équation

$$\cos(q\omega t) = 0,$$

ou plus exactement à l'équation

$$\cos(q\omega t) = \varepsilon,$$

ε étant un infiniment petit, que se réduit en définitive l'équation $U = 0$. Or, le nombre des valeurs de t, comprises entre θ et 2θ, pour lesquelles $\cos(q\omega t)$ s'annule est d'autant plus grand que la limite 2θ est plus grande et devient infini pour $\theta = \infty$: donc il en est de même du nombre des racines de l'équation $U = 0$, ce qu'il fallait démontrer.

§ III.

9. Les racines x, plus grandes que x, de l'équation $U = 0$ et des équations dérivées

$$\frac{NdU}{dx} = 0, \quad \frac{Md.NdU}{dx^2} = 0, \ldots \frac{Kd.L\ldots d.NdU}{dx^{\mu-1}} = 0,$$

sont nécessairement inégales. Pour le prouver et pour démontrer en même temps plusieurs propriétés intéressantes de ces racines, faisons croître x d'une manière continue, à partir de $x = \mathrm{x}$, et considérons la suite des signes des quantités

$$(11) \qquad \mathrm{U}, \ \frac{\mathrm{N}d\mathrm{U}}{dx}, \quad \frac{\mathrm{M}d.\mathrm{N}d\mathrm{U}}{dx^2}, \ldots\ldots \frac{\mathrm{K}d.\mathrm{L}\ldots d.\mathrm{N}d\mathrm{U}}{dx^{\mu-1}}:$$

chacune de ces quantités est égale à la dérivée de la précédente, multipliée par un facteur positif, et la dernière en vertu de l'équation (1) a pour dérivée $-r\mathrm{U}$.

Pour $x = \mathrm{x}$ et pour des valeurs de x très voisines de x, les fonctions (11) sont positives en vertu des équations (2): l'une d'elles, savoir

$$\frac{\mathrm{K}d.\mathrm{L}\ldots d.\mathrm{N}d\mathrm{U}}{dx^{\mu-1}},$$

est décroissante puisque sa dérivée $-r\mathrm{U}$ est négative, mais les autres vont en croissant. Cet état de choses durera tant que l'une de ces fonctions ne sera pas réduite à zéro, et d'un autre côté celle qui décroît actuellement est la seule qui tende vers une valeur nulle. C'est donc la fonction

$$\frac{\mathrm{K}d.\mathrm{L}\ldots d.\mathrm{N}d\mathrm{U}}{dx^{\mu-1}}$$

qui s'évanouira la première pour une certaine valeur $x_{\scriptscriptstyle 1}^{(\mu-1)}$ de x: ensuite cette fonction changera de signe, car lorsque $x = x_{\scriptscriptstyle 1}^{(\mu-1)}$ sa dérivée $-r\mathrm{U}$ n'a pas cessé d'être < 0.

A partir de $x = x_{\scriptscriptstyle 1}^{(\mu-1)}$, la suite (11) présente une variation. Des μ fonctions qui la composent, les $(\mu - 2)$ premières sont positives et croissantes; la $(\mu - 1)^{ième}$ est positive, mais décroissante; la $\mu^{ième}$ est négative, mais sa valeur absolue augmente puisque la dérivée $-r\mathrm{U}$ est aussi négative : cette fois donc c'est la fonction

$$\frac{\mathrm{L}d\ldots d.\mathrm{N}d\mathrm{U}}{dx^{\mu-2}}$$

qui s'évanouira la première pour une certaine valeur $x_{\scriptscriptstyle 1}^{(\mu-2)}$ de x et qui changera ensuite de signe.

A partir de $x = x_1^{(\mu-2)}$ la suite des signes de (11) présentera encore une variation. Des μ fonctions qui la composent, les $(\mu - 3)$ premières seront positives et croissantes ; la $(\mu - 2)^{ième}$ sera positive, mais décroissante ; quant aux deux dernières, elles seront négatives, mais leurs valeurs absolues iront en augmentant puisqu'elles ont des dérivées aussi négatives. C'est donc la $(\mu - 2)^{ième}$ fonction qui s'évanouira la première pour une certaine valeur $x_1^{(\mu-3)}$ de la variable indépendante x.

En continuant ces raisonnements, on voit que les diverses fonctions qui composent la suite (11) s'annulent successivement dans un ordre rétrograde pour des valeurs de x représentées par $x_1^{(\mu-1)}$, $x_1^{(\mu-2)}$, etc. jusqu'à ce qu'enfin U s'évanouisse aussi et change de signe pour une certaine valeur $x = x_1$.

Pour des valeurs de x un peu plus grandes que x_1, toutes les fonctions (11) seront négatives : à l'exception de la dernière, elles auront des dérivées négatives et par conséquent des valeurs absolues croissantes. Donc le premier changement qui aura lieu dans les signes de la suite (11) sera dû à une valeur $x_2^{(\mu-1)}$ de x pour laquelle

$$\frac{\mathrm{K}d.\mathrm{L}\ldots.d.\mathrm{N}d\mathrm{U}}{dx^{\mu-1}}$$

s'évanouira de nouveau : après quoi toutes les autres fonctions recommenceront à s'évanouir dans l'ordre rétrograde précédemment indiqué.

Au-delà de la seconde racine x_2 de $\mathrm{U} = 0$ les fonctions (11) seront d'abord toutes positives ; ensuite elles changeront de signe, comme cela est déjà arrivé dans l'intervalle compris entre x et x_1. Et ainsi de suite.

10. Cette discussion met bien en évidence la loi régulière suivant laquelle se succèdent les changements de signe des fonctions (11). Il en résulte que deux de ces fonctions ne peuvent jamais s'évanouir à la fois, et que de plus en s'évanouissant chacune d'elles change de signe : en particulier on ne peut pas avoir à la fois $\mathrm{U} = 0$, $\frac{d\mathrm{U}}{dx} = 0$, de sorte que les racines x de l'équation $\mathrm{U} = 0$ sont toutes inégales. Il en résulte aussi que dans la suite (11) il ne peut jamais se trouver

plus d'une variation. Quand une des fonctions qui la composent devient nulle, celles qui la précèdent ont toutes le même signe $\pm$ et celles qui la suivent ont le signe $\mp$. Ainsi pour chaque valeur de x qui donne $U = o$, les quantités

$$\frac{NdU}{dx},\quad \frac{Md.NdU}{dx^2},\ldots\ldots \frac{Kd.L\ldots d.NdU}{dx^{\mu-1}}$$

prennent toutes le même signe, savoir le signe $+$ si l'on a $x = x_2$, $x = x_4, \ldots.$, et le signe $-$ si l'on a $x = x_1$, $x = x_3, \ldots$ On voit par-là qu'il est impossible de satisfaire à la fois aux deux équations

$$U = o$$

et

$$aU + b\frac{NdU}{dx} + \ldots + c\frac{Kd.L\ldots.d.NdU}{dx^{\mu-1}} = o,$$

$a, b, \ldots c$ étant des coefficients positifs : on voit aussi que le premier membre de cette dernière équation devient alternativement positif et négatif lorsqu'on y pose $x = \mathrm{x}$, $x = x_1$, $x = x_2$, $x = x_3$, etc., d'où il suit que l'équation dont il s'agit possède au moins une racine dans chacun des intervalles de x à x_1, de x_1 à x_2, etc. Mais il ne faut pas nous arrêter à discuter en détail les conséquences diverses que l'on pourrait déduire de notre analyse. Contentons-nous d'observer que cette analyse n'éprouvera que des modifications très légères si quelques-unes des constantes positives A, B, C,...D se réduisent à zéro. On doit même dire que nos démonstrations n'auront à subir aucun changement si le dernier nombre D reste $> o$. Pour s'en convaincre il suffit d'observer que dans cette hypothèse et pour des valeurs de x infiniment peu supérieures à x les fonctions (11) seront encore positives, résultat facile à constater et qui tient à ce que toute fonction de x qui s'annule pour $x = \mathrm{x}$ prend, lorsque x croît très peu au-delà de x, le même signe que sa dérivée. Mais lorsque $D = o$ la fonction

$$\frac{Kd.L\ldots.d.NdU}{dx^{\mu-1}}$$

est égale à zéro pour $x = \mathrm{x}$, et ce n'est plus elle qui s'annule la première lorsque x croît d'une manière continue au-delà de x. Pour donner à la question toute la généralité dont elle est susceptible, admettons que les i dernières des fonctions (11) s'évanouissent pour $x = \mathrm{x}$. En observant que la dérivée de

$$\frac{\mathrm{K}d.\mathrm{L}\ldots d.\mathrm{N}d\mathrm{U}}{dx^{\mu-1}}$$

est égale à $-r\mathrm{U}$ et par conséquent est négative lorsque x diffère très peu de x, on verra que pour de telles valeurs de x les $(\mu - i - 1)$ premières des fonctions (11) sont positives et croissantes, que la $(\mu - i)^{ième}$ est positive mais décroissante, et que les i dernières sont négatives et ont des valeurs absolues croissantes. C'est donc la $(\mu - i)^{ième}$ fonction qui s'évanouira la première à partir de $x = \mathrm{x}$; mais l'ordre des changements de signe et les conséquences que nous en avons deduites ci-dessus subsisteront entièrement.

11. Ainsi, dans tous les cas possibles, nous avons ces deux théorèmes qu'il est bon de détacher des autres à cause de leur utilité.

1°. *Les valeurs de x, plus grandes que* x, *qui donnent* $\mathrm{U} = 0$, *ne donnent jamais* $\frac{d\mathrm{U}}{dx} = 0$. Nous désignerons ces racines par x_1, x_2, x_3, $x_4 \ldots$

2°. *Si dans la quantité*

$$a\mathrm{U} + b\frac{\mathrm{N}d\mathrm{U}}{dx} + \ldots + c\frac{\mathrm{K}d.\mathrm{L}\ldots d.\mathrm{N}d\mathrm{U}}{dx^{\mu-1}}$$

où a, b, ... c représentent des coefficients positifs ou nuls, on fait $x = x_1$, puis $x = x_2$, puis $x = x_3$, etc., les résultats que l'on obtiendra seront alternativement négatifs et positifs.

§ IV.

12. Considérons maintenant les variations que peuvent éprouver les racines x de l'équation $\mathrm{U}(x, r) = 0$ lorsqu'on attribue à r une série de valeurs croissantes. Si l'on remplace r par $r + k$, k étant un accroissement positif et très petit, et que l'on conserve à x sa valeur primitive pour laquelle on a $\mathrm{U}(x, r) = 0$, la quantité $\mathrm{U}(x, r + k)$

ne sera plus zéro, mais elle pourra être rendue aussi petite qu'on voudra en raison de la petitesse de k. Cette quantité aura d'ailleurs ou le même signe que la dérivée $\frac{d\mathrm{U}(x, r)}{dx}$ qui n'est pas nulle, ou un signe contraire à celui de cette dérivée. De là deux cas distincts qu'il faut examiner successivement.

Si $\mathrm{U}(x, r+k)$ et $\frac{d\mathrm{U}(x, r)}{dx}$ sont de même signe, on pourra supposer que ces deux quantités sont toutes deux positives; car, si elles étaient toutes deux négatives, rien n'empêcherait de remplacer l'équation $\mathrm{U}(x, r) = 0$ par celle-ci $-\mathrm{U}(x, r) = 0$.

Cela posé, désignons par h un nombre très petit, mais néanmoins tel que l'on ait

$$(12) \qquad h > \frac{2\mathrm{U}(x, r+k)}{\left[\frac{d\mathrm{U}(x, r)}{dx}\right]},$$

et supposons que ξ représente une variable qui peut croître depuis $-h$ jusqu'à 0. Puisque la dérivée

$$\frac{d\mathrm{U}(x, r)}{dx}$$

est positive, il en sera de même de la dérivée

$$\frac{d\mathrm{U}(x+\xi, r+k)}{d\xi},$$

ce qui tient à la petitesse de ξ et de k. Donc la fonction

$$\mathrm{U}(x+\xi, r+k)$$

est une fonction croissante de ξ. Pour $\xi = 0$ cette fonction se réduit à $\mathrm{U}(x, r+k)$ et par conséquent est positive. Pour $\xi = -h$, il vient par la formule de Taylor

$$\mathrm{U}(x-h, r+k) = \mathrm{U}(x, r+k) - h\frac{d\mathrm{U}(x-\theta h, r+k)}{dx}$$

où θ désigne un coefficient compris entre o et 1. A cause de la petitesse de k et de h, $\frac{dU(x-\theta h,\ r+k)}{dx}$ diffère peu de $\frac{dU(x,\ r)}{dx}$, et l'on a certainement

$$\frac{dU(x-\theta h,\ r+k)}{dx} > \frac{1}{2} \cdot \frac{dU(x,\ r)}{dx}.$$

De là résulte

$$U(x-h,\ r+k) < U(x,\ r+k) - \frac{h}{2}\frac{dU(x,\ r)}{dx},$$

et par conséquent

$$U(x-h,\ r+k) < 0,$$

à cause de l'inégalité (12) que la valeur de h vérifie. Ainsi quand on fait croître ξ d'une manière continue depuis $-h$ jusqu'à o, la fonction $U(x+\xi,\ r+k)$, d'abord négative, augmente par degrés insensibles et devient ensuite positive, d'où l'on doit conclure qu'elle s'annule une fois dans cet intervalle.

En d'autres termes, à la racine x de $U(x,\ r)=0$ dont nous nous occupons, répond une racine x un peu plus petite de $U(x, r+k)=0$.

On arriverait à une conséquence opposée si les deux quantités $U(x,\ r+k)$, $\frac{dU(x,\ r)}{dx}$ étaient de signes contraires. On trouverait alors qu'à la racine x de $U(x,\ r)=0$ répond une racine x un peu plus grande de $U(x, r+k)=0$.

Donc, en général, à chaque racine x de l'équation $U(x,\ r)=0$ répond une racine x un peu plus petite ou un peu plus grande de $U(x,\ r+k)=0$.

Et l'on pourra prouver réciproquement qu'à chaque racine x de $U(x,\ r+k)=0$ répond une racine x un peu plus grande ou un peu plus petite de $U(x,\ r)=0$. J'omets, pour abréger, la démonstration de cette proposition inverse : elle ne diffère pas de celle de la proposition directe que nous avons suffisamment développée.

13. Les raisonnements précédents supposent que quand la quantité

$U(x, r)$ est nulle, la quantité $U(x, r+k)$ ne l'est pas, k désignant une quantité finie très petite à laquelle on n'attribue d'ailleurs aucune valeur déterminée. Cela est vrai en général et revient à dire que la fonction U ne devient identiquement nulle pour aucune valeur particulière de x, tant que celle de r reste arbitraire, ce qui est évident par la série du n° 3,

$$U = \varphi_0 - r\varphi_1 + r^2\varphi_2 - \text{etc.}$$

dès que x est $> \mathrm{x}$. Mais la valeur particulière $x = \mathrm{x}$ peut faire exception. Examinons donc de plus près ce qui arrive lorsque l'on a $U(\mathrm{x}, r) = 0$. Pour que la quantité $U(\mathrm{x}, r)$ soit nulle, il faut, en vertu des conditions (2), que l'on ait $A = 0$, et alors l'équation $U(\mathrm{x}, r) = 0$ subsiste quel que soit r. Cette racine x sera d'ailleurs double si B est aussi zéro; triple si B et C sont nuls en même temps que A, et ainsi de suite. Mais l'existence de la racine x et son degré de multiplicité dépendent uniquement des valeurs de A, B, C, etc., et non de celle de r qui n'a ici aucune influence. En sorte que le changement de r en $r + k$ qui doit diminuer ou augmenter toutes les racines x de $U(x, r) = 0$ est sans action au contraire sur la racine x qui reste invariable au milieu des altérations que le paramètre r éprouve.

14. En observant que la quantité $U(\mathrm{x}, r)$ n'est pas nulle lorsque A est différent de zéro, et que, dans le cas contraire, la racine x de l'équation $U(x, r) = 0$ se conserve sans jamais augmenter ni diminuer; et en se bornant aux valeurs de x comprises entre x et X, on déduit du théorème du n° 12 les conséquences suivantes.

Si $U(x, r)$ et $U(x, r+k)$, où k désigne une quantité infiniment petite, ont des valeurs finies pour $x = X$, ces fonctions changeront de signe et s'évanouiront l'une et l'autre précisément le même nombre de fois. Mais si $U(X, r) = 0$, il se pourra que la seconde de nos deux fonctions change de signe une fois de plus que la première, et cela arrivera toutes les fois que les deux quantités

$$\frac{dU(X, r)}{dX}, \quad U(X, r+k)$$

seront de même signe : quand au contraire ces deux quantités seront de signes différents, l'équation

$$U(x,\ r+k)=0$$

perdra la racine X que possédait l'équation

$$U(X,\ r)=0$$

et ne la remplacera par aucune autre.

On comprend actuellement de quelle manière peut varier le nombre des racines x de l'équation $U(x, r)=0$ lorsqu'on fait croître r d'une manière continue depuis o jusqu'à $+\infty$, en se bornant d'ailleurs aux valeurs de x comprises entre x et X. Pour des valeurs de r positives et très petites, ce nombre est nul ; il ne peut augmenter que d'une unité tout au plus au moment où r atteint et dépasse une des racines de l'équation $U(X, r)=0$. En nommant $r^{(1)}, r^{(2)}, r^{(3)}, \ldots r^{(n)}, \ldots$ ces racines rangées par ordre de grandeur, sans nous inquiéter du degré de multiplicité de chacune d'elles, nous voyons donc que pour des valeurs de r comprises entre o et $r^{(1)}$, $U(x, r)$ ne changera jamais de signe; pour des valeurs de r comprises entre $r^{(1)}$ et $r^{(2)}$, $U(x, r)$ changera de signe au plus une fois; en général pour des valeurs de r comprises entre $r^{(n-1)}$ et $r^{(n)}$, $U(x, r)$ changera de signe $(n-1)$ fois au plus. Pour que le nombre des changements de signe de $U(x, r)$ dans ce dernier cas soit précisément $(n-1)$, il faut et il suffit qu'à chaque passage de r par une des racines $r^{(1)}, r^{(2)}, \ldots r^{(n-1)}$ le nombre des racines x, inférieures à X, de l'équation $U(x, r)=0$ augmente d'une unité, ou ce qui revient au même il faut et il suffit que l'équation $U(x, r^{(i)})=0$ ait toujours une racine de plus que l'équation précédente $U(x, r^{(i-1)})=0$. Nous prouverons plus bas qu'effectivement il en est ainsi. Mais avant d'arriver à ce théorème, il est nécessaire d'en démontrer plusieurs autres qui par eux-mêmes ont beaucoup d'intérêt.

En admettant dès à présent l'exactitude du théorème dont nous parlons et qui sera rigoureusement établi dans un des § suivants, il faut en conclure que la racine X de l'équation $U(x, r^{(i-1)})=0$ est remplacée par une autre racine plus petite que X lorsque le paramètre $r^{(i-1)}$ augmente et devient $r^{(i-1)}+k$. Et comme la limite supérieure X n'est au fond qu'une valeur de x quelconque, il s'ensuit qu'en général chacune des racines x de l'équation $U(x, r)=0$ diminue quand r augmente et augmente quand r diminue, résultat conforme à celui que M. Sturm a obtenu, pour le cas où $\mu = 2$, dans son *Mémoire sur la théorie des équations différentielles du second ordre*. Mais la méthode de M. Sturm différant beaucoup de la nôtre, cette proposition qui pour lui est fondamentale devient pour nous un simple corollaire digne à peine d'être remarqué.

Nous avons jusqu'ici fait abstraction du degré de multiplicité des racines $r^{(1)}$, $r^{(2)}$, etc. On verra au nº 34 que ces racines sont toujours des racines simples, et que la dérivée $\frac{dU}{dr}$ est, comme la dérivée $\frac{dU}{dx}$, essentiellement différente de zéro lorsque l'on a $U = 0$.

Il faut observer aussi que le nombre des racines $r^{(1)}$, $r^{(2)}$... est infini. En effet, quand $r = \infty$, U est une fonction de x qui change de signe un nombre infini de fois; or chacun de ces changements de signe entraîne l'existence d'une racine au moins de l'équation $U(X, r) = 0$, puisque, pour des valeurs de $r < r^{(i)}$, U ne peut changer de signe plus de $(i - 1)$ fois.

§ V.

15. Nous allons maintenant nous occuper d'un théorème d'algèbre qui rentre au fond dans celui de Fourier et qui se démontre par la méthode même dont ce savant illustre a fait usage dans l'ouvrage intitulé *Analyse des équations déterminées*. Ce théorème établit une liaison remarquable entre les changements de signe qu'éprouvent deux fonctions λ et θ liées entre elles par l'équation

$$\frac{d.\mathrm{K}d.\mathrm{L}\ldots d.\mathrm{M}d.\mathrm{N}d\lambda}{dx^{\mu}} + \theta = 0,$$

lorsqu'on fait croître x depuis x jusqu'à X.

Considérons la suite de fonctions que voici :

$$(13)\qquad \lambda,\ \frac{\mathrm{N}d\lambda}{dx},\ \frac{\mathrm{M}d.\mathrm{N}d\lambda}{dx^2},\ldots\ldots\frac{d.\mathrm{K}d.\mathrm{L}\ldots d.\mathrm{N}d\lambda}{dx^{\mu}};$$

chacune des quantités dont elle se compose est égale à la dérivée de la précédente, multipliée par un facteur positif, et la dernière est égale à $-\theta$. *Soit p le nombre des variations que la suite* (13) *nous offre lorsqu'on donne à x une valeur $\mathrm{x} + \varepsilon$ infiniment voisine de* x *et un peu plus grande : soit q le nombre des variations de cette même suite lorsqu'on donne à x une valeur $\mathrm{X}-\varepsilon$ infiniment voisine de X et un peu plus petite. Cela posé, l'excès du nombre de fois où la fonction θ change de signe sur le nombre de fois où la fonction λ change de signe est au moins égal à $q-p$.*

On démontrera ce théorème en faisant croître x d'une manière continue depuis $\mathrm{x}+\varepsilon$ jusqu'à $\mathrm{X}-\varepsilon$ et observant que la suite (13) perd au moins une variation lorsque x atteint et dépasse une valeur pour laquelle λ change de signe, qu'elle en gagne au plus une lorsque c'est θ qui change de signe, et qu'enfin elle ne peut jamais en gagner lorsque la fonction qui change de signe est une des fonctions intermédiaires comprises entre λ et θ. Il serait inutile d'insister davantage sur ces considérations aujourd'hui si connues et que Fourier a si bien développées.

16. On obtient un second théorème différent du premier lorsqu'au lieu de compter les changements de signe des fonctions λ, θ, on compare le nombre total Θ des racines tant égales qu'inégales de l'équation $\theta=0$ au nombre Λ des racines tant égales qu'inégales de l'autre équation $\lambda=0$. On peut dire alors que l'excès $\Theta-\Lambda$ du premier nombre sur le second est au moins égal à $q-p$. Pour le démontrer, il faut encore faire croître x d'une manière continue depuis $\mathrm{x}+\varepsilon$ jusqu'à $\mathrm{X}-\varepsilon$. Lorsque x atteint et dépasse une des racines de l'équation $\lambda=0$, il se perd en général autant de variations qu'il y a d'unités dans le nombre indiquant le degré de multiplicité de la racine: cette règle souffre une exception quand la racine dont il s'agit est multiple de l'ordre $\mu+1+i$, de sorte qu'elle annule tous les termes de la suite (13); il se perd alors μ variations seulement, mais par compensation cette racine est multiple de l'ordre $(1+i)$ pour l'équation $\theta=0$: les racines de l'équation $\theta=0$ qui peuvent faire gagner des variations, doivent donc être différentes de celles qui annulent ainsi tous les termes de la suite (13). De ces remarques bien comprises résulte immédiatement la démonstration du théorème énoncé.

Mais pour plus de clarté, désignons par α le nombre des racines égales ou inégales de l'équation $\lambda=0$ qui n'annulent pas tous les termes de la suite (13). Supposons de plus que cette équation ait une racine multiple de l'ordre $\mu+1+i$, une racine multiple de l'ordre

$\mu+1+i_{,},\ldots$ et enfin une racine multiple de l'ordre $\mu+1+i_{\nu}$; i, $i_{,},\ldots i_{\nu}$, représentent des nombres entiers nuls ou positifs, égaux ou inégaux : le nombre total des racines de l'équation $\lambda=0$ étant nommé Λ, on aura

$$\Lambda=\alpha+(\mu+1)(\nu+1)+i+i_{,}+\ldots+i_{\nu},$$

et le nombre des variations perdues en traversant ces racines, sera

$$\alpha+\mu(\nu+1).$$

L'équation $\theta=0$ aura d'abord $(\nu+1)+i+i_{,}+\ldots+i_{\nu}$ racines qui ne feront gagner aucune variation : donc si nous supposons qu'elle ait en outre β racines, le nombre des variations gagnées sera tout au plus β. En en retranchant le nombre des variations perdues, on formera la différence

$$\beta-\alpha-\mu(\nu+1),$$

laquelle devra être évidemment égale ou supérieure à $q-p$, puisque les fonctions intermédiaires peuvent encore faire perdre des variations et n'en font jamais gagner. Or en posant

$$\Theta=\beta+(\nu+1)+i+i_{,}+\ldots+i_{\nu},$$

c'est-à-dire en représentant par Θ le nombre total des racines de l'équation $\theta=0$, on a

$$\beta-\alpha-\mu(\nu+1)=\Theta-\Lambda.$$

Il vient donc

$$\Theta-\Lambda \geqq q-p,$$

inégalité dans laquelle consiste précisément le théorème qu'il fallait démontrer (*).

17. On peut dire que le théorème précédent est énoncé à la page 61 de l'ouvrage de Fourier cité plus haut. L'extension que nous lui avons donnée consiste surtout dans l'introduction des facteurs positifs N,

(*) Les variations que font perdre les fonctions intermédiaires sont toujours en nombre pair, comme on le constate aisément; ainsi l'excès de $\Theta-\Lambda$ sur $q-p$, quand il ne se réduit pas à zéro, est exprimé par un multiple de 2.

M, etc. par lesquels nous multiplions chacune des dérivées de λ avant de passer à la dérivée suivante. En un mot, nous considérons les termes successifs de la suite (13) au lieu de considérer, comme Fourier l'indique, les dérivées λ, $\frac{d\lambda}{dx}$, $\frac{d^2\lambda}{dx^2}$, etc. Mais une telle extension n'offrait aucune difficulté, et d'ailleurs elle a été déjà explicitement opérée par M. Sturm dans un cas à peu près semblable. (*Bulletin des Sciences mathématiques* de M. Férussac, tome II, page 422.)

Lorsque je me suis occupé pour la première fois des théorèmes des n^{os} 15 et 16, je les ai démontrés par une méthode un peu différente de celle qui précède. Cette méthode, qui ne manquait ni de simplicité ni d'élégance, était fondée sur l'emploi répété du théorème de Rolle. Mais j'ai cru devoir l'abandonner, M. Sturm à qui j'avais communiqué cette partie de mon travail m'ayant conseillé d'y substituer les considérations équivalentes sur lesquelles repose le théorème de Fourier. La marche que j'ai suivie a du moins l'avantage de bien montrer que les théorèmes établis ci-dessus ne sont pas nouveaux. Bien que Fourier n'en ait pas donné un énoncé général, il est évident qu'on doit lui en laisser tout l'honneur puisqu'il a établi les principes dont ils dérivent immédiatement comme de simples corollaires.

§ VI.

18. Désignons par a, b,...c des coefficients positifs ou nuls, et nommons $\varpi(r)$ ce que devient la quantité

$$aU + b\,\frac{NdU}{dx} + \ldots + c\,\frac{Kd.L\ldots d.NdU}{dx^{\mu-1}}$$

lorsqu'on y pose $x = X$. L'équation $\varpi(r) = 0$ comprendra comme cas particulier l'équation $U(X, r) = 0$ dont nous nous sommes déjà occupés dans le § IV et dont nous avons représenté les racines par $r^{(1)}, r^{(2)}, r^{(3)},\ldots$ Ces racines $r^{(1)}, r^{(2)}, r^{(3)}\ldots$ sont supposées rangées par ordre de grandeur sans qu'on s'inquiète du degré de multiplicité de chacune d'elles. Nous représenterons de même par $r_1, r_2, r_3,\ldots r_m,\ldots r_n,\ldots$ les racines successives et inégales de l'équation plus générale $\varpi(r) = 0$. Enfin pour plus de simplicité nous désignerons par $U_n(x)$ ou même par U_n la fonction $U(x, r_n)$, et par $U^{(n)}(x)$ ou par $U^{(n)}$ la fonction $U(x, r^{(n)})$. Il est bon de rappeler que l'équation $\varpi(r) = 0$

et l'équation $U(X, r) = 0$ ne peuvent avoir aucune racine commune à moins que les coefficients $b, \ldots c$ ne se réduisent à zéro, auquel cas elles sont identiques : cela tient (n° 10) à ce que les valeurs de x et de r pour lesquelles $U = 0$ rendent les dérivées

$$\frac{NdU}{dx}, \quad \frac{Md.NdU}{dx^2}, \ldots . \frac{Kd.L\ldots .d.NdU}{dx^{\mu-1}}$$

toutes > 0 ou toutes < 0, d'où il suit qu'elles n'annulent jamais la somme

$$aU + b\,\frac{NdU}{dx} + \ldots + c\,\frac{Kd.L\ldots .d.NdU}{dx^{\mu-1}}.$$

19. Maintenant soient $A_m, A_{m+1}, \ldots A_n$ des constantes quelconques. Faisons

$$\lambda = A_m U_m + A_{m+1} U_{m+1} + \ldots + A_n U_n,$$
$$\theta = A_m r_m U_m + A_{m+1} r_{m+1} U_{m+1} + \ldots + A_n r_n U_n :$$

nous aurons entre les deux fonctions λ et θ la relation

$$\frac{d.Kd.L\ldots .d.Nd\lambda}{dx^{\mu}} + \theta = 0$$

qui se démontre en posant successivement $r = r_m$, $r = r_{m+1}, \ldots r = r_n$ dans l'équation (1), puis ajoutant entre elles toutes les équations ainsi obtenues après les avoir multipliées par les facteurs respectifs $A_m, A_{m+1}, \ldots A_n$.

La relation que nous venons de trouver entre λ et θ est précisément celle que nous avions établie dans le § précédent entre deux fonctions désignées aussi par les lettres λ, θ. Nous pouvons donc former de nouveau la suite (13), et appliquer ici les théorèmes des n^os 15 et 16.

En vertu des équations de condition (2), les valeurs des fonctions

$$U, \quad \frac{NdU}{dx}, \quad \frac{Md.NdU}{dx^2}, \ldots . \frac{Kd.L\ldots .d.NdU}{dx^{\mu-1}},$$

pour $x = \mathrm{x}$, sont exprimées par des constantes A, B, C, ... D positives ou nulles. Faisons donc $x = \mathrm{x}$, et représentons par ΣA_n la somme $A_m + A_{m+1} + \ldots + A_n$: nous aurons

$$\lambda = A\Sigma A_n,$$
$$\frac{Nd\lambda}{dx} = B\Sigma A_n,$$
$$\frac{Md.Nd\lambda}{dx^2} = C\Sigma A_n,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{Kd.L\ldots d.Nd\lambda}{dx^{\mu-1}} = D\Sigma A_n.$$

Considérons d'abord le cas le plus simple, savoir celui où ΣA_n et les constantes $A, B, C, \ldots D$ ont des valeurs différentes de zéro. Toutes les quantités que nous venons d'écrire et qui sont entre elles comme les constantes $A, B, C, \ldots D$, sont évidemment de même signe, mais leur signe commun peut être semblable ou opposé à celui que prend le dernier terme de la suite (13) pour $x = \mathrm{x}$. Donc en posant $x = \mathrm{x}$ ou $x = \mathrm{x} + \varepsilon$, le nombre p des variations que nous offrira la suite (13) sera égal à zéro ou à l'unité, et l'on aura $p \leqq 1$.

En observant que toute fonction de x qui s'annule pour $x = \mathrm{x}$ doit être de même signe que sa dérivée pour $x = \mathrm{x} + \varepsilon$, il est aisé de voir que l'inégalité $p \leqq 1$ subsistera lors même que quelques-unes des constantes $A, B, C, \ldots D$ se réduiraient à zéro : en effet, si D n'est pas nulle, toutes les fonctions

$$\lambda, \quad \frac{Nd\lambda}{dx}, \ldots \frac{Kd.L\ldots d.Nd\lambda}{dx^{\mu-1}}$$

seront encore de même signe pour $x = \mathrm{x} + \varepsilon$: si au contraire $D = 0$, la dernière d'entre elles se réduira à zéro quand $x = \mathrm{x}$. Pour conserver à la question toute la généralité qu'elle comporte, supposons que les i dernières de ces fonctions soient alors nulles. Pour $x = \mathrm{x} + \varepsilon$ les $(i + 1)$ quantités qui terminent la suite (13) seront nécessairement de même signe ; les $(\mu - i)$ premières seront aussi entre elles de même signe : donc cette suite (13) présentera tout au plus une variation, et l'on aura $p \leqq 1$, ce qu'il fallait démontrer.

La conclusion à laquelle on arrive devient plus précise lorsque la somme ΣA_n se réduit à zéro. Alors les fonctions (13) sont nulles pour $x = \mathrm{x}$, la dernière exceptée ; par suite ces fonctions (13) sont toutes de même signe quand $x = \mathrm{x} + \varepsilon$. Dans ce cas on a sans équivoque $p = 0$.

Les racines r_m, $r_{m+1}, \ldots r_n$ appartenant toutes à l'équation $\varpi(r) = 0$, c'est-à-dire à l'équation

$$aU + b\,\frac{NdU}{dx} + \ldots + c\,\frac{Kd.\,L\ldots d.\,NdU}{dx^{\mu-1}} = 0 \quad \text{pour} \quad x = X,$$

il est aisé de voir qu'on a aussi

$$a\lambda + b\,\frac{Nd\lambda}{dx} + \ldots + c\,\frac{Kd.\,L\ldots d.\,Nd\lambda}{dx^{\mu-1}} = 0 \quad \text{pour} \quad x = X.$$

Or cette dernière équation exige nécessairement que pour $x = X$ ou du moins pour $x = X - \varepsilon$, la suite (13) présente une ou plusieurs variations : on a donc $q \geqq 1$.

Donc la différence $q - p$ ne peut jamais être négative, et même elle doit être au moins égale à l'unité lorsque $\Sigma A_n = 0$.

Donc 1°. la fonction θ, lorsque x croît de x à X, change de signe au moins autant de fois que la fonction λ : elle change même de signe au moins une fois de plus lorsque l'on a $\Sigma A_n = 0$. 2°. L'équation $\theta = 0$ a, dans le même intervalle, au moins autant de racines, tant égales qu'inégales, que l'équation $\lambda = 0$; elle a même au moins une racine de plus qu'elle lorsque $\Sigma A_n = 0$.

Par exemple la fonction $r_{n-1}U_{n-1} - r_nU_n$ change de signe au moins une fois de plus que la fonction $U_{n-1} - U_n$.

20. Nous venons de prouver que si l'équation

$$A_mU_m + \ldots\ldots + A_nU_n = 0$$

possède un certain nombre de racines, l'équation

$$A_mr_mU_m + \ldots\ldots + A_nr_nU_n = 0$$

en possède au moins autant. Répétons notre raisonnement, et nous verrons qu'il en est de même *à fortiori* des équations suivantes

$$A_m r_m^2 U_m + \ldots\ldots + A_n r_n^2 U_n = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$A_m r_m^i U_m + \ldots\ldots + A_n r_n^i U_n = 0,$$

quelque grand que soit le nombre entier positif i. Et le même théorème subsistera si, au lieu de considérer les racines de ces équations, on considère les changements de signe de leurs premiers membres.

En supposant le coefficient A_n différent de zéro et divisant par $A_n r_n^i$ les deux membres de la dernière de nos équations, on la met sous la forme

$$U_n = -\frac{A_{n-1}}{A_n}\cdot\left(\frac{r_{n-1}}{r_n}\right)^i U_{n-1} - \ldots - \frac{A_m}{A_n}\cdot\left(\frac{r_m}{r_n}\right)^i\cdot U_m.$$

Si donc on suppose le nombre i infini, elle deviendra

$$U_n = \omega,$$

ω désignant un infiniment petit; et cette dernière équation devra avoir au moins autant de racines que l'équation

$$A_m U_m + \ldots\ldots + A_n U_n = 0.$$

21. Les racines de l'équation $U_n = \omega$ sont précisément en même nombre que les racines de l'équation plus simple $U_n = 0$, ce qui tient à ce que les racines x de cette dernière équation sont inégales. Divisons en effet la distance $\mathrm{X} - \mathrm{x}$ en intervalles assez petits pour que dans les uns U_n conserve toujours une valeur absolue plus grande que celle de ω, tandis que dans les autres U_n s'évanouira et changera de signe, la dérivée $\frac{dU_n}{dx}$ restant constamment plus grande que $\frac{d\omega}{dx}$. Dans les premiers il est évident que l'équation $U_n = \omega$ n'est jamais satisfaite. Pour étudier ce qui arrive dans les seconds, nommons α une quelconque des racines de $U_n(x) = 0$ et désignons par h une quantité finie très petite. La fonction ω ou $\omega(x)$ étant infiniment petite, les fonctions

$$U_n(\alpha - h) - \omega(\alpha - h), \quad U_n(\alpha + h) - \omega(\alpha + h)$$

auront les mêmes signes que leurs premiers termes, c'est-à-dire des signes opposés. Donc entre les limites $\alpha - h$, $\alpha + h$, l'équation $U_n - \omega = 0$ a au moins une racine : d'ailleurs elle n'en a qu'une, puisque la dérivée $\frac{dU_n}{dx} - \frac{d\omega}{dx}$ ne s'évanouit pour aucune valeur de x comprise entre $\alpha - h$ et $\alpha + h$.

Si la racine $x = \alpha$ était en même temps racine de l'équation $\omega = 0$, il est clair qu'elle appartiendrait aussi à l'équation $U_n = \omega$, et, d'après la démonstration précédente, l'équation $U_n = \omega$ n'aurait aucune autre racine comprise entre les limites $x = \alpha - h$, $x = \alpha + h$. Cette remarque s'applique à la racine X qui existe dans l'équation $U_n = 0$ toutes les fois que l'on a $b = 0, \ldots c = 0$, c'est-à-dire toutes les fois que $\varpi(r)$ se réduit à $U(X, r)$. Cela étant, on aura, pour $x = X$, non-seulement $U_n = 0$, mais encore $U_{n-1} = 0, \ldots U_m = 0$ et par suite $\omega = 0$. Ainsi la racine X appartiendra dans ce cas à l'équation $U_n = \omega$ comme à l'équation $U_n = 0$.

Mais il peut arriver que l'on ait $\alpha = \mathrm{x}$, et ce cas particulier mérite un examen spécial. Pour que x soit racine de l'équation $U_n = 0$, il faut, en vertu des équations (2), que la constante A se réduise à zéro. De plus, la racine x pourra être multiple si quelques-unes des constantes suivantes B, C,... sont nulles aussi. Pour fixer les idées, nous admettrons que l'on a $B = 0$ et $C > 0$. Alors il viendra en général

$$U_i = 0, \quad \frac{NdU_i}{dx} = 0 \text{ pour } x = \mathrm{x}.$$

et par suite

$$\omega = 0, \quad \frac{Nd\omega}{dx} = 0 \text{ pour } x = \mathrm{x}.$$

Donc x sera une racine double de l'équation $U_n = \omega$ comme de l'équation $U_n = 0$. Mais les quantités

$$\frac{Md.NdU}{dx^2}, \quad \frac{Md.Nd(U_n - \omega)}{dx^2}$$

seront, pour $x = \mathrm{x}$, l'une égale à C et l'autre très peu différente de C, en sorte que la racine x sera double seulement et que dans un très petit intervalle compris depuis $x = \mathrm{x}$ jusqu'à $x = \mathrm{x} + h$, on aura nécessairement $U_n > 0$, $U_n - \omega > 0$.

De cette discussion complète il résulte que les deux équations $U_n = 0$, $U_n = \omega$ ont exactement le même nombre de racines, soit que l'on se borne aux valeurs de $x > \mathrm{x}$ et $< \mathrm{X}$, soit que l'on tienne compte des valeurs extrêmes x, X.

Nous pouvons donc établir ce théorème, savoir que *le nombre total des racines de l'équation*

$$A_m U_m + \ldots + A_n U_n = 0,$$

comprises entre x *et* X, *est tout au plus égal au nombre des racines de l'équation* $U_n = 0$.

La même analyse montre aussi que *le nombre des changements de signe de la fonction*

$$A_m U_m + \ldots + A_n U_n$$

lorsque x croît de x *à* X, *est tout au plus égal au nombre des changements de signes de* U_n. Mais comme l'équation $U_n = 0$ n'a pas de racines égales et que son premier membre change de signe chaque fois qu'il s'annule, on voit que ce nouvel énoncé est compris dans le précédent.

On peut observer en passant que la fonction $A_m U_m + \ldots + A_n U_n$, où l'on suppose le coefficient A_n différent de zéro, n'est jamais identiquement nulle, car d'après les théorèmes que nous venons de démontrer, il faudrait que la fonction U_n fût elle-même identiquement nulle, ce qui est absurde.

22. Nous avons vu ci-dessus que la fonction

$$A_m r_m^i U_m + \ldots + A_n r_n^i U_n$$

change de signe au moins autant de fois que la fonction

$$A_m U_m + \ldots + A_n U_n.$$

En remplaçant $A_m r_m^i$ par $A_m, \ldots A_n r_n^i$ par A_n, il s'ensuit que la fonction

$$A_m U_m + \ldots + A_n U_n$$

change de signe au moins autant de fois que cette autre fonction

$$\frac{A_m}{r^i_m} U_m + \frac{A_{m+1}}{r^i_{m+1}} U_{m+1} + \ldots + \frac{A_n}{r^i_n} U_n :$$

or cette dernière, lorsque i est infiniment grand, peut se mettre sous la forme

$$\frac{A_m}{r^i_m} (U_m + \omega),$$

ω désignant une quantité infiniment petite ; et par des raisonnements semblables à ceux du n° 21, on voit que le nombre des changements de signe est le même pour U_m et pour $U_m + \omega$. Donc on a ce théorème : *lorsque x croît d'une manière continue depuis* x *jusqu'à* X, *la fonction* $A_m U_m + \ldots + A_n U_n$ *change de signe au moins autant de fois que la fonction* U_m.

23. De nos deux théorèmes réunis il résulte que la fonction U_n change de signe au moins une fois de plus que la fonction U_{n-1} qui la précède immédiatement dans l'ordre des indices. Désignons en effet par σ_n, σ_{n-1} les nombres des changements de signe de ces deux fonctions, et par σ, σ' ces mêmes nombres pour les deux différences $U_{n-1} - U_n$, $r_{n-1} U_{n-1} - r_n U_n$: d'après ce qu'on a vu n° 19, σ' surpasse σ au moins d'une unité. Mais par le théorème du n° 22, on a $\sigma \geqq \sigma_{n-1}$, tandis que le théorème du n° 21 donne $\sigma' \leqq \sigma_n$: de ces deux inégalités jointes à celle-ci, $\sigma' \geqq \sigma + 1$, il résulte de suite $\sigma_n \geqq \sigma_{n-1} + 1$, ce qu'il fallait démontrer.

Cette proposition générale s'applique en particulier à la fonction $U^{(n)}(x)$ ou $U[x, r^{(n)}]$: cette fonction doit changer de signe au moins une fois de plus que $U[x, r^{(n-1)}]$. Ainsi le *postulatum* du n° 14 est démontré ; nous sommes certains maintenant que le nombre des changements de signe de la fonction $U^{(i)}$ est exactement $(i-1)$, et généralement $U(x, r)$ change de signe $(i-1)$ fois lorsque r est $> r^{(i-1)}$ et $< r^{(i)}$.

24. Voyons maintenant quel rapport de grandeur existe entre les racines r_1, r_2, r_3, ... de l'équation $\varpi(r) = 0$ ou

$$aU + b\frac{NdU}{dx} + \ldots + c\frac{Kd.L\ldots d.NdU}{dx^{\mu-1}} = 0 \text{ pour } x = X,$$

et les racines $r^{(1)}, r^{(2)}, r^{(3)}, \ldots$ de l'équation $U(X, r) = 0$.

Si dans le premier membre de l'équation $\varpi(r) = 0$ on pose $r = 0$, ce premier membre est évidemment > 0.

Posons-y maintenant $r = r^{(1)}$ et observons que X est la plus petite racine de l'équation $U[x, r^{(1)}] = 0$. Cela étant, le dernier des théorèmes du n° 11 nous montre que $\varpi[r^{(1)}]$ sera une quantité < 0.

Donc entre $r = 0$ et $r = r^{(1)}$ il existe au moins une racine r_1 de l'équation $\varpi(r) = 0$; d'ailleurs il n'en existe qu'une, car s'il y avait une seconde racine $r_2 > r_1$ et $< r^{(1)}$ la fonction U_2 ne changerait jamais de signe, tandis que nous avons vu qu'elle doit changer de signe au moins une fois.

En posant $r = r^{(2)}$ et observant que X est la seconde racine de l'équation $U[x, r^{(2)}] = 0$, on voit de même, en vertu du théorème cité du n° 11, que le résultat $\varpi[r^{(2)}]$ de la substitution est essentiellement > 0. Donc entre $r^{(1)}$ et $r^{(2)}$ il y a au moins une racine r_2 de l'équation $\varpi(r) = 0$. Il ne peut d'ailleurs y en avoir qu'une, car si une autre racine $r_3 > r_2$ existait entre ces limites, la fonction U_3 ne changerait de signe qu'une fois, tandis qu'elle doit en changer au moins une fois de plus que U_2, c'est-à-dire deux fois au moins.

En général, la racine r_i (dont nous ignorons au reste jusqu'ici le degré de multiplicité) est comprise entre $r^{(i-1)}$ et $r^{(i)}$; par suite la fonction U_i change de signe $(i-1)$ fois comme la fonction $U^{(i)}$ qui égalée à zéro a de plus qu'elle la racine X.

25. Maintenant nous pouvons donner aux théorèmes des n^os 21 et 22 un énoncé plus précis. On voit en effet

1°. *Que le nombre des racines tant égales qu'inégales de l'équation*

$$A_m U_m + \ldots + A_n U_n = 0,$$

comprises entre les limites x, X *est au plus égal à* $(n-1)$ *et au moins égal à* $(m-1)$.

2°. *Que le nombre des changements de signe qu'éprouve la fonction*

$$A_m U_m + \ldots + A_n U_n,$$

lorsque x *croît de* x *à* X, *est au moins égal à* $(m-1)$ *et au plus égal à* $(n-1)$.

A l'aide de ces deux théorèmes on démontre que les racines de l'équation $A_{n-1}U_{n-1} + A_n U_n = 0$ sont toutes inégales comme celles de l'équation $U_n = 0$. En effet, cette équation a tout au plus $(n-1)$ racines et son premier doit changer de signe au moins $(n-2)$ fois : or il est évident que cela ne pourrait pas arriver si elle avait une racine double, et plus généralement si elle avait des racines multiples.

De là il suit d'abord que les deux fonctions U_n, U_{n-1} ne peuvent jamais s'évanouir pour une même valeur $x = \alpha$ comprise entre x et X, car alors α serait une racine double de l'équation

$$U_{n-1}(x)\frac{dU_n(\alpha)}{d\alpha} - U_n(x)\frac{dU_{n-1}(\alpha)}{d\alpha} = 0,$$

ce qui est absurde.

Il en résulte aussi que lorsqu'on fait croître x depuis x jusqu'à X, la quantité

$$U_{n-1}(x)\frac{dU_n(x)}{dx} - U_n(x)\frac{dU_{n-1}(x)}{dx}$$

ne change jamais de signe. En effet, dans le cas contraire, cette fonction devrait s'évanouir pour une certaine valeur $x = \alpha$, et l'on aurait

$$U_{n-1}(\alpha)\frac{dU_n(\alpha)}{d\alpha} - U_n(\alpha)\frac{dU_{n-1}(\alpha)}{d\alpha} = 0 :$$

α serait donc une racine double de l'équation

$$U_{n-1}(x)\,U_n(\alpha) - U_n(x)U_{n-1}(\alpha),$$

ce qui est impossible.

Pour déterminer le signe constant de

$$U_{n-1}(x)\frac{dU_n(x)}{dx} - U_n(x)\frac{dU_{n-1}(x)}{dx},$$

j'observe que lorsqu'on fait croître x à partir de $x =$ x, c'est la fonction $U_n(x)$ qui s'évanouit la première, c'est-à-dire avant $U_{n-1}(x)$, puisqu'elle répond à la racine $r_n > r_{n-1}$ et que chaque racine x de l'équation $U(x, r) = 0$ diminue à mesure que le paramètre r augmente. Or, lorsque U_n s'évanouit pour la première fois, la dérivée $\frac{dU_n}{dx}$ est déjà négative et la fonction U_{n-1} est encore positive : donc la quantité

$$U_{n-1}(x)\frac{dU_n(x)}{dx} - U_n(x)\frac{dU_{n-1}(x)}{dx}$$

est alors et par conséquent restera toujours négative, en sorte que l'on doit poser

$$U_{n-1}(x)\frac{dU_n(x)}{dx} - U_n(x)\frac{dU_{n-1}(x)}{dx} = -\zeta^2 :$$

de là on tire

$$d\left(\frac{U_n}{U_{n-1}}\right) = -\frac{\zeta^2 dx}{U^2_{n-1}};$$

ainsi la différentielle de la fraction $\frac{U_n}{U_{n-1}}$ est négative, et cette fraction est décroissante dans tous les intervalles où elle reste continue. Sa valeur égale à l'unité pour $x = \mathrm{x}$ diminuera d'abord, puis changera de signe en s'évanouissant et ne redeviendra positive qu'après avoir passé par l'infini : ensuite elle recommencera à décroître et à s'évanouir, puis redeviendra infinie; et ainsi de suite. Les valeurs de x qui rendent cette fraction nulle ou infinie sont respectivement racines des équations $U_n = 0$, $U_{n-1} = 0$: on voit par là que ces racines se succèdent alternativement, et que les $(n-2)$ racines de l'équation $U_{n-1} = 0$ sont comprises chacune à chacune entre les $(n-1)$ racines de l'équation $U_n = 0$.

§ VII.

26. Les propriétés de la fonction U_n nous permettent d'étendre à cette fonction certains théorèmes que j'ai donnés pour la première fois dans ce journal (tome I, page 259), et que j'ai pu ensuite reproduire textuellement dans mon Mémoire sur l'intégration de l'équation $\frac{du}{dt} = \frac{d^3u}{dx^3}$ (*Journal de l'École Polytechnique*, XXV^e cahier,

page 107). Ces théorèmes s'appliquent encore d'eux-mêmes à la fonction U_n.

Soient α, β, γ... *des grandeurs inégales comprises entre* x *et* X. *Faisons*

$$U_1(\alpha)U_2(x) - U_2(\alpha)U_1(x) = P_2(x)$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$U_1(\alpha)U_n(x) - U_n(\alpha)U_1(x) = P_n(x)$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

puis

$$P_2(\beta)P_3(x) - P_3(\beta)P_2(x) = Q_3(x)$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$P_2(\beta)P_n(x) - P_n(\beta)P_2(x) = Q_n(x)$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

puis encore

$$Q_3(\gamma)Q_4(x) - Q_4(\gamma)Q_3(x) = R_4(x)$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$Q_3(\gamma)Q_n(x) - Q_n(\gamma)Q_3(x) = R_n(x)$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

et ainsi de suite. Je dis que si l'on se borne à considérer les valeurs de $x >$ x *et* $<$ X, *la fonction* $P_2(x)$ *s'évanouira pour* $x = \alpha$ *et seulement pour* $x = \alpha$; *la fonction* $Q_3(x)$ *s'évanouira pour* $x = \alpha$, $x = \beta$, *et seulement pour* $x = \alpha$, $x = \beta$; *la fonction* $R_4(x)$ *s'évanouira pour* $x = \alpha$, $x = \beta$, $x = \gamma$ *et seulement pour* $x = \alpha$, $x = \beta$, $x = \gamma$; *et ainsi de suite. De plus toutes ces fonctions* $P_2(x)$, $Q_3(x)$, $R_4(x)$.... *changeront de signe chaque fois qu'elles s'évanouiront.*

D'abord on se rappelle que la fonction $U_1(x)$ ne peut jamais devenir nulle quand x est $>$ x et $<$ X.

La fonction $P_2(x)$ se ramène à la forme $A_1U_1(x) + A_2U_2(x)$, en posant $A_1 = -U_2(\alpha)$, $A_2 = U_1(\alpha)$, et le coefficient A_2 n'est pas nul. Donc par un théorème démontré (nº 25) cette fonction ne peut s'annuler plus d'une fois quand x est $>$ x et $<$ X, et il est d'ailleurs évident qu'elle devient nulle pour $x = \alpha$; en vertu du même théorème la racine α ne peut être qu'une racine simple ; par conséquent la fonction $P_2(x)$ doit changer de signe en même temps qu'elle s'évanouit. Les fonctions $P_3(x)$, $P_4(x)$,... ne jouissent pas nécessairement des mêmes propriétés que $P_2(x)$: elles s'annulent, il est vrai, pour $x=\alpha$, mais la racine α peut être multiple, et des racines autres que α, quoique comprises entre x et X, peuvent satisfaire aux équations $P_3(x)=0$, $P_4(x)=0$,....

La fonction $Q_3(x)$ s'annule évidemment pour $x=\beta$; elle s'annule aussi pour $x=\alpha$, puisque l'on a $P_2(\alpha)=0$, $P_3(\alpha)=0$. Or en remplaçant $P_2(x)$ et $P_3(x)$ par leurs valeurs, la fonction $Q_3(x)$ prend la forme $A_1U_1(x)+A_2U_2(x)+A_3U_3(x)$, et le coefficient A_3 n'est pas nul puisqu'on le trouve égal à $P_2(\beta)U_1(\alpha)$: donc pour des valeurs de $x>$ x et $<$ X, $Q_3(x)$ ne peut s'évanouir plus de deux fois : donc on a bien $Q_3(x)=0$ pour $x=\alpha$, $x=\beta$, et seulement pour $x=\alpha$, $x=\beta$: de plus les racines α, β ne peuvent être que simples, ce qui oblige la fonction $Q_3(x)$ à changer de signe chaque fois qu'elle s'évanouit. Les fonctions $Q_4(x)$, $Q_5(x)$,... ne jouissent pas nécessairement des autres propriétés démontrées pour $Q_3(x)$.

La fonction $R_4(x)$ s'annule évidemment pour $x=\gamma$; elle s'annule aussi pour $x=\alpha$, $x=\beta$, car il est aisé de voir que l'on a $Q_3(\alpha)=0$, $Q_3(\beta)=0$, $Q_4(\alpha)=0$, $Q_4(\beta)=0$. Or, en remplaçant $Q_3(x)$ et $Q_4(x)$, puis $P_2(x)$, $P_3(x)$, $P_4(x)$ par leurs valeurs, celle de $R_4(x)$ prend la forme $A_1U_1(x)+A_2U_2(x)+A_3U_3(x)+A_4U_4(x)$, A_4 ayant la valeur suivante $Q_3(\gamma)P_2(\beta)U_1(\alpha)$ qui ne peut pas être nulle. Donc l'équation $R_4(x)=0$ ne peut avoir entre les limites x, X aucune racine différente de α, β, γ, et de plus ces trois racines doivent être simples, en sorte que $R_4(x)$ changera de signe en s'évanouissant.

Il est clair que l'on pourra continuer indéfiniment cette démonstration.

27. Les $(n-1)$ lettres α, β, γ,... représentant toujours des quantités inégales $>$ x et $<$ X, on peut déterminer les constantes A_1, A_2,... A_n de telle manière que la fonction

$$\Psi(x)=A_1U_1+A_2U_2+\ldots+A_nU_n,$$

sans être identiquement nulle, devienne égale à zéro pour $x=\alpha$, $x=\beta$, $x=\gamma$,... : en effet si l'on a $n=2$, il suffira de prendre

$\Psi(x) = P_2(x)$; si l'on a $n = 3$, il suffira de prendre $\Psi(x) = Q_3(x)$; si l'on $n = 4$, il suffira de prendre $\Psi(x) = R_4(x)$; et ainsi de suite.

La fonction $\Psi(x)$ étant ainsi déterminée, l'équation $\Psi(x) = 0$ ne peut avoir que $(n - 1)$ racines au plus (*voyez* n° 25) : on voit donc, 1°. que les racines de l'équation $\Psi(x) = 0$ sont toutes inégales et comprises dans la série $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$; 2°. que par suite la fonction $\Psi(x)$ change de signe chaque fois qu'elle s'évanouit. C'est au reste ce qui a été démontré plus en détail dans le numéro précédent.

28. On peut faire usage des quantités U_1, U_2, etc., pour résoudre les problèmes d'interpolation. Supposons que l'on cherche une fonction y qui se réduise à y_0 pour $x = \alpha$, à y_1 pour $x = \beta$, à y_2 pour $x = \gamma$: on formera trois fonctions $Q_3(x)$, $Q'_3(x)$, $Q''_3(x)$ de la forme $A_1U_1 + A_2U_2 + A_3U_3$ et telles que l'on ait

$$\begin{aligned} Q_3(x) &= 0 \quad \text{pour} \quad x = \beta, \quad x = \gamma, \\ Q'_3(x) &= 0 \quad \text{pour} \quad x = \alpha, \quad x = \gamma, \\ Q''_3(x) &= 0 \quad \text{pour} \quad x = \alpha, \quad x = \beta, \end{aligned}$$

puis on prendra

$$y = \frac{Q_3(x)}{Q_3(\alpha)} y_0 + \frac{Q'_3(x)}{Q'_3(\beta)} y_1 + \frac{Q''_3(x)}{Q''_3(\gamma)} y_2.$$

Quel que soit le nombre des valeurs $y_0, y_1, \ldots$ de y données *a priori*, le problème d'interpolation se résoudra toujours de la même manière.

29. La proposition suivante ne paraît pas moins remarquable. *Soit* $\varphi(x)$ *une fonction de* x *réelle et déterminée, qui ne devienne jamais infinie lorsque* x *croît de* x *à* X : *si l'équation*

$$(14) \qquad \int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{X}} \varphi(x) U dx = 0$$

a lieu en remplaçant r *par une quelconque des racines* $r_1, r_2, r_3, \ldots$ *de l'équation* $\varpi(r) = 0$, *je dis que l'on a* $\varphi(x) = 0$ *depuis* $x = \mathrm{x}$ *jusqu'à* $x = \mathrm{X}$.

D'abord si la fonction $\varphi(x)$, sans être identiquement nulle, conservait toujours le même signe depuis $x = \mathrm{x}$ jusqu'à $x = \mathrm{X}$, l'équation (14) serait absurde; car en posant $r = r_1$ on aurait

$$\int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{X}} \varphi(x) \mathrm{U}_1 dx = 0,$$

et cela ne se peut, puisque la fonction U_1 ne change pas non plus de signe entre les limites $x = \mathrm{x}$, $x = \mathrm{X}$.

Supposons maintenant que lorsqu'on fait croître x de x à X, $\varphi(x)$ change de signe $(n-1)$ fois, et soient $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ les $(n-1)$ valeurs de x pour lesquelles ce changement s'effectue. En faisant successivement $r = r_1$, $r = r_2, \ldots$ $r = r_n$ dans l'équation (14), on en déduira n équations nouvelles que l'on pourra ajouter membre à membre après les avoir multipliées respectivement par les constantes A_1, $\mathrm{A}_2, \ldots$ A_n. En posant

$$\mathrm{A}_1\mathrm{U}_1 + \mathrm{A}_2\mathrm{U}_2 + \ldots + \mathrm{A}_n\mathrm{U}_n = \Psi(x),$$

on trouve ainsi

$$\int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{X}} \varphi(x) \Psi(x) dx = 0;$$

mais, d'après ce qu'on a vu n° 27, on peut déterminer les constantes $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots \mathrm{A}_n$ de telle manière que la fonction $\Psi(x)$ change de signe toutes les fois que x atteint et dépasse infiniment peu une des $(n-1)$ valeurs $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ et ne change de signe pour aucune autre valeur de x. En adoptant les valeurs de $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots \mathrm{A}_n$ qui produisent cet effet, l'élément $\varphi(x)\Psi(x)dx$ conservera toujours le même signe dans toute l'étendue de l'intégration, et par conséquent on ne pourra pas avoir $\int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{X}} \varphi(x)\Psi(x)dx = 0$ à moins qu'on n'ait aussi $\varphi(x) = 0$, du moins pour les valeurs de x comprises entre x et X.

Le sens précis du théorème que nous venons de démontrer consiste en ce que, entre les limites x, X, il ne peut exister aucun intervalle fini si petit qu'il soit, dans lequel $\varphi(x)$ ait une valeur constamment > 0 ou constamment < 0. Il pourra donc se faire que la fonction $\varphi(x)$ étant nulle en général, soit cependant différente de zéro pour certaines valeurs *isolées* de x; mais cet inconvénient n'est point à craindre lorsqu'on sait *à priori* que $\varphi(x)$ est une fonction continue. Au surplus notre théorème subsiste encore lorsque la fonction $\varphi(x)$, au lieu d'être réelle, est imaginaire et de la forme $\varphi_1(x)+\sqrt{-1}\,\varphi_2(x)$: car alors l'équation (14) se décompose en deux autres qui donnent séparément $\varphi_1(x)=0$, $\varphi_2(x)=0$ et par suite $\varphi(x)=0$.

30. Par un raisonnement semblable à celui dont nous venons de faire usage, on peut encore établir la proposition suivante : soit $\varphi(x)$ une fonction réelle de x qui ne soit pas identiquement nulle et qui ne devienne jamais infinie entre les limites $x=\mathrm{x}$, $x=\mathrm{X}$: *si l'équation*

$$(14) \qquad \int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{X}} \varphi(x)\mathrm{U}dx = 0$$

a lieu en remplaçant r par une quelconque des racines r_1, r_2... jusqu'à r_i, je dis que lorsqu'on fait croître x de x à X, la fonction $\varphi(x)$ change de signe i fois au moins. En effet, supposons, s'il est possible, que la fonction $\varphi(x)$, dans cet intervalle, change de signe $(n-1)$ fois seulement, n étant $\geqq i$, et soit $\Psi(x)$ une fonction de la forme $\mathrm{A}_1\mathrm{U}_1+\mathrm{A}_2\mathrm{U}_2+\ldots+\mathrm{A}_n\mathrm{U}_n$ qui change de signe aussi $(n-1)$ fois et pour les mêmes valeurs de x que $\varphi(x)$: le produit... $\varphi(x)\Psi(x)dx$ ne changera jamais de signe, et par suite on ne pourra pas avoir

$$\int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{X}} \varphi(x)\Psi(x)dx = 0,$$

ce qui résulte pourtant de l'équation (14) en y posant successivement $r=r_1$, $r=r_2$,... $r=r_n$, puis ajoutant membre à membre les équations ainsi obtenues, après les avoir multipliées par les facteurs respectifs A_1, A_2, ...A_n. Il est donc absurde d'admettre que la fonction $\varphi(x)$ change de signe $(n-1)$ fois seulement, n étant $\leqq i$, ce qui démontre la proposition énoncée.

Telles sont les principales propriétés de la fonction U que l'on peut démontrer sans avoir recours à aucune fonction auxiliaire. Mais en introduisant une seconde fonction V on peut encore en trouver plusieurs autres.

§ VIII.

31. Dans les paragraphes précédents nous nous sommes occupés de la fonction U qui satisfait à la fois à l'équation indéfinie

$$(1)\qquad \frac{d.\mathrm{K}d.\mathrm{L}\ldots d.\mathrm{M}d.\mathrm{N}d\mathrm{U}}{dx^{\mu}} + r\mathrm{U} = 0$$

et aux conditions définies

$$(2)\qquad \mathrm{U} = \mathrm{A},\quad \frac{\mathrm{N}d\mathrm{U}}{dx} = \mathrm{B},\ldots \frac{\mathrm{K}d.\mathrm{L}\ldots d.\mathrm{N}d\mathrm{U}}{dx^{\mu-1}} = \mathrm{D} \text{ pour } x = \mathrm{x}.$$

Nous avons représenté par $\varpi(r)$ ce que devient la quantité

$$a\mathrm{U} + b\frac{\mathrm{N}d\mathrm{U}}{dx} + \ldots + c\frac{\mathrm{K}d.\mathrm{L}\ldots d.\mathrm{N}d\mathrm{U}}{dx^{\mu-1}}$$

lorsqu'on y pose $x = \mathrm{X}$; et par U_n ce que devient U lorsqu'on prend $r = r_n$; $r_1, r_2, \ldots r_n \ldots$ étant les racines de l'équation $\varpi(r) = 0$, rangées par ordre de grandeur.

Nous allons maintenant considérer la fonction V qui satisfait à la fois à l'équation indéfinie

$$(15)\qquad \frac{d.\mathrm{N}d.\mathrm{M}\ldots d.\mathrm{L}d.\mathrm{K}d\mathrm{V}}{dx^{\mu}} + (-1)^{\mu} r\mathrm{V} = 0$$

et aux conditions définies

$$(16)\quad \mathrm{V} = c,\ldots \frac{\mathrm{N}d.\mathrm{M}\ldots d.\mathrm{L}d.\mathrm{K}d\mathrm{V}}{dx^{\mu-1}} = (-1)^{\mu-1}.a \text{ pour } x = \mathrm{X},$$

conditions définies qui se forment en égalant, pour $x = \mathrm{X}$, les quantités

$$\mathrm{V},\quad \frac{\mathrm{K}d\mathrm{V}}{dx},\quad \frac{\mathrm{L}d.\mathrm{K}d\mathrm{V}}{dx^2},\ldots \frac{\mathrm{N}d.\mathrm{M}\ldots d.\mathrm{K}d\mathrm{V}}{dx^{\mu-1}},$$

aux constantes $c, \ldots b$, a prises alternativement avec le signe $+$ et le signe $-$.

Les deux équations (1) et (15) sont *conjuguées*, de telle manière que leurs premiers membres deviennent des différentielles exactes lorsqu'on les multiplie par les facteurs respectifs $\mathrm{V}dx$, $\mathrm{U}dx$.

Désignons par $\Pi(r)$ ce que devient la quantité

$$\mathrm{DV} - \ldots \pm \mathrm{B}.\frac{\mathrm{M}d\ldots d.\mathrm{K}d\mathrm{V}}{dx^{\mu-2}} \mp \mathrm{A}.\frac{\mathrm{N}d.\mathrm{M}\ldots d.\mathrm{K}d\mathrm{V}}{dx^{\mu-1}},$$

(où les signes sont alternativement positifs et négatifs) lorsqu'on y pose $x = \mathrm{x}$. Je dis que cette fonction $\Pi(r)$ sera identique avec $\varpi(r)$.

Multiplions en effet par $\mathrm{V}dx$ et intégrons ensuite les deux membres de l'équation (1) : nous aurons

$$(17) \qquad \int \mathrm{V}dx \left(\frac{d.\mathrm{K}d.\mathrm{L}\ldots d.\mathrm{N}d\mathrm{U}}{dx^{\mu}} + r\mathrm{U}\right) = \text{const.}$$

Mais en intégrant par parties plusieurs fois de suite, on trouve que l'intégrale

$$\int \mathrm{V}dx.\frac{d.\mathrm{K}d.\mathrm{L}\ldots.d.\mathrm{N}d\mathrm{U}}{dx^{\mu}}$$

est égale à la somme de deux quantités, l'une exprimée par

$$\mathrm{V}.\frac{\mathrm{K}d.\mathrm{L}\ldots d.\mathrm{N}d\mathrm{U}}{dx^{\mu-1}} - \frac{\mathrm{K}d\mathrm{V}}{dx}.\frac{\mathrm{L}d.\ldots.d.\mathrm{N}d\mathrm{U}}{dx^{\mu-2}} + \ldots.$$
$$\ldots \pm \frac{\mathrm{M}d\ldots d.\mathrm{K}d\mathrm{V}}{dx^{\mu-2}}.\frac{\mathrm{N}d\mathrm{U}}{dx} \mp \frac{\mathrm{N}d.\mathrm{M}\ldots d.\mathrm{K}d\mathrm{V}}{dx^{\mu-1}}.\mathrm{U},$$

l'autre exprimée par

$$(-1)^{\mu}\int \frac{d.\mathrm{N}d.\mathrm{M}\ldots d.\mathrm{K}d\mathrm{V}}{dx^{\mu}}.\mathrm{U}dx,$$

c'est-à-dire par

$$- r\int \mathrm{UV}dx,$$

en vertu de l'équation (15). Cette seconde partie est détruite par un terme égal et de signe contraire dans le premier membre de l'équation (17) : donc l'autre partie est constante et doit rester la même lorsqu'on y pose $x = \mathrm{x}$, puis $x = \mathrm{X}$. Or quand on fait $x = \mathrm{x}$, elle se réduit à $\Pi(r)$, et quand on fait $x = \mathrm{X}$, elle se réduit à $\varpi(r)$. Donc les deux fonctions $\Pi(r)$ et $\varpi(r)$ sont identiques.

Les racines de l'équation $\Pi(r) = 0$ sont ainsi égales aux racines r_1, r_2, r_3,... de l'équation $\varpi(r) = 0$: il est donc naturel de représenter par V_n ce que devient la fonction V lorsqu'on y pose $r = r_n$.

32. Toutes les propriétés de la fonction U se retrouvent dans la fonction V qui satisfait à l'équation indéfinie (15) et aux conditions définies (16). A la vérité la présence du facteur $(-1)^\mu$ semble empêcher l'équation (15) d'être de même forme que l'équation (1); de plus les constantes $a, b, \ldots c$ qui entrent dans les équations (16) y sont prises tantôt positivement et tantôt négativement; ces équations elles-mêmes sont relatives à la plus grande et non à la plus petite valeur de x; enfin les coefficients des termes successifs de la fonction $\Pi(r)$ sont aussi tantôt positifs, tantôt négatifs; mais on fera disparaître toutes ces différences si l'on change la variable x en une autre variable z en posant $x = -z$. L'équation (15) deviendra ainsi

$$\frac{d.\mathrm{N}d.\mathrm{M}\ldots d.\mathrm{K}d\mathrm{V}}{dz^\mu} + r\mathrm{V} = 0,$$

les conditions définies (16) prendront la forme

$$\mathrm{V} = c, \ldots \frac{\mathrm{N}d.\mathrm{M}\ldots d.\mathrm{K}d\mathrm{V}}{dz^{\mu-1}} = a \quad \text{pour} \quad z = \mathrm{z},$$

z désignant la plus petite valeur de z; et $\Pi(r)$ sera la valeur de

$$\mathrm{DV} + \ldots + \mathrm{A}.\frac{\mathrm{N}d.\mathrm{M}\ldots d.\mathrm{K}d\mathrm{V}}{dx^{\mu-1}}$$

relative à $z = \mathrm{Z}$, c'est-à-dire à la plus grande valeur de z. Donc, les quantités V, V_n, considérées comme fonctions de z, jouissent de toutes les propriétés des quantités U, U_n considérées comme fonctions de x. Il est inutile de rappeler ici toutes ces propriétés que nous venons de démontrer : nous énoncerons donc seulement, et cela à cause de l'usage que nous en allons faire, les deux propositions suivantes déduites de celles des nᵒˢ 29 et 30.

1°. *Soit $\varphi(x)$ une fonction de x, réelle ou imaginaire, mais qui ne devienne jamais infinie lorsque x croît de* x *à* X : *si l'équation*

$$\int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{X}} \varphi(x) \mathrm{V}_i\, dx = 0$$

a lieu quel que soit l'indice i, on aura $\varphi(x) = 0$ depuis $x = \mathrm{x}$ jusqu'à $x = \mathrm{X}$.

2°. *Si cette équation a lieu seulement pour les valeurs de i comprises dans la série* 1, 2, 3,...*n*, *on sera certain que la fonction $\varphi(x)$ change de signe au moins n fois, lorsque x croît de* x *à* X.

§ IX.

33. Désignons par V′ ce que devient la fonction V lorsqu'on y remplace r par r', sans altérer d'ailleurs l'équation (15) et les conditions (16). On aura

$$\frac{d.\mathrm{N}d.\mathrm{M}\ldots d.\mathrm{L}d.\mathrm{K}d\mathrm{V}'}{dx^{\mu}} + (-1)^{\mu} r' \mathrm{V}' = 0$$

quel que soit x, et

$$\mathrm{V}' = \mathcal{C}, \ldots \frac{\mathrm{N}d.\mathrm{M}\ldots d.\mathrm{L}d.\mathrm{K}d\mathrm{V}'}{dx^{\mu-1}} = (-1)^{\mu-1}.a \quad \text{pour} \quad x = \mathrm{X}$$

En multipliant par $\mathrm{V}'dx$ et intégrant ensuite, entre les limites x, X de x, les deux membres de l'équation (1), il vient

$$\int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{X}} \mathrm{V}'dx\left(\frac{d.\mathrm{K}d.\mathrm{L}\ldots d.\mathrm{M}d.\mathrm{N}d\mathrm{U}}{dx^{\mu}} + r\mathrm{U}\right) = 0,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$(r' - r)\int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{X}} \mathrm{U}\mathrm{V}'dx = \int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{X}} \mathrm{V}'dx\left(\frac{d.\mathrm{K}\ldots d.\mathrm{N}d\mathrm{U}}{dx^{\mu}} + r'\mathrm{U}\right).$$

Mais à l'aide d'intégrations par parties, on prouve aisément que l'intégrale

$$\int V' dx . \frac{d.K \ldots d.N dU}{dx^{\mu}}$$

est égale à la somme de deux quantités, l'une exprimée par

$$(-1)^{\mu} \int U dx . \frac{d.N \ldots d.K.dV'}{dx^{\mu}},$$

c'est-à-dire par

$$-r' \int UV' dx$$

en vertu de l'équation (15), l'autre exprimée par

$$V' . \frac{K.d.L \ldots d.N.dU}{dx^{\mu-1}} - \frac{KdV'}{dx} . \frac{Ld. \ldots d.NdU}{dx^{\mu-2}} + \ldots$$
$$\ldots \pm \frac{Md. \ldots d.KdV'}{dx^{\mu-2}} . \frac{NdU}{dx} \mp \frac{Nd.M \ldots d.KdV'}{dx^{\mu-1}} . U$$

où les termes ont alternativement le signe $+$ et le signe $-$; or cette dernière partie devient égale à $\Pi(r')$ ou $\varpi(r')$ lorsqu'on y pose $x = \mathrm{x}$ et égale à $\varpi(r)$ lorsqu'on y pose $x = \mathrm{X}$. On a donc

$$(r' - r) \int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{X}} UV' dx = \varpi(r) - \varpi(r').$$

De cette équation on tire cette formule remarquable

$$(19) \qquad \int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{X}} UV' dx = \frac{\varpi(r) - \varpi(r')}{r' - r},$$

où r et r' sont quelconques, et qui se réduit à

$$(20) \qquad \int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{X}} UV dx = -\frac{d\varpi(r)}{dr} = -\varpi'(r)$$

lorsqu'on prend $r' = r$.

34. Nous pouvons maintenant prouver que l'équation $\varpi(r) = 0$ [qui comprend comme cas particulier l'équation $U(\mathrm{X}, r) = 0$] n'a

jamais ni racines imaginaires de la forme $p + q\sqrt{-1}$, ni racines égales.

S'il existait en effet une racine $r' = p + q\sqrt{-1}$, en attribuant à r' cette valeur on aurait $\varpi(r') = 0$, et l'équation (19) deviendrait

$$\int_{\text{x}}^{\text{X}} \text{UV}' dx = \frac{\varpi(r)}{r' - r}:$$

or, le second membre de cette équation s'annulle quand on fait $r = r_i$, l'indice i étant quelconque, puisque $\varpi(r_i)$ est $= 0$ et que $r' - r_i$ est différent de zéro. L'hypothèse admise ci-dessus nous donnerait donc

$$\int_{\text{x}}^{\text{X}} \text{U}_i\text{V}' dx = 0$$

pour toutes les valeurs de l'indice i, d'où résulterait, d'après le théorème du n° 29, que la fonction V' est identiquement nulle entre les limites $x = \text{x}$, $x = \text{X}$; ce qui est absurde.

Maintenant supposons qu'une racine réelle r_n puisse être multiple, c'est-à-dire puisse satisfaire à la fois aux équations $\varpi(r_n) = 0$, $\varpi'(r_n) = 0$. Si nous faisons $r = r_n$ dans la formule (20), elle nous donnera

$$\int_{\text{x}}^{\text{X}} \text{U}_n\text{V}_n dx = 0,$$

tandis qu'en désignant par i un indice différent de n et posant $r = r_i$, $r' = r_n$ dans la formule (19) nous aurons

$$\int_{\text{x}}^{\text{X}} \text{U}_i\text{V}_n dx = 0.$$

Donc, si la racine r_n est multiple, le théorème du n° 29 nous conduira encore à l'équation absurde

$$\text{V}_n = 0 \quad \text{depuis} \quad x = \text{x} \quad \text{jusqu'à} \quad x = \text{X}.$$

35. La théorie du développement des fonctions en séries dont les divers termes se composent du produit d'une constante par chacune

des fonctions U_1, U_2, U_3,... ou V_1, V_2, V_3... dépend de la même analyse.

Soit $f(x)$ une fonction de x; et supposons d'abord que l'on sache *à priori* que cette fonction peut être développée en une série de la forme

$$f(x) = A_1U_1 + A_2U_2 + \ldots + A_iU_i + \ldots$$

A_1, A_2,... A_i,... étant des constantes. Pour déterminer A_i on observera que si l'on pose $r = r_n$, $r' = r_i$ en désignant par n et i deux indices différents, la formule (19) donne

$$\int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{X}} U_nV_idx = \frac{\varpi(r_n) - \varpi(r_i)}{r_i - r_n} = 0,$$

tandis que l'intégrale

$$\int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{X}} U_iV_idx$$

est essentiellement différente de zéro et égale à $-\varpi'(r_i)$. En multipliant donc $V_i\,dx$ et intégrant depuis $x = \mathrm{x}$ jusqu'à $x = \mathrm{X}$ les deux membres de l'équation

$$f(x) = A_1U_1 + A_2U_2 + \ldots + A_iU_i + \ldots,$$

on fera disparaître tous les termes du second membre à l'exception d'un seul, et l'on trouvera

$$\int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{X}} f(x)\,V_idx = A_i\int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{X}} U_iV_i\,dx$$

d'où

$$A_i = \frac{\int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{X}} f(x)\,V_idx}{\int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{X}} U_iV_idx}.$$

En admettant à *priori* que la fonction $f(x)$ soit susceptible d'un développement de la forme

$$f(x) = \Sigma A_iU_i,$$

on obtient ainsi sans difficulté

$$(21) \qquad f(x) = \Sigma \left[\frac{U_i \int_x^X f(x) V_i dx}{\int_x^X U_i V_i dx} \right],$$

et l'on trouverait de même

$$(22) \qquad f(x) = \Sigma \left[\frac{V_i \int_x^X f(x) U_i dx}{\int_x^X U_i V_i dx} \right]$$

si l'on regardait la fonction $f(x)$ comme développable en une série composée des fonctions V_1, V_2, etc.

36. Maintenant je dis que si les séries

$$\Sigma \left[\frac{U_i \int_x^X f(x) V_i dx}{\int_x^X U_i V_i dx} \right], \quad \Sigma \left[\frac{V_i \int_x^X f(x) U_i dx}{\int_x^X U_i V_i dx} \right]$$

sont convergentes et si la fonction $f(x)$ ne devient jamais infinie, elles auront nécessairement $f(x)$ pour valeur commune entre les limites $x = \mathrm{x}$, $x = \mathrm{X}$. La démonstration étant la même pour ces deux séries, considérons seulement la première d'entre elles et posons

$$F(x) = \Sigma \left[\frac{U_i \int_x^X f(x) V_i dx}{\int_x^X U_i V_i dx} \right].$$

Il s'agira de prouver que l'on a $F(x) = f(x)$. Or si l'on multiplie les deux membres de l'équation précédente par $V_i dx$ et qu'on intègre ensuite entre les limites $x = \mathrm{x}$, $x = \mathrm{X}$, il viendra

$$\int_x^X F(x) V_i dx = \int_x^X f(x) V_i dx,$$

ou

$$\int_x^X [F(x) - f(x)] V_i dx = 0.$$

Or en vertu d'un théorème donné n° 32, cette équation, dans laquelle l'indice i est quelconque, entraîne la suivante $F(x)-f(x)=0$ qu'il fallait démontrer. Toutefois quelques valeurs singulières et isolées de x pourraient échapper à cette démonstration si l'une des fonctions $F(x)$, $f(x)$ était discontinue : mais ces anomalies que nous avons déjà signalées (n° 29) et que nous ne discuterons pas ici n'existeront jamais si $f(x)$ et $F(x)$ sont des fonctions continues de x.

37. Pour donner de l'équation (21) une application très simple, posons par exemple $f(x)=U$, en laissant dans la fonction U le paramètre r indéterminé. D'après les formules (19) et (20), on aura

$$\int_x^X UV_i dx = \frac{\varpi(r)-\varpi(r_i)}{r_i-r} = -\frac{\varpi(r)}{r-r_i}$$

et

$$\int_x^X U_i V_i dx = -\varpi'(r_i).$$

Il viendra par suite

$$U = \Sigma\left[\frac{U_i.\varpi(r)}{(r-r_i)\,\varpi'(r_i)}\right],$$

ou ce qui est la même chose

$$\frac{U}{\varpi(r)} = \Sigma\left[\frac{U_i}{(r-r_i)\,\varpi'(r_i)}\right],$$

on obtiendrait semblablement, à l'aide de la formule (22),

$$\frac{V}{\varpi(r)} = \Sigma\left[\frac{V_i}{(r-r_i)\,\varpi'(r_i)}\right].$$

Ces équations s'accordent avec celles que l'on déduirait de la théorie ordinaire sur la décomposition des fractions rationnelles en fractions simples. Mais la démonstration précédente nous paraît mériter l'attention des géomètres.

38. Désignons par σ_n la somme des n premiers termes de la série

$$\Sigma\left[\frac{\mathrm{U}_i\int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{X}} f(x)\,\mathrm{V}_i dx}{\int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{X}} \mathrm{U}_i\mathrm{V}_i dx}\right]$$

et par ρ_n la différence $f(x)-\sigma_n$. Pour un indice i égal ou inférieur à n, nous obtiendrons immédiatement

$$\int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{X}} \sigma_n \mathrm{V}_i dx = \int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{X}} f(x)\mathrm{V}_i dx,$$

ou ce qui est la même chose,

$$\int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{X}} \rho_n \mathrm{V}_i dx = 0.$$

D'après le dernier théorème du n° 32, nous pouvons conclure de là que ρ_n change de signe au moins n fois lorsque x croît de x à X.

39. L'utilité de nos théorèmes pour l'intégration des équations différentielles partielles est évidente. Proposons-nous par exemple d'intégrer l'équation linéaire

$$\frac{du}{dt} = \frac{d.\mathrm{K}d.\mathrm{L}\ldots .d.\mathrm{M}d.\mathrm{N}du}{dx^{\mu}},$$

de telle manière que pour $x=\mathrm{x}$, les quantités

$$u,\quad \frac{\mathrm{N}du}{dx},\quad \frac{\mathrm{M}d.\mathrm{N}du}{dx^2},\ldots\ldots \frac{\mathrm{K}d.\mathrm{L}\ldots .d.\mathrm{N}du}{dx^{\mu-1}}$$

soient entre elles comme des constantes données et positives A, B, C,....D; et que pour $x=\mathrm{X}$ on ait

$$au + b\,\frac{\mathrm{N}du}{dx} + \ldots + c\,\frac{\mathrm{K}d.\mathrm{L}\ldots\ldots d.\mathrm{N}du}{dx^{\mu-1}} = 0.$$

Enfin donnons-nous la valeur $f(x)$ de u relative à $t=0$, et supposons la variable x comprise entre x et X. On satisfera à toutes ces conditions en prenant

$$u = \Sigma \left[\frac{U_i e^{-r_i t} \int_x^X f(x) V_i dx}{\int_x^X U_i V_i dx} \right].$$

Quand la valeur de t sera devenue très grande, cette série d'exponentielles se réduira sensiblement à son premier terme, pourvu toutefois que ce premier terme ne soit pas nul. Et l'on aura à très peu près

$$u = \frac{U_1 e^{-r_1 t} \int_x^X f(x) V_1 dx}{\int_x^X U_1 V_1 dx};$$

Cette valeur de u ne change jamais de signe lorsque x croît depuis x jusqu'à X.